

**Zestaw 3 - jednokrokový model trójmianowy z jedną akcją**

1. Dany jest model trójmianowy z jedną akcją, którego parametry mają wartości

$$S(0) = 10, S^u = 20, S^m = 15, S^d = 7.5, R = 0.$$

- (a) Wykaż, że instrument pochodny  $H$  da się zreplikować wtedy i tylko wtedy, gdy  $3H^u - 5H^m + 2H^d = 0$ .
- (b) Dla instrumentu spełniającego warunek z poprzedniego podpunktu, wyraż ucziwą cenę  $H(0)$  w terminach  $H^u, H^m$ .
2. Dany jest model trójmianowy z jedną akcją, którego parametry mają wartości

$$S(0) = 100, U = 20\%, M = 10\%, D = -15\%, \\ A(0) = 1, R = 5\%.$$

O instrumencie pochodnym  $H$  wiadomo, że

$$H^u = 25, H^m = 5.$$

Sprawdzić czy istnieje takie nieujemne  $H^d$ , aby istniał dokładnie jeden portfel replikujący.

3. W modelu trójmianowym z jedną akcją, dane niech będą parametry  $S(0) = 100, U = 20\%, M = 10\%, D = -15\%, A(0) = 1, R = 5\%$ . Rozważmy instrument pochodny  $H$ . Dla dowolnych  $H^u, H^m, H^d$  znaleźć taką relację między tymi trzema wartościami, aby istniał dokładnie jeden portfel replikujący.
4. Dany jest model trójmianowy:

$$A(0) = 1, R = 5\%, S(0) = 30, U = 20\%, M = 10\%, D = -10\%.$$

Rozważmy instrument pochodny  $H$  o wypłacie w chwili 1 równej  $H(1) = (S(1) - 32)^+$ .

- (a) Znajdź cenę super- oraz sub-replikacji instrumentu  $H$ , a następnie wskaż przedział bezarbitrażowy dla tego instrumentu.
- (b) Wyznacz ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych, a następnie wykorzystaj znalezione prawdopodobieństwa do wyznaczenia przedziału  $I_H$ .
5. Dany jest model trójmianowy z jedną akcją, którego parametry mają wartości

$$S(0) = 80, A(0) = 10, A(1) = 11, S^u = 110, S^m = 90, S^d = 75.$$

- (a) Znaleźć ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych w tym modelu.

- (b) Wyznaczyć przedział bezarbitrażowy dla instrumentu  $H$  o wypłacie zadanej przez wektor  $(H^u, H^m, H^d)$ .
- (c) Korzystając z poprzedniego podpunktu, pokazać, że dowolny instrument pochodny  $H$ , który da się w tym modelu zreplikować, musi spełniać zależność

$$3H^u - 7H^m + 4H^d = 0.$$

- (d) Dla instrumentu spełniającego warunek z poprzedniego podpunktu, wyrazić uczciwą cenę  $H(0)$  w terminach  $H^m, H^d$ .

6. Dany jest model trójmianowy:

$$R = 10\%, S(0) = 10, S^u = 20, S^m = 15, S^d = 7.5.$$

Znaleźć ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych w tym modelu.

7. W jednokrokovym modelu trójmianowym dane są:

$$S(0) = 150, S^u = 170, S^m = S(0), D = -\frac{1}{6},$$

$$A(0) = 10, A(1) = 11.$$

- (a) Znajdź ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych dla tego modelu.
- (b) Czy europejska opcja put o cenie wykonania 155 jest instrumentem osiągalnym<sup>1</sup> w tym modelu?
- (c) Dla opcji z poprzedniego podpunktu wyznacz (dwoma sposobami) jej cenę sub- oraz super-replikacji.

8. Dany jest model trójmianowy:

$$A(0) = 1, A(1) = 1, S(0) = 220, S^u = 230, S^m = 210, S^d = 190.$$

- (a) Pokazać, że ogólna postać prawdopodobieństw martyngałowych jest następująca

$$\left(\lambda, \frac{3}{2} - 2\lambda, \lambda - \frac{1}{2}\right),$$

gdzie  $\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{4}$ .

- (b) Czy cena opcji równa 15 jest odpowiednia dla europejskiej opcji call z ceną wykonania 210? Odpowiedź uzasadnij powołując się na odpowiednie twierdzenie.

---

<sup>1</sup>Instrument pochodny  $H$  nazwiemy osiągalnym w danym modelu, jeżeli istnieje w tym modelu strategia replikująca  $H$ .

9. Rozważmy model trójmianowy, w którym:

$$A(0) = 1, A(1) = 1.1, S(0) = 100, S^u = 120, S^m = 90, S^d = 80.$$

Na rynku dostępna jest (po cenie z rynku można ją kupić, bądź pożyczyć i sprzedać) tylko jedna europejska opcja sprzedaży z ceną realizacji równą 110 w cenie 4,5.

- (a) Czy na powyższym rynku (tj. rynku złożonym z akcji, obligacji i jednej opcji call) istnieje możliwość arbitrażu?
  - (b) Czy kupiłbyś tę opcję w cenie 4,5?
  - (c) Wskaż strategię arbitrażową.
10. Rozważmy jednokrokowy model trójmianowy bez możliwości arbitrażu. Wykaż, że jeżeli  $H^{\text{sub}} = H^{\text{super}}$ , to istnieje **jedyny** portfel replikujący.