**Zestaw 6 - WWO, filtracje i martyngały.**
ROZWIĄZANIA

1. Pokazać, że dla procesu stóp zwrotu z akcji $(K(n))_{n\in\{1,\dots,n\}}$ zachodzą następujące własności

   (a) Dla każdego $n$ zmienna losowa $K(n)$ ma rozkład dwupunktowy
   $$K(n,\omega) = \begin{cases} U, & \text{gdy } n\text{-ty wyraz ścieżki } \omega \text{ jest równy } u \\ D, & \text{gdy } n\text{-ty wyraz ścieżki } \omega \text{ jest równy } d \end{cases},$$
   przy czym $\mathbb{P}(K(n) = U) = p$ i $\mathbb{P}(K(n) = D) = 1 - p$.

   (b) $K(1), \dots, K(N)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie,

   (c) Dla wszystkich $n$
   $$\sigma(K(1), K(2), \dots, K(n)) = \mathcal{F}_n.$$

2. Niech $(M(n))_{n\in\{0,1,\dots,N\}}$ będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym na przestrzeni probabilitycznej z filtracją: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,1,\dots,N\}}, \mathbb{P})$. Wówczas $(M(n))$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,1,\dots,N\}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

   (a) $M(n)$ jest całkowalną zmienną losową, dla każdego $n$,

   (b) proces $(M(n))$ jest adaptowany do filtracji $(\mathcal{F}_n)$

   (c) dla każdego $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ zachodzi równość
   $$\mathbb{E}(M(n + 1)|\mathcal{F}_n) = M(n).$$

3. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,1,\dots,N\}}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Przypuśćmy, że proces stochastyczny $(M(n))_{n\in\{0,1,\dots,N\}}$ jest adaptowalny do filtracji $(\mathcal{F}_n)$, każde $M(n)$ jest całkowalne oraz dla dowolnego $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ zachodzi równość
   $$\mathbb{E}(M(n + 1) - M(n)|\mathcal{F}_n) = 0$$
   Wykazać, że $(M(n))$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)$.

4. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,1,\dots,N\}}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Niech $X$ będzie całkowalną zmienną losową. Oznaczmy $M(n) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$. Pokazać, że proces $(M(n))_{n\in\{0,1,\dots,N\}}$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)$.

5. Rozważmy 3 gry o następujących zasadach:

   - **GRA 1**:
     O 12:00 każdego dnia (przez kolejne 365 dni) rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł - dostajemy 1 zł, jeżeli wypadnie reszka - płacimy 1 zł. Zakładamy, że moneta jest uczciwa.

- **GRA 2**:
  O 12:00 każdego dnia (przez kolejne 365 dni) rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł - dostajemy 1 zł, jeżeli wypadnie reszka - płacimy 1 zł. Zakładamy, że moneta nie jest uczciwa: średnio na cztery rzuty wypadają 3 reszki.
- **GRA 3**:
  O 12:00 każdego dnia (przez kolejne 365 dni) rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł - dostajemy tyle zł, ile orłów wypadło do tej pory (wliczając orła, który właśnie wypadł), jeżeli wypadnie reszka - płacimy tyle zł, ile reszek wypadło do tej pory (wliczając reszkę, która właśnie wypadła). Zakładamy, że moneta jest uczciwa.

Dla danej gry, niech $X(n)$ będzie sumą naszych wygranych (i przegranych) o 20:00 $n$-tego dnia. Przyjmujemy przy tym $X(0) = 0$. Poniższe polecenia wykonaj dla każdej gry osobno.

(a) Zbudować model gry o powyższych zaadach: wybrać odpowiednią przestrzeń probabilistyczną i zdefiniować na niej zmienne losowe $X(n)$, których wartości są równe sumie naszych wygranych.

(b) Wyznaczyć jawne wzory zmiennych losowych $X(1),\ X(2)$ i $X(3)$ (wskazówka: narysuj drzewo dwumianowe dla powyższej gry).

(c) Jaki rozkład ma zmienna losowa $X(n)$? Obliczyć jej wartość oczekiwaną. Czy wartość oczekiwana jest stała dla procesu $(X(n))$?

(d) Wyznaczyć $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, a następnie obliczyć $\mathbb{E}(X(3)|\mathcal{F}_0)$, $\mathbb{E}(X(3)|\mathcal{F}_1)$ oraz $\mathbb{E}(X(3)|\mathcal{F}_2)$, gdzie $(\mathcal{F}_n)$ jest filtracją generowaną przez proces $(X(n))$ (tj. $\mathcal{F}_n = \sigma(X(0), X(1), \ldots, X(n))$).

(e) Czy proces $(X(n))$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)$?

6. Wykonujemy dwukrotnie rzut kostką. Niech $X$ oznacza sumę oczek z obu rzutów, a $Y$ wynik pierwszego rzutu. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.

7. Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

| $\omega$ | $S(0)$ | $S(1)$ | $S(2)$ | $S(3)$ | $\mathbb{P}(\{\omega\})$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | 100 | 121 | 130 | 140 | $\frac{1}{8}$ |
| $\omega_2$ | 100 | 121 | 130 | 110 | $\frac{1}{8}$ |
| $\omega_3$ | 100 | 121 | 100 | 110 | $\frac{1}{8}$ |
| $\omega_4$ | 100 | 121 | 100 | 90 | $\frac{1}{8}$ |
| $\omega_5$ | 100 | 90 | 105 | 90 | $\frac{1}{8}$ |
| $\omega_6$ | 100 | 90 | 105 | 95 | $\frac{1}{8}$ |
| $\omega_7$ | 100 | 90 | 85 | 95 | $\frac{1}{8}$ |
| $\omega_8$ | 100 | 90 | 85 | 75 | $\frac{1}{8}$ |

(a) Obliczyć $\mathbb{E}(S(3)|S(1) = 121)$.

(b) Niech $\mathcal{P}_2$ będzie podziałem zbioru $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$ generowanym przez $(S(0), S(1), S(2))$. Oznaczmy $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{P}_2)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(S(3)|\mathcal{F}_2)$.

8. Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

| $\omega$ | $S(0)$ | $S(1)$ | $S(2)$ | $\mathbb{Q}(\{\omega\})$ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega_1$ | 80 | 120 | 180 | $\frac{2}{15}$ |
| $\omega_2$ | 80 | 120 | 80 | $\frac{3}{15}$ |
| $\omega_3$ | 80 | 60 | 72 | $\frac{4}{9}$ |
| $\omega_4$ | 80 | 60 | 36 | $\frac{2}{9}$ |

Sprawdzić czy proces cen akcji $(S(n))_{n=0,1,2}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)_{n=0,1,2}$ przestrzeni probabilistycznej $(\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.