IMIĘ I NAZWISKO ______________ ______________, numer indeksu ______________

Informatyka, Algebra
- KOLOKWIUM DRUGIE -
22 stycznia 2019

Czas: 90 min.

1. (22 pkt) Dane są rekurencyjnie trzy ciągi:

$$\begin{cases} a_n &= 4a_{n-1} - b_{n-1} - 2c_{n-1}, \\ b_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} - 2c_{n-1}, \\ c_n &= 2a_{n-1} - b_{n-1}, \end{cases} \qquad a_0 = \frac{1}{2^{2021}-2},\ b_0 = 1,\ c_0 = \frac{1}{2^{2020}-1}.$$

Wyznacz b_{2020}.

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

2. (23 pkt) W zależności od parametru rzeczywistego p rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (p+1)x - y - pz & = 2p \\ x + py + 2pz & = 1 \\ x + pz & = 1 \\ px + y & = 1 \end{cases}$$

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

3. (20 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

(a) (7 pkt) Dany jest stożek, którego podstawa zawiera się w płaszczyźnie $\pi : -12x + 2y + 3z - 10 = 0$. Wierzchołkiem stożka jest punkt $W = (12, -3, 1)$. Ponadto wiadomo, że punkt $B = (2, 2, 10)$ leży na brzegu podstawy rozważanego stożka. Wówczas

I. Równanie kierunkowe prostej l będącej osią symetrii stożka to ______, ponieważ

II. Środkiem podstawy stożka jest punkt S o współrzędnych ______, ponieważ

III. Długość promienia podstawy stożka wynosi ______, ponieważ

(b) (2 pkt) Jeżeli macierz kwadratowa A spełnia równość $AA^T = I$ to $A^T A = I$: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ , ponieważ

(c) (2 pkt) Jeżeli macierz A wymiaru $n \times n$ (gdzie $n \in \{1, 2, \ldots\}$) jest diagonalizowalna, to jej wielomian charakterystyczny ma n różnych pierwiastków: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ , ponieważ

(d) (3 pkt) Jeżeli A jest macierzą spełniającą $I + A = 2A^2 + 3A^3$, to A^{-1} jest równa ______, ponieważ

(e) (6 pkt) Zbiór wszystkich wartości rzeczywistych parametru p, dla których wymiar przestrzeni

$$Lin\{(p, p, 3, 4); (1, 1, 1, 1); (p, 2, p, 2)\}$$

jest największy, wynosi ______, ponieważ

IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

4. (20 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

(a) (2 pkt) Odwzorowanie $L : C(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ zdefiniowane jako $(Lf)(x) = \cos f(x)$, jest odwzorowaniem liniowym: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ , ponieważ

(b) (9 pkt) Niech $f : U \to V$ będzie odwzorwaniem liniowym, gdzie U i V są pewnymi przestrzeniami wektorowymi z bazami odpowiednio B_U, B_V. Wiadomo, że macierz odwzorowania f w tych bazach jest równa

$$M_f(B_U, B_V) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ -4 & 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Wówczas:

I. f jest endomorfizmem: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ , ponieważ

II. Wymiar jądra odwzorowania f wynosi ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 , ponieważ

III. Jeżeli B'_V jest bazą przestrzeni V powstałą z bazy B_V przez wymnożenie każdego wektora z tej bazy przez -2 (przy zachowaniu kolejności tych wektorów), to drugi wiersz macierzy $M_f(B_U, B'_V)$ wynosi [ ] , ponieważ

(c) (9 pkt) Dane są proste o równaniach:

$$l_1 : \begin{cases} x &= 1 + 5t, \\ y &= -1 - 2t, \\ z &= t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_2 : \begin{cases} x &= 1 + 3t, \\ y &= -2 + 2t, \\ z &= \sqrt{3}t, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}); \qquad l_3 : \begin{cases} x &= 1, \\ y &= -1 + t, \\ z &= 0, \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Wówczas:

I. Proste l_1 i l_2 są współpłaszczyznowe: ☐ PRAWDA ☐ FAŁSZ , ponieważ

II. Równanie ogólne wspólnej płaszczyzny prostych l_1 i l_3 to [ ] , ponieważ

III. Miara kąta pomiędzy prostą l_2 a l_3 wynosi [ ] , ponieważ