IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

WMS, DMRF
- KOLOKWIUM I -
29 listopada 2019

Czas: 135 min.

1. (16 pkt) Dany jest model jednokrokowy trójmianowy z jedną akcją, w którym $S(0) = 100$, $A(0) = 100$ oraz

$$S^u = 120,\ S^m = 110,\ S^d = 85,\ A(1) = 110.$$

(a) (4 pkt) Znaleźć ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych w tym modelu.

Wektor (q_1, q_2, q_3) będzie wektorem prawdopodobieństw martyngałowych wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony będzie następujący układ

$$\boxed{1\text{ pkt}}\begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_u + q_m + q_d = 1 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(K_S) = R \end{cases} \iff \boxed{1\text{ pkt}}\begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_u + q_m + q_d = 1 \\ 20q_u + 10q_m - 15q_d = 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_u + q_m + q_d = 1 \\ 4q_u + 2q_m - 3q_d = 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_d = 1 - q_u - q_m \\ 7q_u + 5q_m = 5 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{1\text{ pkt}}\begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_m = 1 - \frac{7}{5}q_u \\ q_d = \frac{2}{5}q_u \end{cases}$$

$$\iff \boxed{1\text{ pkt}}\begin{cases} q_u \in (0, \frac{5}{7}) \\ q_m = 1 - \frac{7}{5}q_u \\ q_d = \frac{2}{5}q_u \end{cases}$$

Odpowiedź Wektor prawdopodobieństw martyngałowych ma postać $\left(q, 1 - \frac{7}{5}q, \frac{2}{5}q\right)$, gdzie $q \in (0, \frac{5}{7})$.

(b) (4 pkt) Wyznaczyć przedział bezarbitrażowy dla instrumentu pochodnego H o wypłacie zadanej przez wektor (H^u, H^m, H^d).

Korzystając z definicji, wyznaczymy przedział I_H:

$$\begin{aligned} I_H &= \left\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{H}(1)) : \mathbb{Q} \text{ jest miarą martyngałową}\right\} \boxed{1\text{ pkt}} \\ &= \left\{\frac{1}{1+R}(q_u H^u + q_m H^m + q_d H^d) : q_u \in (0, \frac{5}{7}), q_m = 1 - \frac{7}{5}q_u, q_d = \frac{2}{5}q_u\right\} \boxed{1\text{ pkt}} \\ &= \left\{\frac{1}{1.1}(q_u(H^u - \frac{7}{5}H^m + \frac{2}{5}H^d) + H^m) : q_u \in (0, \frac{5}{7})\right\} \boxed{1\text{ pkt}} \\ &= \left(\min\left(\frac{10}{11}H^m, \frac{50}{77}H^u + \frac{20}{77}H^d\right), \max\left(\frac{10}{11}H^m, \frac{50}{77}H^u + \frac{20}{77}H^d\right)\right) \boxed{1\text{ pkt}} \end{aligned}$$

Odpowiedź $I_H = (a, b)$, gdzie $a = \min\left(\frac{10}{11}H^m, \frac{50}{77}H^u + \frac{20}{77}H^d\right)$ i $b = \max\left(\frac{10}{11}H^m, \frac{50}{77}H^u + \frac{20}{77}H^d\right)$.

IMIĘ I NAZWISKO | | , numer indeksu | |

(c) (2 pkt) Pokazać, że dowolny osiągalny instrument pochodny w tym modelu musi spełniać zależność

$$5H^u - 7H^m + 2H^d = 0.$$

Korzystając z porzedniego podpunktu i postaci przedziału I_H widzimy, że przedział I_H jest jednoelementowy (co jest WKW na to, aby H było osiąglane), wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$H^u - \frac{7}{5}H^m + \frac{2}{5}H^d = 0 \Leftrightarrow 5H^u - 7H^m + 2H^d = 0.$$

(d) (2 pkt) Wiadomo, że dla pewnego instrumentu osiągalnego H wypłata w scenariuszu m wynosi $H^m = 4$. Znaleźć uczciwą cenę $H(0)$.

Korzystając z postaci przedziału I_H oraz warunku wyznaczonego w poprzednim podpunkcie, mamy, że dla instrumentu osiągalnego jego cena (będąca jedynym elementem przedziału domniętego $\overline{I_H}$ $\boxed{\text{1 pkt}}$) wynosi:

$$H(0) = \frac{1}{1.1}H^m = \frac{40}{11}\boxed{\text{1 pkt}}$$

Odpowiedź $H(0) = \frac{40}{11}$.

(e) (4 pkt) Znaleźć wszystkie możliwe wartości K, dla których opcja put z ceną wykonania K jest w tym modelu osiągalna.

Rozważmy następujące przypadki:

- $K \in (0, 85]$. Wówczas:

$$5P^u - 7P^m + 2P^d = 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Na mocy podpunktu c) opcja ta jest więc osiągalna w tym modelu. $\boxed{\text{1 pkt}}$

- $K \in (85, 110]$. Wówczas:

$$5P^u - 7P^m + 2P^d = 5 \cdot 0 - 7 \cdot 0 + 2 \cdot (K - 85) \neq 0.$$

Na mocy podpunktu c) opcja ta nie jest więc osiągalna w tym modelu. $\boxed{\text{1 pkt}}$

- $K \in (110, 120]$. Wówczas:

$$5P^u - 7P^m + 2P^d = 5 \cdot 0 - 7 \cdot (K - 110) + 2 \cdot (K - 85) = -5K + 600 = 5(120 - K) = 0 \Leftrightarrow K = 120.$$

Na mocy podpunktu c) opcja ta jest więc osiągalna w tym modelu o ile $K = 120$. $\boxed{\text{1 pkt}}$

- $K \in (120, +\infty)$. Wówczas:

$$5P^u - 7P^m + 2P^d = 5 \cdot (K - 120) - 7 \cdot (K - 110) + 2 \cdot (K - 85) = 0.$$

Na mocy podpunktu c) opcja ta jest więc osiągalna w tym modelu. $\boxed{\text{1 pkt}}$

Odpowiedź Opcja put będzie osiąglana w tym modelu o ile $K \in (0, 85] \cup [120, +\infty)$.

IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

2. (14 pkt) W chwili $t = 0$ inwestor zgłosił funduszowi hedgingowemu chęć zakupu pakietu opcji na akcję S spółki $KGHM$: na pakiet ten miałyby się składać dwie europejskie opcje put z ceną wykonania równą $K_1 = 200$ o terminie zapadalności $T = 1$ oraz trzy europejskie opcje call typu Asset-Or-Nothing o wypłacie

$$H(T) = \begin{cases} S(T), & \text{gdy } S(T) > K \\ \frac{1}{2}S(T), & \text{gdy } S(T) = K \\ 0, & \text{gdy } S(T) < K \end{cases}$$

z ceną wykonania $K = 210$ i tym samym terminem zapadalności $T = 1$. Analitycy funduszu zakładają, że właściwym modelem rynku jest model jednokrokowy dwumianowy, w którym $S(0) = 200$, $U = 20\%$, $D = -10\%$, $A(0) = 100$, $R = 5\%$.

(a) (4 pkt) Opisz na czym polega ryzyko funduszu w przypadku wystawienia takiego pakietu opcji.

W przypadku wystawienia takiego pakietu opcji, w chwili $T = 1$ fundusz musi zapłacić wystawcy opcji:

$$2P(1) + 3H(1) = 2(200 - S(1))\mathbb{1}_{\{S(1)<200\}} + 3S(T)\mathbb{1}_{\{S(1)>210\}} + \frac{3}{2}\mathbb{1}_{\{S(1)=210\}}. \boxed{2 \text{ pkt}}$$

W przypadku gdy $S(1) < 200$ lub $S(1) \geq 2100$ funudsz musi więc wypłacić nabywcy pakietu należną wypłatę, której wysokość jest w chwili 0 nieznana. $\boxed{2 \text{ pkt}}$

(b) (6 pkt) Wykorzystując przyjęty przez fundusz model rynku, wyznacz uczciwą cenę, którą fundusz mógłby zaproponować inwestorowi zainteresowanemu zakupem podanego pakietu opcji.

Z uwagi na kolejny podpunkt wycenę przeprowadzimy metodą replikacji. Zauważmy, że wypłata z podanego pakietu opcji w chwili $T = 1$ wynosi

$$2P(1) + 3H(1) = \begin{cases} 720, & \text{w scenariuszu } u \\ 40, & \text{w scenariuszu } d \end{cases}. \boxed{2 \text{ pkt}}$$

Stąd układ równań na portfel replikujący (x, y) dany jest jako

$$\begin{cases} 240x + 105y &= 720, \\ 180x + 105y &= 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{34}{3}, \\ y &= -\frac{400}{21} \end{cases} \boxed{2 \text{ pkt}}$$

Stąd uczciwa cena pakietu w chwili 0 wynosi

$$V_{(x,y)}(0) = \frac{34}{3} \cdot 200 - \frac{400}{21} \cdot 100 = \frac{7600}{21}. \boxed{2 \text{ pkt}}$$

Odpowiedź Uczciwa cena za pakiet opcji wynosi $\frac{7600}{21}$.

(c) (4 pkt) Zakładając, że fundusz decyduje się na wystawienie podanego pakietu opcji chętnemu inwestorowi, dokładnie opisz jaką strategię powinien przyjąć fundusz, żeby osłonić się przed ryzykiem związanym z tą transakcją.

Za pieniądze uzyskane ze sprzedaży opcji funudsz powinien zakupić portfel replikujący, którego sprzedaż w chwili 1 pozwoli pokryć koszty wypłaty nabywcy opcji należnych mu pieniędzy $\boxed{2 \text{ pkt}}$. W takim razie

- W chwili $t = 0$ fundusz powinien zakupić $\frac{34}{3}$ akcji KGHM oraz pożyczyć $\frac{400}{21}$ jednostek waloru wolnego od ryzyka. $\boxed{1 \text{ pkt}}$
- W chwili $t = 1$ fundusz powinien sprzedać $\frac{34}{3}$ akcji KGHM oraz oddać $\frac{400}{21}$ jednostek waloru wolnego od ryzyka. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

IMIĘ I NAZWISKO ____________ ____________, numer indeksu ____________

3. (18 pkt) Dany jest model trójmianowy z dwoma akcjami. Załóżmy, że stopa wolna od ryzyka wynosi $R = 10\%$, natomiast zwroty na giełdzie w kolejnych scenariuszach u, m, d wynoszą odpowiednio $-a\%, 0\%, 4a\%$ dla pierwszej akcji oraz $b\%, 5\%, 6b\%$ dla drugiej akcji. Znaleźć wszystkie możliwe wartości a i b, dla których model ten jest wolny od arbitrażu, ale nie jest zupełny.

I i II Twierdzenie Fudamentalne implikują, że model ten będzie wolny od arbitrażu, ale niezupełny wtedy i tylko wtedy, gdy w modelu będzie istniała niejednoznacznie wyznaczona miara martyngałowa. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

Wektor (q_1, q_2, q_3) będzie wektorem prawdopodobieństw martyngałowych wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_u + q_m + q_d = 1 \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(K_{S_1}) = R \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(K_{S_2}) = R \end{cases} \iff \boxed{1 \text{ pkt}} \begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_u + q_m + q_d = 1 \\ -aq_u + 4aq_d = 10 \\ bq_u + 5q_m + 6bq_d = 10 \end{cases}$$

Powyższy układ, z uwagi na parametry, najlepiej rozwiązać metodą wyznaczników. Mamy:

$$\boxed{1 \text{ pkt}} W_G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -a & 0 & 4a \\ b & 5 & 6b \end{vmatrix} = a(10b - 25)$$

Rozważmy cztery przypadki:

- $a \neq 0 \wedge b \neq 2.5$. Wówczas $W_G \neq 0$, a więc układ będzie miał co najwyżej jedno rozwiązanie, skąd model (o ile będzie wolny od arbitrażu) będzie na pewno zupełny. Ten przypadek odrzucamy. $\boxed{2 \text{ pkt}}$
- $a = 0$.Wówczas drugie równanie układu jest sprzeczne $(0 = 10)$ $\boxed{2 \text{ pkt}}$. W takim razie model nie będzie wolny od arbitrażu - ten przypadek również odrzucamy. $\boxed{2 \text{ pkt}}$
- $b = 2.5 \wedge a \neq 5$. Wyliczając wyznacznik W_u dostajemy:

  $$\boxed{1 \text{ pkt}} W_u = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 4a \\ 10 & 5 & 15 \end{vmatrix} = 20(a - 5)$$

  Widzimy więc, że w tym przypadku układ nie ma rozwiązania z uwagi na to, że $W_G = 0$ oraz $W_u \neq 0$. W takim razie model nie będzie wolny od arbitrażu - ten przypadek również odrzucamy. $\boxed{2 \text{ pkt}}$
- $b = 2.5 \wedge a = 5$. Wówczas rozwiązując układ (np. metodą Gaussa) otrzymujemy:

  $$\begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_u + q_m + q_d = 1 \\ -5q_u + 20q_d = 10 \\ 2.5q_u + 5q_m + 15q_d = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{3 \text{ pkt}} \begin{cases} q_u, q_m, q_d > 0 \\ q_u = \lambda \\ q_m = \frac{2-5\lambda}{4} \\ q_d = \frac{2+\lambda}{4} \end{cases}$$

  $$\Leftrightarrow \boxed{2 \text{ pkt}} \begin{cases} q_u = \lambda \\ q_m = \frac{2-5\lambda}{4} \\ q_d = \frac{2+\lambda}{4} \end{cases}, \lambda \in (0, \frac{2}{5}).$$

  Widzimy więc, że dla tych wartości paramterów istnieje nieskończenie wiele miar martyngałowych. $\boxed{1 \text{ pkt}}$

Odpowiedź $a = 5 \wedge b = 2.5$

IMIĘ I NAZWISKO [ ] [ ], numer indeksu [ ]

4. (20 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

Dany jest model n-mianowy z jedną akcją S i instrumentem wolnym od ryzyka A. Cena akcji w chwili 0 jest równa $S(0) = 100$, natomiast w chwili 1 może przyjąć jedną z n wartości: $S^{\omega_1}, S^{\omega_2}, \ldots, S^{\omega_n}$ (odpowiednio w scenariuszu $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$), przy czym $S^{\omega_1} > S^{\omega_2} > \ldots > S^{\omega_n}$. Stopa wolna od ryzyka wynosi $R = 10\%$, natomiast wartość jednej jednostki walory wolnego od ryzyka w chwili 0 jest równa $A(0) = 10$.
Analityk przeprowadzał wycenę pewnej opcji H w tym modelu. W wyniku swoich obliczeń uzyskał następujące rezultaty:

- portfel subreplikujący (dający cenę subreplikacji) tej opcji dany jest jako $(x_{sub}, y_{sub}) = (1.7, -10)$,
- portfel superreplikujący (dający cenę superreplikacji) tej opcji dany jest jako $(x_{super}, y_{super}) = (2, -12)$,

Zakładając, że obliczenia przeprowadzone przez analityka są poprawne, odpowiedz na poniższe pytania.

(a) (4 pkt) Przedział bezarbitrażowy dla opcji H jest równy: (70, 80) , ponieważ

$H^{sub} = x_{sub}S(0) + y_{sub}A(0) = 70$ 2 pkt, $H^{super} = x_{super}S(0) + y_{super}A(0) = 80.$ 2 pkt

(b) (2 pkt) Zbiór wszystkich wartości rynkowych cen instrumentu H, po których nie opłaca się kupować opcji H wynosi $[80, +\infty)$, ponieważ

Opcja jest za droga, wtedy i tylko wtedy, gdy jej cena jest większa od wszystkich cen z przedziału bezarbitrażowego. 2 pkt

(c) (2 pkt) Podany model rynku podstawowego (tj. złożonego z akcji i waloru wolnego od ryzyka) będzie wolny od arbitrażu wtedy i tylko wtedy gdy parametry modelu będą spełniać $S^{\omega_1} > 110 > S^{\omega_n}$, ponieważ

WKW na brak arbitrażu w takim modelu jest: $K_S^{\omega_1} > R > K_S^{\omega_n}$. 2 pkt

(d) (2 pkt) Podany model rynku jest zupełny ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

Instrumentu H nie da się w nim zreplikować (przedział bezarbitrażowy nie jest jednoelementowy). 2 pkt

Przypuśćmy, że na rynku jest możliwość kupienia opcji H (co najwyżej 10 sztuk) w cenie $H(0) = 65$. Wówczas:

(e) (2 pkt) Na rynku jest możliwość arbitrażu, ponieważ

Cena rynkowa nie należy do wyznaczonego wcześniej przedziału arbitrażowego. 2 pkt

(f) (4 pkt) Zakładając, że na rynku nie ma możliwości handlu ułamkowymi częściami dostępnych walorów, strategia arbitrażowa w chwili 0 polega na:

- Zakupie dziesięciu opcji H za 650. 1 pkt
- Krótkiej sprzedaży 17 akcji S za 1700. 1 pkt
- Zakupie 105 jednostek waloru wolnego od ryzyka za 1050. 2 pkt

(g) (4 pkt) Zysk arbitrażowy w chwili 1 z opisanej powyżej strategii wynosi co najmniej 55 , ponieważ

Zysk na chwilę jeden jest równy:

1 pkt $10H(1) - 17S(1) + 105A(1) =$ 1 pkt $10(H(1) - V_{(x_{sub}, y_{sub})}) + 5A(1) \geq$ 1 pkt $5A(1)$

$= 5A(0)(1 + R) =$ 1 pkt 55