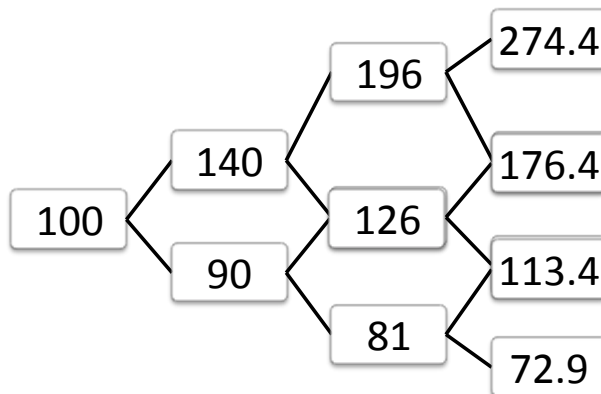


**WMS, DMRF**  
**- KOŁOKWIUM II -**  
**24 stycznia 2020**

Czas: 135 min.

1. (22 pkt) *Uzupełnij puste pola/zaznacz właściwą odpowiedź. UWAGA! Zaznaczenie właściwej odpowiedzi bez podania - przynajmniej częściowo dobrego - uzasadnienia nie jest punktowane!*

Rozważmy model trzykrokowy CRR, w którym  $A(0) = 10$ ,  $A(1) = 12$ ,  $A(2) = 14.4$ ,  $A(3) = 17.28$ , natomiast proces cen akcji  $S$  dany jest drzewem dwumianowym (a):



(a) ceny akcji  $S$

- (a) (2 pkt) Strategia  $(x(n), y(n))$  zdefiniowana jako

$$x(1) = 1, y(1) = 10, x(3) = x(2) = \begin{cases} 2, & \text{dla } \omega \in B_u, \\ -2, & \text{dla } \omega \in B_d \end{cases}, y(3) = y(2) = \begin{cases} -10, & \text{dla } \omega \in B_u, \\ 40, & \text{dla } \omega \in B_d \end{cases}.$$

jest strategią samofinansującą  PRAWDA  FAŁSZ, ponieważ

W powyższym modelu dane są dwie opcje zapadające w chwili  $N = 3$ : europejska opcja sprzedaży  $Y$  oraz europejska opcja kupna  $Z$ , obie o cenie wykonania  $K$ .

- (b) (4 pkt) Wartość  $K$ , dla którego ucziwa cena opcji  $Y$  w chwili 0 jest równa uczciwej cenie opcji  $Z$  w chwili 0 wynosi , ponieważ

- (c) (4 pkt) Przypuśćmy, że  $K = 100$ . Wartości  $x_Y(3)$  oraz  $y_Y(3)$  strategii replikującej wypłatę z opcji  $Y$  wynoszą

$$x_Y(3) = \input{text}, \quad y_Y(3) = \input{text}$$

ponieważ

IMIĘ I NAZWISKO  , numer indeksu

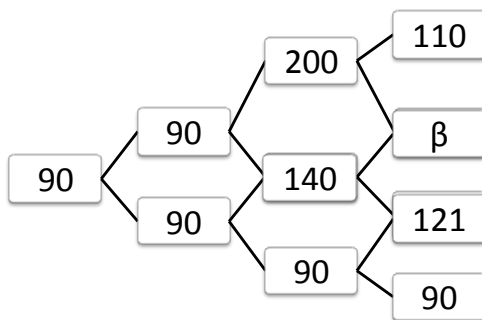
W powyższym modelu rozważmy zmienną losową  $\tau$  zdefiniowaną jako

$\omega$	uuu	uud	udu	udd	duu	dud	ddu	ddd
$\tau(\omega)$	3	2	3	2	1	1	1	1

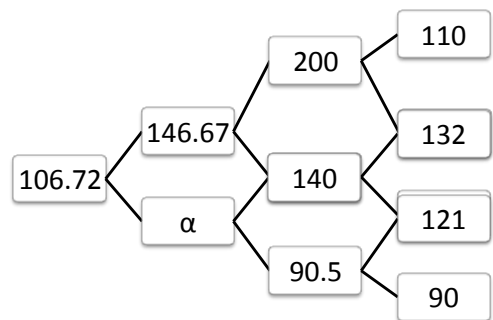
(d) (2 pkt) Zmienna losowa  $\tau$  jest momentem stopu  PRAWDA  FAŁSZ, ponieważ

(e) (2 pkt) Wartość  $\mathbb{Q}(\tau = 3)$ , gdzie  $\mathbb{Q}$  jest miarą martyngałową w tym modelu, wynosi , ponieważ

W rozważanym modelu dana jest również opcja amerykańska  $H$  o wypłatach danych poniżej drzewem (a). Proces uczciwych cen tej opcji zaznaczony został na drzewie (b).



(a) wypłaty z opcji  $H$



(b) uczciwe ceny  $H$

(f) (2 pkt) Wartość  $\alpha$  (zob. drzewo (c)), z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku, jest równa , ponieważ

(g) (2 pkt) Wartość  $\beta$  (zob. drzewo (b)), z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku, jest równa , ponieważ

(h) (2 pkt) Niech  $\tau_H$  będzie optymalny momentem wykonania opcji  $H$ . Wówczas  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\tilde{I}_H)$  wynosi , ponieważ

(i) (2 pkt) Optymalny moment wykonania opcji  $H$  dany jest jako

IMIĘ I NAZWISKO

, numer indeksu

2. (10 pkt) Rozważmy europejski instrument pochodny o następującej funkcji wypłaty

$$H(T) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S(T) \leq K, \\ S(T) - K - A, & \text{gdy } K < S(T). \end{cases}$$

Wyznacz wartość  $A$  (z dokładnością do czwartego miejsca po przecinku) tak aby cena tego instrumentu w chwili 0 wynosiła 0 przy następujących danych:

- bieżąca cena akcji wynosi  $S(0) = 100$ ,
- $U = 25\%$ ,  $D = -15\%$ ,
- jeden okres = 3 miesiące,
- stopa procentowa dla trzymiesięcznych lokat/depozytów w każdym okresie wynosi 8% (per annum),

jeżeli wiadomo, że

- czas trwania opcji wynosi 9 miesięcy,
- cena wykonania opcji wynosi  $K = 100$ .

3. (13 pkt) Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

$\omega$	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$	$\mathbb{P}(\{\omega\})$
$\omega_1$	100	102	105	140	$\frac{1}{10}$
$\omega_2$	100	102	105	110	$\frac{1}{10}$
$\omega_3$	100	102	100	120	$\frac{1}{30}$
$\omega_4$	100	102	100	90	$\frac{1}{10}$
$\omega_5$	100	90	105	90	$\frac{1}{50}$
$\omega_6$	100	90	105	110	$\frac{1}{15}$
$\omega_7$	100	90	85	80	$\frac{1}{50}$
$\omega_8$	100	90	85	60	$\frac{1}{50}$

(a) (2 pkt)  $\mathbb{E}(S(3)|S(1) = 90)$  wynosi

ponieważ

Niech  $\mathcal{P}_2$  będzie podziałem zbioru  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_8\}$  generowanym przez  $(S(0), S(1), S(2))$  oraz  $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{P}_2)$ .

(b) (3 pkt) Zbiór  $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_7, \omega_8\}$  należy do  $\mathcal{F}_2$   PRAWDA  FAŁSZ, ponieważ

(c) (5 pkt)  $\mathbb{E}(S(3)|\mathcal{F}_2)$  wynosi

ponieważ

(d) (3 pkt) Proces  $S$  jest martyngałem względem filtracji generowanej przez samego siebie  PRAWDA  FAŁSZ, ponieważ