

**Zestaw 4 - jednokrokový model trójmianowy z dwiema akcjami.  
Modele  $n$ -mianowe. Twierdzenia Fundamentalne.**

1. Rozszerzyć model z zadania 8 z zestawu 4 dodając kolejną akcję  $S'$

$$S'(0) = 85, S'^u = 80, S'^m = 70, S'^d = 90.$$

- (a) Pokazać, że w tym przypadku nie istnieje miara martyngałowa.  
 (b) Czy model ten jest wolny od arbitrażu? Odpowiedź uzasadnić powołując się na odpowiednie twierdzenie. Następnie, o ile jest to w tym modelu możliwe, skonstruować strategię arbitrażową.
2. Załóżmy, że stopa wolna od ryzyka wynosi  $R = 5\%$ , natomiast zwroty na giełdzie wynoszą  $5\%, 8\%, -20\%$  dla pierwszej akcji oraz  $-5\%, 10\%, a\%$  dla drugiej akcji.
- (a) Znaleźć wszystkie możliwe wartości  $a$ , dla których model ten jest wolny od arbitrażu.  
 (b) Znaleźć wszystkie możliwe wartości  $a$ , dla których model ten jest wolny od arbitrażu i zupełny.

3. Znaleźć cenę opcji koszykowej (*basket option*) o wypłacie

$$H(T) = \max\{S_1(T) + S_2(T) - X, 0\},$$

gdzie  $S_1(0) = 100, S_2(0) = 50, X = 150$ , zwroty dla akcji pierwszej wynoszą  $20\%, 5\%, -20\%$  natomiast dla akcji drugiej  $-10\%, 8\%, 2\%$ . Stopa wolna od ryzyka  $R = 5\%$ . Cenę znajdź metodą replikacji oraz za pomocą prawdopodobieństwa martyngałowego.

4. W jednokrokowym modelu trójmianowym dane są:

$$\begin{aligned} S_1(0) &= 100, U_1 = 10\%, S_1^m = 100, S_1^d = 95, \\ S_2(0) &= 100, S_2^u = 107, M_2 = \frac{2}{100}, D_2 = -7\%, \\ A(0) &= 100, R = 5\%. \end{aligned}$$

Czy w tym modelu istnieje możliwość arbitrażu? Jeżeli tak, to wyznacz wszystkie możliwe portfele arbitrażowe. Spośród wyznaczonych portfeli wybierz jeden i opisz jak będzie wyglądała oparta o niego strategia arbitrażowa.

5. W jednokrokowym modelu trójmianowym dane są:

$$\begin{aligned} S_1(0) &= 100, S_1^u = 115, S_1^m = 105, S_1^d = 90, \\ S_2(0) &= 100, U_2 = 7\%, M_2 = 8\%, D_2 = -10\%, \\ A(1) &= 105, R = 5\%. \end{aligned}$$

Na rynku dostępna jest opcja, o wypłacie

$$(K - (w_1 S_1(1) + w_2 S_2(1)))^+,$$

gdzie  $w_1 = \frac{141}{160}$ ,  $w_1 + w_2 = 1$ ,  $K = 107,0625$ . Premia (tj. cena) opisanej powyżej opcji wynosi 3. Czy taka cena dopuszcza możliwość arbitrażu? Jeżeli tak, to wyznacz i opisz strategię arbitrażową.

6. Rozważmy model czteromianowy jendokrokowy z jedną akcją, w którym

$$S(0) = 100, K_S^{\omega_1} = 0.2, K_S^{\omega_2} = 0.1, K_S^{\omega_3} = 0, K_S^{\omega_4} = -0.1$$

$$A(1) = 100, R = 0.05.$$

Rozważmy opcje: call i put, obie z ceną wykonania równą 100.

- Wyznacz ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych.
  - Konstruując odpowiednie portfele sub- i super-replikujące wyznacz ceny sub- i super-replikacji dla obu opcji.
  - Pokaż, że cena opcji call równa  $C(0) = \frac{100}{21}$  jest za niska, konstruując strategię arbitrażową.
7. Do modelu z poprzedniego zadania dodaj drugą akcję  $S'$  taką, że

$$S'(0) = 110, K_{S'}^{\omega_1} = -0.1, K_{S'}^{\omega_2} = 0, K_{S'}^{\omega_3} = 0.2, K_{S'}^{\omega_4} = 0.1.$$

- Wyznacz ogólną postać prawdopodobieństw martyngałowych.
- Dla opcji o wypłacie  $H(1) = (S(1) + S'(1) - 220)^+$  wyznacz przedział bezarbitrażowy.
- Podaj WKW osiągalności instrumentu  $D$ . Dla dowolnego osiągalnego instrumentu  $D$  o wypłacie  $D(1)$  wyznacz jego uczciwą cenę  $D(0)$ .