Zestaw 5 - parytet put-call.

1. Dany jest model jednokrokowy, oraz opcje europejskie: put P i call C o cenie wykonania $K = 105$. Wiadomo, że $C(0) = 10$, $P(0) = 7$, $S(0) = 104$, $A(0) = 100$ oraz $R = 5\%$. Czy model ten dopuszcza arbitraż? Jeżeli tak, to wskaż strategię arbitażową.

2. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, 2008*) Cena rocznej europejskiej opcji zakupu akcji spółki X, od której nie jest wypłacana dywidenda, o cenie wykonania 55, wynosi 8. Roczna efektywna stopa zwrotu z aktywów wolnych od ryzyka wynosi 6%. Na podstawie powyższych informacji, zakładając, iż rynek jest efektywny określ, ile wynosi cena rocznej europejskiej opcji sprzedaży akcji spółki X o cenie wykonania 55, jeśli obecna cena akcji spółki X wynosi 48.

   (a) 8,00;
   (b) 11,89;
   (c) 15,00;
   (d) 17,72;

3. Na rynku dana jest akcja nie wypłacająca dywidendy, przy czym $S(0) = 2$. Rozważmy dwie opcje typu europejskiego na tę akcję, obie o tym samym czasie wykonania ($T = 1$ rok). Opcje te mają następujące wypłaty:

$$I : H_I(T) = (5S(T) - 10)^+ \tag{1}$$
$$II : H_{II}(T) = (10 - 5S(T))^+. \tag{2}$$

   Wiadomo, że cena opcji H_I w chwili 0 wynosi $H_I(0) = 2$. Wiadomo ponadto, że stopa wolna od ryzyka wynosi $R = 5\%$. Znajdź uczciwą cenę opcji H_{II}.

4. Dany jest model jednokrokowy z jedną akcją, w którym $S(0) = 220$, $A(0) = 100$, $A(1) = 105$. W chwili $T = 0$ inwestor przeprowadził następujące transakcje:

   - zakupił dwie opcję put z ceną wykonania równą 210,
   - zakupił pięć opcji call z ceną wykonania równą 200,
   - wystawił dwie opcję call z ceną wykonania równą 210,
   - wystawił pięć opcję put z ceną wykonania równą 200.

   Wyznacz portfel replikujący obraną przez inwestora strategię. Ile pieniędzy potrzebował inwestor, aby móc przyjąć taką strategię?

5. Rozważmy model jednokrokowy wolny od arbitrażu, w którym stopa wolna od ryzyka wynosi R. Dla ustalonego $K > 0$ przez $C(S_0)$, $P(S_0)$ oznaczmy cenę w chwili 0 europejskiej opcji, odpowiednio, call i put na akcję S z ceną wykonania K, przy założeniu, że $S(0) = S_0$.

(a) Wykazać, że

$$\max\left(0, S_0 - \frac{K}{1+R}\right) \le C(S_0) \le S_0.$$

oraz

$$\max\left(0, \frac{K}{1+R} - S_0\right) \le P(S_0) \le \frac{K}{1+R}.$$

(b) Wykazać, że nierówność $S_0 < S_0'$ implikuje

$$C(S_0) - C(S_0') \le S_0 - S_0'$$

oraz

$$P(S_0) - P(S_0') \le S_0 - S_0'.$$

(c) Wykazać, że funkcje $C(S_0)$, $P(S_0)$ są wypukłe.

6. Rozważmy model jednokrokowy wolny od arbitrażu, w którym stopa wolna od ryzyka wynosi R. Przez $C(K)$, $P(K)$ oznaczmy cenę w chwili 0 europejskiej opcji, odpowiednio, call i put na akcję S z ceną wykonania K.

   (a) Wykazać, że $C(K)$ jest funkcją malejącą, a $P(K)$ funkcją rosnącą.

   (b) Wykazać, że nierówność $K < K'$ implikuje

   $$C(K') - C(K) \le \frac{K - K'}{1+R}$$

   oraz

   $$P(K) - P(K') \le \frac{K - K'}{1+R}$$

   (c) Wykazać, że funkcje $C(K)$, $P(K)$ są wypukłe.

7. Dany jest model jednokrokowy wolny od arbitrażu. W modelu tym dane są trzy opcje call: C_1, C_2, C_3, z cenami wykonania odpowiednio K_1, K_2, K_3. Wiadomo, że $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$. Pokazać, że

   $$C_2(0) \le \frac{C_1(0) + C_3(0)}{2}.$$

   Następnie wykazać analogiczną nierówność dla opcji put.

8. Dany jest model jednokrokowy, w którym stopa wolna od ryzyka wynosi R. Na rynku dostępny jest instrument ryzykowny S oraz opcje call i put (oparte o ten instrument) typu *Asset-or-Nothing* o następujących wypłatach

   $$C(1) = \begin{cases} S(1), & \text{gdy } S(1) > K \\ \frac{1}{2}S(1), & \text{gdy } S(1) = K \\ 0, & \text{gdy } S(1) < K \end{cases}, \quad P(1) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S(1) > K \\ \frac{1}{2}S(1), & \text{gdy } S(1) = K \\ S(1), & \text{gdy } S(1) < K \end{cases},$$

   gdzie $K > 0$ jest ustaloną ceną wykonania opcji.

(a) Wyprowadzić parytet call-put dla tych opcji.

(b) Dane są $S(0) = 100$, $R = 5\%$. Na rynku dostępna jest w sprzedaży opcja put typu Asset-or-Nothing o cenie wykonania równej 95. Wiadomo, że cena tej opcji wynosi 35. Znajdź uczciwą cenę opcji call typu Asset-or-Nothing o tej samej cenie wykonania.

9. *(Egzamin aktuarialny, 2008)* Inwestor działający na rynku opcji na akcje otrzymał w momencie $t = 0$ następujące kwotowania:

- obecna cena akcji A: 42 PLN,
- nominalna stopa wolna od ryzyka: 10% w skali roku,
- europejska opcja kupna na 1 akcję A z ceną wykonania 40 PLN, wygasająca za 3 miesiące kosztuje 3 PLN,
- europejska opcja sprzedaży na 1 akcję A z ceną wykonania 40 PLN, wygasająca za 3 miesiące kosztuje 2.25 PLN.

Inwestor uważa, że wykorzystując jedną akcję A istnieje możliwość zrealizowania zysku arbitrażowego. Strategia arbitrażowa ma opierać się na zajęciu odpowiednich pozycji na rynku opcji oraz na rynku akcji i instrumentów wolnych od ryzyka. Zysk arbitrażowy na moment $t = 0$ wynosi (do obliczeń przyjmij kapitalizację ciągłą, dopuszczamy możliwość krótkiej sprzedaży akcji bez kosztów transakcyjnych):

(a) 1.66 PLN;

(b) 2.24 PLN;

(c) 2.29 PLN;

(d) 3.00 PLN;

(e) Nie ma zysku arbitrażowego, inwestor poniesie zawsze stratę.