Zestaw 9 - momenty stopu.
ROZWIĄZANIA

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}, \mathbb{P})$. Wykazać, że zmienna losowa $\tau : \Omega \to \{0, 1, \ldots, N\} \cup \{\infty\}$ jest momentem stopu, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$

$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

2. Rozważmy trzykrokowy model CRR, w którym dane są dwie zmienne losowe opisane poniższą tabelką:

ω	uuu	uud	udu	udd	duu	dud	ddu	ddd
$\tau_1(\omega)$	2	2	3	3	1	1	1	1
$\tau_2(\omega)$	2	2	3	1	1	1	1	1

Sprawdzić czy τ_1, τ_2 są momentami stopu.

3. Rozważmy czterokrokowy model CRR, w którym $S(0) = 16$, $U = 100\%$, $D = -50\%$. Dla ustalonych $\alpha, \beta > 0$ zdefiniujmy zmienne losowe τ_α^-, τ_β^+ jako[1]:

$$\tau_\alpha^-(\omega) = \min\{n \in \{0, 1, \ldots, 4\} : S(n, \omega) \leq \alpha\}$$
$$\tau_\alpha^-(\omega) = \min\{n \in \{0, 1, \ldots, 4\} : S(n, \omega) \geq \beta\}$$

(a) Wyznacz τ_5^-, τ_{60}^+, a następnie wykaż, że są one momentami stopu.

(b) Czy zmienna losowa τ zdefiniowana jako

$$\tau(\omega) = \max\{n \in \{0, 1, \ldots, 4\} : S(n, \omega) = 16\}$$

jest momentem stopu?

4. Grasz w następującą grę: pierwszego dnia rzucasz dwiema kostkami. Oznaczmy przez X liczbę oczek, która wypadła na pierwszej kostce, a przez Y liczbę oczek, która wypadła na drugiej kostce. W dniu $\tau = \min(X, Y)$ otrzymujesz wypłatę w wysokości $\max(X, Y)$ PLN. Niech proces $(S(n))_{n\in\{1,2,3,\ldots,6\}}$ reprezentuje wypłaty otrzymane przez Ciebie z powyższej gry w kolejnych dniach poczynając od pierwszego.

(a) Przedstaw probabilistyczny model powyższej gry. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną i zmienne losowe X, Y. Wyznacz proces $(S(n))$.

(b) Wyznacz filtrację $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{1,\ldots,6\}}$ generowaną przez proces $(S(n))$.

(c) Czy τ jest momentem stopu względem tej filtracji?

[1] zmienne te nazywamy odpowiednio *pierwszym czasem przejścia w dół przez* α oraz *pierwszym czasem przejścia w górę przez* β. Przyjmujemy przy tym $\min\{\emptyset\} = \infty$