

Zestaw 7 - model wielokrokowy - strategie samofinansujące i arbitrażowe. Prawdopodobieństwo martyngałowe.

1. Rozważmy model dwumianowy czterokrokowy o parametrach:

$$R = 10\%, U = 20\%, D = -10\%, S(0) = 100, A(0) = 10$$

Skonstruować strategię samofinansującą, której początkowa wartość wynosi 1000 i taką, że 50% jej aktualnej wartości jest za każdym razem inwestowane w instrument wolny od ryzyka.

2. Rozważmy model dwukrokowy, w którym:

$$\begin{aligned} A(0) &= 1, A(1) = 1.1, A(2) = 1.21 \\ S(0) &= 50, S^u(1) = 60, S^{uu}(2) = 75, S^{um}(2) = 65, S^{ud}(2) = 50, \\ S^d(1) &= 45, S^{du}(2) = 55, S^{dd}(2) = 40. \end{aligned}$$

(a) Dana niech będzie strategia $(x(n), y(n))_{n \in \{1,2\}}$, gdzie

$$\begin{aligned} (x(1), y(1)) &= (10, 500), \\ (x^u(2), y^u(2)) &= (15, 227\frac{3}{11}) \\ (x^d(2), y^d(2)) &= (5, 704\frac{6}{11}). \end{aligned}$$

Wyznacz proces wartości tej strategii $V_{(x,y)}(n)$ i pokaż, że jest ona samofinansująca.

(b) Mając dany ciąg przewidywalny

$$x(1) = 30, x^u(2) = 40, x^d(2) = 20,$$

oraz początkową wartość portfela $V(0) = 2000$, znajdź przewidywalny ciąg $(y(n))_{n \in \{1,2\}}$ ilości bonów, tak aby $(x(n), y(n))_{n \in \{1,2\}}$ była strategią samofinansującą o wartości początkowej $V(0)$.

3. Rozważmy model dwukrokowy, w którym:

$$\begin{aligned} A(0) &= 1, A(1) = 1.1, A(2) = 1.21 \\ S(0) &= 100, S^u(1) = 120, S^{uu}(2) = 140, S^{ud}(2) = 110, \\ S^d(1) &= 90, S^{du}(2) = 120, S^{dd}(2) = 80. \end{aligned}$$

(a) Dana niech będzie strategia $(x(n), y(n))_{n \in \{1,2\}}$, gdzie

$$\begin{aligned} (x(1), y(1)) &= (2, 100), \\ (x^u(2), y^u(2)) &= (3, 50) \\ (x^d(2), y^d(2)) &= (1, 200). \end{aligned}$$

Pokaż, że nie jest ona samofinansująca.

- (b) W jaki sposób należy zmodyfikować wartości procesu $y(n)$ z poprzedniego podpunktu, aby otrzymać strategię samofinansującą (nie zmieniając wartości początkowej strategii)?
4. Wykazać, że mając dany przewidywalny proces $(y(n))_{n \in \{1, \dots, N\}}$ oraz początkową wartość portfela $V(0)$, istnieje jednoznacznie wyznaczony przewidywalny proces $(x(n))$, dla którego strategia $(x(n), y(n))_{n \in \{1, \dots, N\}}$ jest samofinansująca i jej początkowa wartość wynosi $V(0)$.
5. Rozważmy model dwukrokowy, w którym $A(0) = 100$, $A(1) = 110$, $A(2) = 121$ oraz z dynamiką procesu cen akcji opisaną w tabelce:

ω	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
ω_1	90	100	112
ω_2	90	100	106
ω_3	90	80	90
ω_4	90	80	80

Wyznacz wartości prawdopodobieństw martyngałowych \mathbb{Q} w tym modelu.

6. Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

ω	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$\mathbb{Q}(\{\omega\})$
ω_1	100	115	126.5	q_1
ω_2	100	115	103.5	q_2
ω_3	100	15	120	q_3
ω_4	100	15	95	q_4

Stopa wolna od ryzyka wynosi 5%. Czy istnieją wartości prawdopodobieństw q_1, q_2, q_3, q_4 takie, aby zdyskontowany proces cen akcji $(\tilde{S}(n))_{n=0,1,2}$ był martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)_{n=0,1,2}$ przestrzeni probabilistycznej $(\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$?

7. Rozważmy rynek z dwoma aktywami: wolnym od ryzyka $A(0) = 10$, $R = 10\%$ oraz z ryzykownym o dynamice:

ω	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
UU	100	120	140
UD	100	120	110
DU	100	90	120
DD	100	90	80

Sprawdzić czy taki rynek jest wolny od arbitrażu. Jeżeli nie, to wskazać strategię arbitrażową.

8. Rozważmy rynek z dwoma aktywami: wolnym od ryzyka $A(0) = 10$, $R = 10\%$ oraz z ryzykownym o dynamice:

ω	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$
UU	100	120	126
UD	100	120	108
DU	100	100	110
DD	100	100	90

Sprawdzić czy taki rynek jest wolny od arbitrażu. Jeżeli nie, to wskazać strategię arbitrażową.

9. Rozważmy model dwukrokowy z dwiema akcjami, w którym:

$$\begin{aligned} A(0) &= 1, \quad A(1) = 1.1, \quad A(2) = 1.21 \\ S_1(0) &= 100, \quad S^u(1) = 132, \quad S^{uu}(2) = 96.8, \quad S^{um}(2) = 145.2, \quad S^{ud}(2) = 157.3, \\ & \quad S^d(1) = 77, \quad S^{du}(2) = 72.6, \quad S^{dd}(2) = 96.8. \\ S_2(0) &= 100, \quad S^u(1) = 110, \quad S^{uu}(2) = 169.4, \quad S^{um}(2) = 133.1, \quad S^{ud}(2) = 96.8, \\ & \quad S^d(1) = 110, \quad S^{du}(2) = 145.2, \quad S^{dd}(2) = 96.8. \end{aligned}$$

Sprawdzić czy taki rynek jest wolny od arbitrażu. Jeżeli nie, to wskazać strategię arbitrażową.