IMIĘ I NAZWISKO , numer indeksu

# Informatyka, Algebra
# - KOLOKWIUM PIERWSZE -
# 29 listopada 2019

Czas: 135 min.

1. (20 pkt) Zilustruj na płaszczyźnie zespolonej zbiory:
   (a) (10 pkt)
$$A = \{z \in \mathbb{C} : (\overline{z})^6 = -8z|z|\overline{z}\}$$

IMIĘ I NAZWISKO ____ ____, numer indeksu ____

(b) (4 pkt)

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} : \arg\left(z^4\right) < \pi \right\},$$

(c) (6 pkt)

$$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : 3 - \left| \frac{-3z - 3i}{iz + 1} \right| \leq 0 \right\}.$$

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

2. (27 pkt) W zbiorze punktów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ określamy relację $\preceq$:

$$[(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)] \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \lor (x_1 = x_2 \land y_1 \leq y_2)).$$

(a) (8 pkt) Wykaż, że $\preceq$ porządkuje zbiór $R^2$.

(b) (3 pkt) Czy porządek zadany na $\mathbb{R}^2$ relacją $\preceq$ jest totalny?

IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

(c) (8 pkt) Zilustruj graficznie zbiory minorant i majorant oraz kresy następujących zbiorów (o ile istnieją):

$$A = \{(1,2),(1,0)\},$$
$$B = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 9\},$$

(d) (8 pkt) Czy zbiory A i B mają elementy największe i najmniejsze oraz minimalne i maksymalne? Jeżeli tak: wskaż je. Jeżeli takie elementy nie istnieją, uzasadnij ten fakt.

IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

3. (22 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

(a) (7 pkt) Dane są struktury $S_1 = ((0, +\infty), \cdot)$, $S_2 = (\mathbb{R}, +)$

I. Odwzorowanie $h : S_1 \to S_2$ zdefiniowane jako $h(x) = 5^x$ jest homomorfizmem: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ, ponieważ

II. Struktury $S_1$ i $S_2$ są izomorficzne: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ, ponieważ

(b) (2 pkt) Struktura $(G, \circ)$, gdzie $G = \{(-3)^k : k \in \mathbb{Z}\}$ z działaniem $\circ$ określonym wzorem $a \circ b = \frac{a \cdot b}{3}$ jest grupą abelową: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ, ponieważ

(c) (2 pkt) Zbiór $A = \{a + b\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, z działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ, ponieważ

(d) (2 pkt) Niech $p$ będzie elementem zbioru $X$. W zbiorze $2^X$ określamy relację $R = (2^X, \mathrm{gr}R, 2^X)$:

$$\mathrm{gr}R = \{(A, B) \in 2^X \times 2^X : p \notin A \cup B\}.$$

Relacja $R$ jest relacją równoważności: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ, ponieważ

(e) (3 pkt) Dany jest uporządkowany zbiór $(\mathbb{Q}, \leq)$ oraz podzbiór $A = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} : n, m \in \{1, 2, \ldots\}\}$. Kresem dolnym tego zbioru jest [ ], ponieważ

(f) (6 pkt) Na zbiorze $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$ określona jest relacja równoważności $R$:

$$\forall x, y \in X : xRy \Leftrightarrow \exists k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x^k = y^l.$$

I. Wówczas: $[2] =$ [ ], oraz $[4] =$ [ ], ponieważ

II. Liczba elementów zbioru $X/_R$ wynosi [ ], ponieważ

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

4. (21 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

   (a) (4 pkt) Postać algebraiczna liczby $\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{2019}$ wynosi ______ , ponieważ

   (b) (2 pkt) Wartości pierwiastka drugiego stopnia z liczby zespolonej $-5+12i$ wynoszą

   (c) (2 pkt) Zbiór $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = z^2\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
   ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ
   ponieważ

   (d) (2 pkt) Wektory $\sqrt{3}$ i 3 są liniowo niezależne w przestrzeni $(\mathbb{R},+,\cdot)$ nad ciałem $\mathbb{R}$: ☐ PRAWDA
   ☐ FAŁSZ
   ponieważ

   (e) (6 pkt) Wymiar podprzestrzeni $V = \mathrm{Lin}(\sin^2 x, \cos^2 x, \cos 2x)$ przestrzeni $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ wynosi ______
   , ponieważ

   (f) (5 pkt) Dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$ zdefiniujmy podprzestrzeń wektorową $V_{x_0}$ przestrzeni wektorowej $V = F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ jako $V_{x_0} = \{f \in V : f(x_0) = 0\}$. Niech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$. Rozważmy następujące równości: I. $V = V_{x_1} + V_{x_2}$, II. $V = V_{x_1} \oplus V_{x_2}$. Wówczas:
   ☐ prawdziwa jest tylko równość I,
   ☐ prawdziwa jest tylko równość II,
   ☐ prawdziwe są obie równości,
   ☐ każda z równości jest fałszywa,
   ponieważ