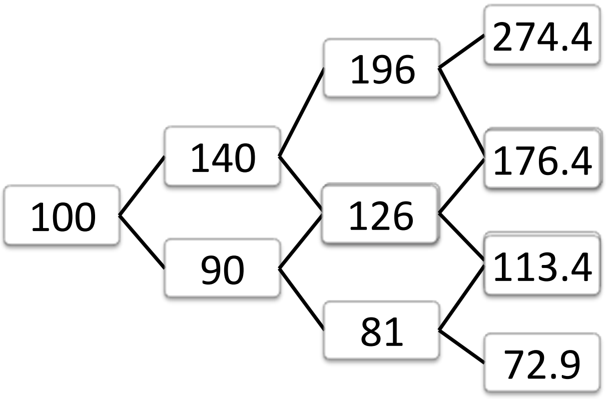
IMIĘ I NAZWISKO ________ ________, numer indeksu ________

WMS, DMRF
- KOLOKWIUM II -
24 stycznie 2020

Czas: 135 min.

1. (22 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

Rozważmy model trzykrokowy CRR, w którym $A(0) = 10$, $A(1) = 12$, $A(2) = 14.4$, $A(3) = 17.28$, natomiast proces cen akcji S dany jest drzewem dwumianowym (a):



(a) ceny akcji S

(a) (2 pkt) Strategia $(x(n), y(n))$ zdefiniowana jako

$$x(1) = 1,\ y(1) = 10,\ x(3) = x(2) = \begin{cases} 2, & \text{dla } \omega \in B_u, \\ -2, & \text{dla } \omega \in B_d \end{cases},\ y(3) = y(2) = \begin{cases} -10, & \text{dla } \omega \in B_u, \\ 40, & \text{dla } \omega \in B_d \end{cases}.$$

jest strategią samofinasującą ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ**, ponieważ

$$\begin{cases} V^d_{(x,y)}(1) & = 1 \cdot 90 + 10 \cdot 12 = 210 \\ x^d(2)S^d(1) + y^d(2)A(1) & = (-2) \cdot 90 + 4 \cdot 12 = 300 \neq 210 \end{cases} \boxed{2 \text{ pkt}}.$$

W powyższym modelu dane są dwie opcje zapadające w chwili $N = 3$: europejska opcja sprzedaży Y oraz europejska opcja kupna Z, obie o cenie wykonania K.

(b) (4 pkt) Wartość K, dla którego uczciwa cena opcji Y w chwili 0 jest równa uczciwej cenie opcji Z w chwili 0 wynosi $\boxed{172.8}$, ponieważ

$$0 = Z(0) - Y(0) = S(0) - \frac{K}{(1+R)^3} \Rightarrow K = 100 \cdot 1.2^3 = 172.8. \boxed{4 \text{ pkt}}$$

(c) (4 pkt) Przypuśćmy, że $K = 100$. Wartości $x_Y(3)$ oraz $y_Y(3)$ strategii replikującej wypłatę z opcji Y wynoszą

$$x_Y(3) = \boxed{\begin{cases} 0, & \text{dla } \omega \in B_u \cup B_{du}, \\ -0.67, & \text{dla } \omega \in B_{dd} \end{cases}},\quad y_Y(3) = \boxed{\begin{cases} 0, & \text{dla } \omega \in B_u \cup B_{du}, \\ 4.39, & \text{dla } \omega \in B_{dd} \end{cases}}$$

ponieważ

$$\omega \in B_u \Rightarrow V(3) = Y(3) = 0 \Rightarrow x(3) = y(3) = 0 \boxed{2 \text{ pkt}}$$

$$\omega \in B_{dd} \Rightarrow V(3) = Y(3) = \begin{cases} 0, & \omega = ddu \\ 27.1, & \omega = ddd \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 113.4x(3) + 17.28y(3) = 0 \\ 72.9x(3) + 17.28y(3) = 27.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(3) = -0.67, \\ y(3) = 4.39, \end{cases} \boxed{2 \text{ pkt}}$$

IMIĘ I NAZWISKO | | |, numer indeksu | |

W powyższym modelu rozważmy zmienną losową τ zdefiniowaną jako

ω	uuu	uud	udu	udd	duu	dud	ddu	ddd
$\tau(\omega)$	3	2	3	2	1	1	1	1

(d) (2 pkt) Zmienna losowa τ jest momentem stopu ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

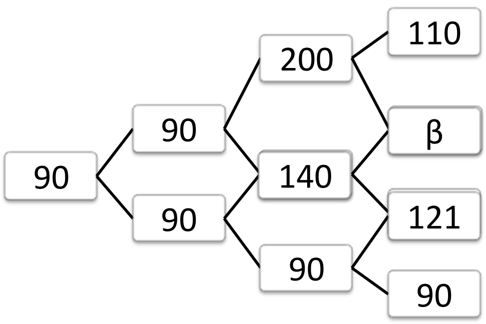
$\{\omega : \tau(\omega) = 2\} = \{uud, udd\} \notin \mathcal{F}_2$ 2 pkt

(e) (2 pkt) Wartość $\mathbb{Q}(\tau = 3)$, gdzie $\mathbb{Q}$ jest miarą martyngałową w tym modelu, wynosi $\frac{9}{25}$, ponieważ

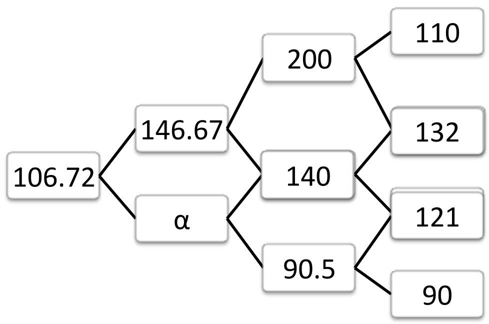
$\{\tau = 3\} = \{uuu, udu\}$
$q = \frac{20\%+10\%}{40\%+10\%} = \frac{3}{5}$

$\mathbb{Q}(\{uuu, udu\}) = q^3 + q^2(1-q) = q^2 = \frac{9}{25}$ 2 pkt

W rozważanym modelu dana jest również opcja amerykańska H o wypłatach danych poniżej drzewem (a). Proces uczciwych cen tej opcji zaznaczony został na drzewie (b).



(a) wypłaty z opcji H



(b) uczciwe ceny H

(f) (2 pkt) Wartość α (zob. drzewo (c)), z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku, jest równa 100.17 , ponieważ

$\alpha = \max(90, \frac{1}{1+R}(q \cdot 140 + (1-q) \cdot 90.5) \max(90, 100.17) = 100.17$ 2 pkt

(g) (2 pkt) Wartość β (zob. drzewo (b)), z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku, jest równa 132 , ponieważ

$I_H(N) = H(N) \wedge N = 3$ 2 pkt

(h) (2 pkt) Niech τ_H będzie optymalny momentem wykonania opcji H. Wówczas $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{I}_H)$ wynosi 106.72 , ponieważ

$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{I}_H) = H(0).$ 2 pkt

(i) (2 pkt) Optymalny moment wykonania opcji H dany jest jako

$$\tau_H(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{dla } \omega \in B_{uu} \cup B_{ud} \cup B_{du} \\ 3, & \text{dla } \omega \in B_{ddu} \cup B_{ddd} \end{cases}$$ 2 pkt

IMIĘ I NAZWISKO ______ ______, numer indeksu ______

2. (10 pkt) Rozważmy europejski instrument pochodny o następującej funkcji wypłaty

$$H(T) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S(T) \leq K, \\ S(T) - K - A, & \text{gdy } K < S(T). \end{cases}$$

Wyznacz wartość A (<u>z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku</u>) tak aby cena tego instrumentu w chwili 0 wynosiła 0 przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi $S(0) = 100$,
- $U = 25\%$, $D = -15\%$,
- jeden okres = 3 miesiące,
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (per annum),

jeżeli wiadomo, że

- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy,
- cena wykonania opcji wynosi $K = 100$.

Ceny akcji: $\boxed{1 \text{ pkt}}$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 195.3125 \\
 & & 156.25 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 125 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 132.8125 \\
S(0)=100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 106.25 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 90 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 90.3125 \\
 & & 81 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & 72.9
\end{tikzcd}$$

Wypłata z opcji $\boxed{2 \text{ pkt}}$

$$D(3) = \begin{cases} 95.3125 - A \\ 32.8125 - A \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

Stopa procentowa w jednym okresie $\boxed{1 \text{ pkt}}$

$$R = \frac{8\%}{4} = 2\%.$$

Prawdopodobieństwo martyngałowe: $\boxed{1 \text{ pkt}}$

$$q = \frac{R - D}{U - D} = \frac{17}{40},$$

Stąd cena opcji w chwili 0 jest równa

$$\begin{aligned} D(0) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{D}(3)) \boxed{1 \text{ pkt}} \\ &= \frac{1}{(1+R)^3}\left((95.3125 - A)q^3 + (32.8125 - A) \cdot 3 \cdot q^2(1-q)\right) \boxed{2 \text{ pkt}} \end{aligned}$$

Przyrównując $D(0) = 0$ dostajemy

$$A \approx 45.1672. \boxed{2 \text{ pkt}}$$

Odpowiedź $A \approx 45.1672.$

IMIĘ I NAZWISKO ____ ____, numer indeksu ____

3. (13 pkt) Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

ω	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$	$\mathbb{P}(\{\omega\})$
ω_1	100	102	105	140	$\frac{1}{10}$
ω_2	100	102	105	110	$\frac{1}{10}$
ω_3	100	102	100	120	$\frac{1}{30}$
ω_4	100	102	100	90	$\frac{1}{10}$
ω_5	100	90	105	90	$\frac{1}{5}$
ω_6	100	90	105	110	$\frac{1}{15}$
ω_7	100	90	85	80	$\frac{1}{5}$
ω_8	100	90	85	60	$\frac{1}{5}$

(a) (2 pkt) $\mathbb{E}(S(3)|S(1) = 90)$ wynosi

80

ponieważ

$$\mathbb{E}(S(3)|S(1) = 90) = \frac{\mathbb{E}(S(3)\mathbb{1}_{S(1)=90})}{\mathbb{P}(S(1) = 90)} \boxed{1 \text{ pkt}} = \frac{\frac{1}{5}\cdot 90 + \frac{1}{15}\cdot 110 + \frac{1}{5}\cdot 80 + \frac{1}{5}\cdot 60}{\frac{2}{3}} = 80 \boxed{1 \text{ pkt}}.$$

Niech $\mathcal{P}_2$ będzie podziałem zbioru $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$ generowanym przez $(S(0), S(1), S(2))$ oraz $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{P}_2)$.

(b) (3 pkt) Zbiór $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_7, \omega_8\}$ należy do $\mathcal{F}_2$ ■ **PRAWDA** ☐ FAŁSZ , ponieważ

$$A = \{\omega : (S(1)(\omega) = 102 \wedge S(2)(\omega) = 105) \vee (S(1)(\omega) = 90 \wedge S(2)(\omega) = 85)\} \boxed{1 \text{ pkt}}$$
$$= \big([S(1)]^{-1}(102) \cap [S(2)]^{-1}(105)\big) \cup \big([S(1)]^{-1}(90) \cap [S(2)]^{-1}(85)\big) \boxed{1 \text{ pkt}} \in \sigma(S(0), S(1), S(2)) \boxed{1 \text{ pkt}}$$

(c) (5 pkt) $\mathbb{E}(S(3)|\mathcal{F}_2)$ wynosi

$$\mathbb{E}(S(3)|\mathcal{F}_2)(\omega) = \begin{cases} 125, & \text{gdy } \omega \in \{\omega_1, \omega_2\} \\ 97.5, & \text{gdy } \omega \in \{\omega_3, \omega_4\} \\ 95, & \text{gdy } \omega \in \{\omega_5, \omega_6\} \\ 70, & \text{gdy } \omega \in \{\omega_7, \omega_8\} \end{cases}$$

ponieważ

Zauważmy, że $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(B_{uu}, B_{ud}, B_{du}, B_{dd}\}$, gdzie $B_{uu} = \{\omega_1, \omega_2\}, B_{ud} = \{\omega_3, \omega_4\}, B_{du} = \{\omega_5, \omega_6\}, B_{dd} = \{\omega_7, \omega_8\}$. $\boxed{1 \text{ pkt}}$ Mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S(3)|\mathcal{F}_2)(\omega) &= \boxed{1 \text{ pkt}} \frac{\mathbb{E}(S(3)\cdot \mathbb{1}_{B_{uu}})}{\mathbb{P}(B_{uu})}\mathbb{1}_{B_{uu}}(\omega) + \frac{\mathbb{E}(S(3)\cdot \mathbb{1}_{B_{ud}})}{\mathbb{P}(B_{ud})}\mathbb{1}_{B_{ud}}(\omega) \\ &+ \frac{\mathbb{E}(S(3)\cdot \mathbb{1}_{B_{du}})}{\mathbb{P}(B_{du})}\mathbb{1}_{B_{du}}(\omega) + \frac{\mathbb{E}(S(3)\cdot \mathbb{1}_{B_{dd}})}{\mathbb{P}(B_{dd})}\mathbb{1}_{B_{dd}}(\omega) \\ &= \boxed{1 \text{ pkt}} (140\cdot(\frac{1}{2}) + 110\cdot(\frac{1}{2}))\mathbb{1}_{B_{uu}}(\omega) + (120\cdot(\frac{1}{4}) + 90\cdot(\frac{3}{4}))\mathbb{1}_{B_{ud}}(\omega) \\ &+ \quad (90\cdot(\frac{3}{4}) + 110\cdot(\frac{1}{4}))\mathbb{1}_{B_{du}}(\omega) + (80\cdot(\frac{1}{2}) + 60\cdot(\frac{1}{2}))\mathbb{1}_{B_{dd}}(\omega) \\ &= \boxed{2 \text{ pkt}} \begin{cases} 125, & \text{gdy } \omega \in \{\omega_1, \omega_2\} \\ 97.5, & \text{gdy } \omega \in \{\omega_3, \omega_4\} \\ 95, & \text{gdy } \omega \in \{\omega_5, \omega_6\} \\ 70, & \text{gdy } \omega \in \{\omega_7, \omega_8\} \end{cases} \end{aligned}$$

(d) (3 pkt) Proces S jest martyngałem względem filtracji generowanej przez samego siebie ☐ PRAWDA ■ **FAŁSZ** , ponieważ

$$\mathbb{E}(S(3)|\mathcal{F}_2) \neq S(2) \boxed{2 \text{ pkt}}$$