IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

Informatyka, Algebra
- KOLOKWIUM PIERWSZE -
29 listopada 2019

Czas: 135 min.

1. (20 pkt) Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:
   (a) (10 pkt)
   $$A = \{z \in \mathbb{C} : (\overline{z})^6 = -8z|z|\overline{z}\}$$

Niech $z = re^{i\phi}$, gdzie $r \geq 0$ oraz $\phi \in [0, 2\pi)$. Wówczas równanie określające zbiór A przyjmuje postać:

$$r^6 e^{-6i\phi} = -8r^3 \boxed{2 \text{ pkt}}$$
$$\Updownarrow$$
$$r^3(r^3 e^{-6i\phi} + 8) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$r = 0 \vee r^3 e^{-6i\phi} = 2^3 e^{-i\pi}$$
$$\Updownarrow$$
$$r = 0 \vee \begin{cases} r &= 2 \\ 6\phi &= \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Updownarrow$$
$$r = 0 \vee \begin{cases} r &= 2 \\ \phi &= \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \boxed{1 \text{ pkt}}$$

Wszystkimi pierwiastkami równania $(\overline{z})^6 = -8z|z|\overline{z}$ są

$0 \boxed{1 \text{ pkt}}, \sqrt{3}+i \boxed{1 \text{ pkt}}, -\sqrt{3}+i \boxed{1 \text{ pkt}}, -\sqrt{3}+i \boxed{1 \text{ pkt}}, -\sqrt{3}-i \boxed{1 \text{ pkt}}, 2i \boxed{1 \text{ pkt}}, -2i \boxed{1 \text{ pkt}}$

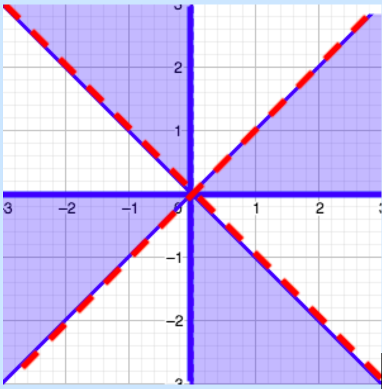
IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

(b) (4 pkt)

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg\left(z^4\right) < \pi \right\},$$

Przekształcając nierówności definiujące zbiór B oraz oznaczając $\phi = \arg z \in [0, 2\pi)$, dostajemy:

$$\begin{aligned}
\arg\left(z^4\right) < \pi &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2k\pi \le 4\phi < \pi + 2k\pi \quad \boxed{\text{1 pkt}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : k\frac{\pi}{2} \le \phi < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \phi \in [0, \frac{\pi}{4}) \cup [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi) \cup [\pi, \frac{5}{4}\pi) \cup [\frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi) \quad \boxed{\text{2 pkt}}
\end{aligned}$$



1 pkt

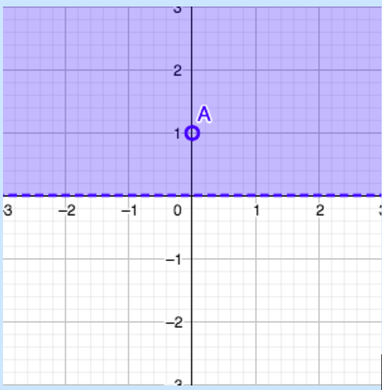
(c) (6 pkt)

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : 3 - \left| \frac{-3z - 3i}{iz + 1} \right| \le 0 \right\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $z \in C$ to $z \neq i$. $\boxed{\text{1 pkt}}$
Przekształcając nierówność definiującą zbiór B dostajemy

$$\begin{aligned}
\left| \frac{-3z - 3i}{iz + 1} \right| \ge 3 &\Leftrightarrow |-3z - 3i| \ge 3\,|iz + 1| \\
&\Leftrightarrow |z + i| \ge |iz + 1| \quad \boxed{\text{1 pkt}} \\
&\Leftrightarrow |z + i| \ge |i|\,|z - i| \\
&\Leftrightarrow |z + i| \ge |z - i| \quad \boxed{\text{1 pkt}}
\end{aligned}$$

Stąd zbiór punktów z C jest półpłaszczyzną (z wyłączeniem punktu i), której brzegiem jest symetralna odcinka między punktami $-i$ oraz i.



3 pkt

IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

2. (27 pkt) W zbiorze punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ określamy relację $\preceq$:

$$[(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)] \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)).$$

(a) (8 pkt) Wykaż, że $\preceq$ porządkuje zbiór R^2.

- Relacja $\preceq$ jest zwrotna, bo dla dowolnego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$x = x \wedge y \leq y,$$

co implikuje $(x, y) \preceq (x, y)$. $\boxed{\text{2 pkt}}$

- Relacja $\preceq$ jest antysymetryczna, bo dla dowolnych $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ prawdziwe są implikacje

$$\begin{gathered}
(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1) \\
\Downarrow \\
(x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)) \wedge (x_2 < x_1 \vee (x_2 = x_1 \wedge y_2 \leq y_1)) \\
\Downarrow \\
[(x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_1)] \vee [(x_1 < x_2) \wedge (x_2 = x_1 \wedge y_2 \leq y_1)] \\
\vee \\
[(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 < x_1)] \vee [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 = x_1 \wedge y_2 \leq y_1)] \\
\Downarrow \\
(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 = x_1 \wedge y_2 \leq y_1)
\end{gathered}$$

co implikuje $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. $\boxed{\text{3 pkt}}$

- Relacja $\preceq$ jest przechodnia, bo dla dowolnych $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ prawdziwe są implikacje

$$\begin{gathered}
(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \preceq (x_3, y_3) \\
\Downarrow \\
(x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)) \wedge (x_2 < x_3 \vee (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)) \\
\Downarrow \\
[(x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3)] \vee [(x_1 < x_2) \wedge (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)] \\
\vee \\
[(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 < x_3)] \vee [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)] \\
\Downarrow \\
x_1 < x_3 \vee (x_1 = x_3 \wedge y_1 \leq y_3)
\end{gathered}$$

co implikuje $(x_1, y_1) \preceq (x_3, y_3)$. $\boxed{\text{3 pkt}}$

(b) (3 pkt) Czy porządek zadany na $\mathbb{R}^2$ relacją $\preceq$ jest totalny?

Tak. Weźmy dowolne $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Wówczas spełniony jest dokładnie jeden z następujących przypadków:

- $x_1 < x_2$. W takiej sytuacji $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$.
- $x_2 < x_1$. W takiej sytuacji $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$.
- $x_2 = x_1 \wedge y_1 < y_2$. W takiej sytuacji $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$.
- $x_2 = x_1 \wedge y_2 < y_1$. W takiej sytuacji $(x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$.

Pokazuje to, że zachodzi alternatywa $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \vee (x_2, y_2) \preceq (x_1, y_1)$. $\boxed{\text{3 pkt}}$

IMIĘ I NAZWISKO ____ ____, numer indeksu ____

(c) (8 pkt) Zilustruj graficznie zbiory minorant i majorant oraz kresy następujących zbiorów (o ile istnieją):

$$A = \{(1,2),(1,0)\},$$
$$B = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 9\},$$

- Minoranty A: $[-\infty,1) \times \mathbb{R} \cup \{1\} \times (-\infty,0]$, $\boxed{\text{1 pkt}}$
- Majoranty A: $(1,+\infty) \times \mathbb{R} \cup \{1\} \times [2,+\infty)$, $\boxed{\text{1 pkt}}$
- $\inf A = (1,0)$ $\boxed{\text{1 pkt}}$
- $\sup A = (1,2)$ $\boxed{\text{1 pkt}}$
- Minoranty B: $(-\infty,-3] \times \mathbb{R}$, $\boxed{\text{1 pkt}}$
- Majoranty B: $[3,+\infty) \times \mathbb{R}$, $\boxed{\text{1 pkt}}$
- $\inf B$ - brak $\boxed{\text{1 pkt}}$
- $\sup B$ - brak $\boxed{\text{1 pkt}}$

(d) (8 pkt) Czy zbiory A i B mają elementy największe i najmniejsze oraz minimalne i maksymalne? Jeżeli tak: wskaż je. Jeżeli takie elementy nie istnieją, uzasadnij ten fakt.

- Ponieważ $\inf A, \sup A \in A$, więc są to równocześnie elementy odpowiednio najmniejszy i największy $\boxed{\text{2 pkt}}$, oraz (jedyne) elementy minimalne i maksymalne $\boxed{\text{2 pkt}}$.
- Ponieważ $\inf B, \sup B$, więc B nie posiada elementu najmniejszego ani elementu najmniejszego $\boxed{\text{2 pkt}}$. Ponieważ porządek jet liniowy, implikuje to również, że B nie posiada elementów maksymalnych ani minimalnych $\boxed{\text{2 pkt}}$.

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

3. (22 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

(a) (7 pkt) Dane są struktury $S_1 = ((0, +\infty), \cdot)$, $S_2 = (\mathbb{R}, +)$

I. Odwzorowanie $h : S_1 \to S_2$ zdefiniowane jako $h(x) = 5^x$ jest homomorfizmem: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ,** ponieważ

$h(x \cdot y) = 5^{xy} \wedge h(x) + h(y) = 5^x + 5^y \neq 5^{xy}$ (np. dla $(x, y) = (1, 1)$) $\boxed{\text{2 pkt}}$

II. Struktury S_1 i S_2 są izomorficzne: ■ **PRAWDA** ☐ FAŁSZ, ponieważ

Odwozorowanie $h(x) = 5^x$ jest izomorfizmem S_2 na S_1 $\boxed{\text{2 pkt}}$, gdyż:
- h jest injekcją $5^x = 5^y \Rightarrow x = y$
- h jest suriekcją, bo $h(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$
- $h(x + y) = 5^{x+y} \wedge h(x) \cdot h(y) = 5^x 5^y = 5^{x+y}$) $\boxed{\text{3 pkt}}$

(b) (2 pkt) Struktura $(G, \circ)$, gdzie $G = \{(-3)^k : k \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem $\circ$ określonym wzorem $a \circ b = \frac{a \cdot b}{3}$ jest grupą abelową: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ,** ponieważ

działanie $\circ$ nie jest wewnętrzne $\boxed{\text{1 pkt}}$, bo $(-3) \circ (-3) = -9 \notin G$ $\boxed{\text{1 pkt}}$.

(c) (2 pkt) Zbiór $A = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ,** ponieważ

Elementem neutralnym mnożenia jest 1, a więc np. dla elementu $2 \in A$ nie istnieje element odwrotny w A względem tego działania. $\boxed{\text{2 pkt}}$

(d) (2 pkt) Niech p będzie elementem zbioru X. W zbiorze 2^X określamy relację $R = (2^X, \mathrm{gr}R, 2^X)$:

$$\mathrm{gr}R = \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : p \notin A \cup B\}.$$

Relacja R jest relacją równoważności: ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ,** ponieważ

nie jest zwrotna $\boxed{\text{1 pkt}}$ (np $(X, X) \notin \mathrm{gr}R$, bo $p \in X \cup X$). $\boxed{\text{1 pkt}}$

(e) (3 pkt) Dany jest uporządkowany zbiór $(\mathbb{Q}, \leq)$ oraz podzbiór $A = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : n, m \in \{1, 2, \ldots\}\}$. Kresem dolnym tego zbioru jest $\boxed{0}$, ponieważ

Zb. majorant zb. A: $\mathbb{Q} \cap (-\infty, 0]$ $\boxed{\text{1 pkt}}$ $\wedge\ 0 \in \mathbb{Q}$ $\boxed{\text{1 pkt}}$ $\Rightarrow$ 0 jest nawiększą z majorant $\boxed{\text{1 pkt}}$

(f) (6 pkt) Na zbiorze $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ określona jest relacja równoważności R:

$$\forall x, y \in X : xRy \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x^k = y^l.$$

I. Wówczas: $[2] =$ $\boxed{\{2,4,8\}}$, oraz $[4] =$ $\boxed{\{2,4,8\}}$, ponieważ

$[2] = \{y \in X : \exists k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : 2^k = y^l\} = \{2, 4, 8\}$ $\boxed{\text{2 pkt}}$ oraz $4 \in [2] \Rightarrow [4] = [2]$ $\boxed{\text{1 pkt}}$

II. Liczba elementów zbioru $X/_R$ wynosi $\boxed{7}$, ponieważ

$X_{/R} = \{[1], [2], [3], [5], [6], [7], [10]\}$ $\boxed{\text{3 pkt}}$

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

4. (21 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

(a) (4 pkt) Postać algebraiczna liczby $\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2019}$ wynosi $\boxed{-i}$, ponieważ

$$\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2019} = \boxed{1 \text{ pkt}} \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^{2019} = \boxed{1 \text{ pkt}} \cos\frac{7403\pi}{2} + i\sin\frac{7403\pi}{2}$$
$$= \boxed{1 \text{ pkt}} \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i \boxed{1 \text{ pkt}}$$

(b) (2 pkt) Wartości pierwiastka drugiego stopnia z liczby zespolonej $-5+12i$ wynoszą

$2+3i$ $\boxed{1 \text{ pkt}}$, $-2-3i$ $\boxed{1 \text{ pkt}}$.

(c) (2 pkt) Zbiór $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ**
ponieważ

$(0,1,1), (1,0,1) \in U$ $\boxed{1 \text{ pkt}}$, ale $(0,1,1)+(1,0,1) = (1,1,2) \notin U$. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

(d) (2 pkt) Wektory $\sqrt{3}$ i 3 są liniowo niezależne w przestrzeni $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$: ☐ PRAWDA
■ **FAŁSZ**
ponieważ

$\alpha\cdot\sqrt{3} + \beta\cdot 3 = 0$ np. dla $\alpha = \sqrt{3}, \beta = -1$. $\boxed{2 \text{ pkt}}$

(e) (6 pkt) Wymiar podprzestrzeni $V = \mathrm{Lin}(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x)$ przestrzeni $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ wynosi $\boxed{2}$
, ponieważ

Wektory $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ i $\cos 2x$ są liniowo zależne (bo $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$) $\boxed{2 \text{ pkt}}$.
Z drugiej strony $\sin^2 x$ i $\cos^2 x$ są liniowo niezależne:
$(\alpha,\beta\in\mathbb{R} \wedge \forall x\in\mathbb{R} : \alpha\sin^2 x + \beta\cos^2 x = 0) \Rightarrow \alpha = 0(\text{ dla } x = \frac{\pi}{2}) \wedge \beta = 0(\text{ dla } x = 0)$ $\boxed{3 \text{ pkt}}$.
Stąd $V = \mathrm{Lin}(\sin^2 x, \cos^2 x)$ i $\dim V = 2$. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

(f) (5 pkt) Dla ustalonego $x_0\in\mathbb{R}$ zdefiniujmy podprzestrzeń wektorową V_{x_0} przestrzeni wektorowej $V = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ jako $V_{x_0} = \{f\in V : f(x_0) = 0\}$. Niech $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, $x_1\neq x_2$. Rozważmy następujące równości: I. $V = V_{x_1} + V_{x_2}$, II. $V = V_{x_1}\oplus V_{x_2}$. Wówczas:
■ **prawdziwa jest tylko równość I,**
☐ prawdziwa jest tylko równość II,
☐ prawdziwe są obie równości,
☐ każda z równości jest fałszywa,
ponieważ

$V = V_{x_1} + V_{x_2}$ gdyż dla dowolnego $f\in V$ mamy $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ $\boxed{1 \text{ pkt}}$, gdzie

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x\neq x_1, \\ 0, & \text{gdy } x = x_1 \end{cases} \in V_{x_1}, \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x), & \text{gdy } x = x_1, \\ 0, & \text{gdy } x\neq x_1 \end{cases} \in V_{x_2} \text{ bo } x_2\neq x_1 \quad \boxed{2 \text{ pkt}}$$

Z drugiej strony $V_{x_1}\cap V_{x_2}\neq\{\vec{0}\}$, bo np dla $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)$ mamy $f\in V_{x_1}\wedge f\in V_{x_2}$ $\boxed{1 \text{ pkt}}$ skąd równość II jest fałszywa $\boxed{1 \text{ pkt}}$.