Zestaw 2 - jednokrokowy model dwumianowy, miara martyngałowa. Model dwumianowy z dwiema akcjami.

1. Rozważmy następujący model dwumianowym:

$$A(0) = 100,\ A(1) = 105,\ S(0) = 100,\ S^u = 130,\ S^d = 90.$$

Dane są opcje: europejskie call C oraz put P, obie z ceną wykonania $K = 110$, kontrakt forward (długa pozycja) z ceną wykonania $K = 105$, a także instrument pochodny, którego wypłata w chwili 1 wyraża się wzorem $H(1) = (10 - \frac{1}{10}S(1))^+$. Wyznaczyć cenę powższych instrumentów metodą replikacji oraz za pomocą prawdopodobieństw martyngałowych.

2. *(Egzamin na doradcę inwestycyjnego, I etap, 2009)* Bieżąca cena jednej akcji spółki ABC jest równa 100 zł. Przewiduje się, że po roku cena ta może wzrosnąć do 110 zł lub spaść do 90 zł. Rozważana jest sprzedaż opcji nabycia akcji z ceną wykonania w wysokości 105 zł i rocznym terminem do wygaśnięcia. Analizowana spółka nie będzie płacić dywidendy. Efektywna stopa zwrotu z aktywów wolnych od ryzyka wynosi 8% rocznie. Zakładając, że rynek znajduje się w stanie równowagi, oblicz wartość opcji kupna akcji spółki A.

   (a) 3,8 zł;
   (b) 3,3 zł;
   (c) 4,2 zł;
   (d) 1,7 zł.

3. Udowodnić, że w modelu dwumianowym wolnym od arbitrażu cena europejskiej opcji kupna z ceną wykonania $K \in (S^u, S^d)$ rośnie jeśli rośnie U. Pokazać, że maleje jesli rośnie D.

4. Przypuśćmy, że cena spot akcji wynosi $S(0)$ i stopa procentowa (przy kapitalizacji prostej) wynosi R. Zakładamy, że na rynku nie ma możliwości arbitrażu. Wykazać, że europejskie opcje kupna i sprzedaży o cenie wykonania $(1 + R)S(0)$ i terminie wykonania $t = 1$ mają tę samą wartość w chwili $t = 0$.

5. Pokazać, że w modelu dwumianowym, dla dowolnych miar probabilistycznych $\mathbb{P}_1$ i $\mathbb{P}_2$ prawdziwa jest równość

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(K_H) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(K_H) = (p_1 - p_2)\frac{H^u - H^d}{H(0)},$$

gdzie $\mathbb{P}_1(\{u\}) = p_1$, $\mathbb{P}_2(\{u\}) = p_2$.

6. Przypuśćmy, że w modelu dwumianowym nie ma możliwości arbitrażu. Pokazać, że $\mu_{K_S} \geq R$, wtedy i tylko wtedy, gdy $p \geq q$.

Anna Wasieczko-Zając

7. Obliczyć μ_{K_H}, $\sigma^2_{K_H}$, oraz $Cov_{\mathbb{P}}(K_S, K_H)$, gdzie H jest intrumentem pochodnym typu europejskiego, przy założeniu, że dane są: p, U, D, $H(0)$, H^u, H^d.

8. Dla dowolnego instrumentu pochodnego H zdefiniujmy
$$\boxed{\beta_H = \frac{Cov_{\mathbb{P}}(K_s, K_H)}{\sigma^2_{K_S}}}.$$
Pokazać, że na rynku bez możliwości arbitażu, dla europejskiej opcji call C z ceną wykonania $K \in (S^d, S^u)$ zachodzi $\beta_C > 1$.

9. Udowodnić, że dla dowolnego instrumentu pochodnego H
$$\sigma_{K_H} = |\beta_H| \sigma_{K_S}.$$

10. Przypuśćmy, że na rynku nie ma możliwości arbitrażu. Wykazać, że[1]
$$\mu_{K_H} - R = \beta_H(\mu_{K_S} - R).$$

11. Dla dowolnego instrumentu pochodnego H wyrażenie
$$\boxed{m_H = \frac{\mu_{K_H} - R}{\sigma_{K_H}}}$$
nazywamy **rynkową ceną ryzyka** istrumentu H.

    (a) Wykaż, że rynkowa cena ryzyka akcji S jest równa
    $$m_S = \frac{p-q}{\sqrt{p(1-p)}}.$$

    (b) Wykaż, że dla dowolnego istrumentu pochodnego H prawdziwa jest relacja:
    $$|m_H| = m_S.$$

12. Rozważmy model dwumianowy z dwiema akcjami S_1, S_2. Wykazać, że cena akcji S_2 w chwili 1 jest funkcją borelowską ceny akcji S_1 w chwili 1, tj. wykazać, że istnieje funkcja borelowska $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, dla której zachodzi równość
$$S_2(1) = h(S_1(1)).$$

13. Dany jest model dwumianowy z dwiema akcjami o parametrach $S_1(0) = 50$, $U_1 = 20\%$, $D_1 = -10\%$, $S_2(0) = 80$, $U_2 = 15\%$, $D_2 = -5\%$, $A(0) = 1$, $R = 10\%$. Wyznacz strategię arbitrażową.

14. W modelu dwumianowym z dwiema akcjami dane są $S_1(0)$, U_1, D_1, $S_2(0)$, U_2, $A(0)$, R. Wyznacz wartość parametru D_2, dla której w tym modelu nie ma możliwości aribtrażu.

[1] wyrażenie $\mu_{K_H} - R$ nazywamy **oczekiwaną nadwyżką stopy zwrotu** instrumentu H