

**Zestaw 5 - parytet put-call.**

1. Dany jest model jednokrokowy, oraz opcje europejskie: put  $P$  i call  $C$  o cenie wykonania  $K = 105$ . Wiadomo, że  $C(0) = 10$ ,  $P(0) = 7$ ,  $S(0) = 104$ ,  $A(0) = 100$  oraz  $R = 5\%$ . Czy model ten dopuszcza arbitraż? Jeżeli tak, to wskaż strategię arbitrażową.
2. (*Egzamin na doradcę inwestycyjnego, 2008*) Cena rocznej europejskiej opcji zakupu akcji spółki  $X$ , od której nie jest wypłacana dywidenda, o cenie wykonania 55, wynosi 8. Roczna efektywna stopa zwrotu z aktywów wolnych od ryzyka wynosi 6%. Na podstawie powyższych informacji, zakładając, iż rynek jest efektywny określ, ile wynosi cena rocznej europejskiej opcji sprzedaży akcji spółki  $X$  o cenie wykonania 55, jeśli obecna cena akcji spółki  $X$  wynosi 48.
  - (a) 8,00;
  - (b) 11,89;
  - (c) 15,00;
  - (d) 17,72;

3. Na rynku dana jest akcja nie wypłacająca dywidendy, przy czym  $S(0) = 2$ . Rozważmy dwie opcje typu europejskiego na tę akcję, obie o tym samym czasie wykonania ( $T = 1$  rok). Opcje te mają następujące wypłaty:

$$I : H_I(T) = (5S(T) - 10)^+ \quad (1)$$

$$II : H_{II}(T) = (10 - 5S(T))^+ \quad (2)$$

Wiadomo, że cena opcji  $H_I$  w chwili 0 wynosi  $H_I(0) = 2$ . Wiadomo ponadto, że stopa wolna od ryzyka wynosi  $R = 5\%$ . Znajdź uczciwą cenę opcji  $H_{II}$ .

4. Dany jest model jednokrokowy z jedną akcją, w którym  $S(0) = 220$ ,  $A(0) = 100$ ,  $A(1) = 105$ . W chwili  $T = 0$  inwestor przeprowadził następujące transakcje:
  - zakupił dwie opcje put z ceną wykonania równą 210,
  - zakupił pięć opcji call z ceną wykonania równą 200,
  - wystawił dwie opcje call z ceną wykonania równą 210,
  - wystawił pięć opcje put z ceną wykonania równą 200.

Wyznacz portfel replikujący obroną przez inwestora strategię. Ile pieniędzy potrzebował inwestor, aby móc przyjąć taką strategię?

5. Rozważmy model jednokrokowy wolny od arbitrażu, w którym stopa wolna od ryzyka wynosi  $R$ . Dla ustalonego  $K > 0$  przez  $C(S_0)$ ,  $P(S_0)$  oznaczmy cenę w chwili 0 europejskiej opcji, odpowiednio, call i put na akcję  $S$  z ceną wykonania  $K$ , przy założeniu, że  $S(0) = S_0$ .

(a) Wykazać, że

$$\max\left(0, S_0 - \frac{K}{1+R}\right) \leq C(S_0) \leq S_0.$$

oraz

$$\max\left(0, \frac{K}{1+R} - S_0\right) \leq P(S_0) \leq \frac{K}{1+R}.$$

(b) Wykazać, że nierówność  $S_0 < S'_0$  implikuje

$$C(S_0) - C(S'_0) \leq S_0 - S'_0$$

oraz

$$P(S'_0) - P(S_0) \leq S_0 - S'_0.$$

(c) Wykazać, że funkcje  $C(S_0)$ ,  $P(S_0)$  są wypukłe.

6. Rozważmy model jednokrokowy wolny od arbitrażu, w którym stopa wolna od ryzyka wynosi  $R$ . Przez  $C(K)$ ,  $P(K)$  oznaczmy cenę w chwili 0 europejskiej opcji, odpowiednio, call i put na akcję  $S$  z ceną wykonania  $K$ .

(a) Wykazać, że  $C(K)$  jest funkcją malejącą, a  $P(K)$  funkcją rosnącą.

(b) Wykazać, że nierówność  $K < K'$  implikuje

$$C(K') - C(K) \leq \frac{K - K'}{1+R}$$

oraz

$$P(K) - P(K') \leq \frac{K - K'}{1+R}$$

(c) Wykazać, że funkcje  $C(K)$ ,  $P(K)$  są wypukłe.

7. Dany jest model jednokrokowy wolny od arbitrażu. W modelu tym dane są trzy opcje call:  $C_1, C_2, C_3$ , z cenami wykonania odpowiednio  $K_1, K_2, K_3$ . Wiadomo, że  $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ . Pokazać, że

$$C_2(0) \leq \frac{C_1(0) + C_3(0)}{2}.$$

Następnie wykazać analogiczną nierówność dla opcji put.

8. Dany jest model jednokrokowy, w którym stopa wolna od ryzyka wynosi  $R$ . Na rynku dostępny jest instrument ryzykowny  $S$  oraz opcje call i put (oparte o ten instrument) typu *Asset-or-Nothing* o następujących wypłatach

$$C(1) = \begin{cases} S(1), & \text{gdy } S(1) > K \\ \frac{1}{2}S(1), & \text{gdy } S(1) = K \\ 0, & \text{gdy } S(1) < K \end{cases}, \quad P(1) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } S(1) > K \\ \frac{1}{2}S(1), & \text{gdy } S(1) = K \\ S(1), & \text{gdy } S(1) < K \end{cases},$$

gdzie  $K > 0$  jest ustaloną ceną wykonania opcji.

- (a) Wyprowadzić parytet call-put dla tych opcji.
- (b) Dane są  $S(0) = 100$ ,  $R = 5\%$ . Na rynku dostępna jest w sprzedaży opcja put typu Asset-or-Nothing o cenie wykonania równej 95. Wiadomo, że cena tej opcji wynosi 35. Znajdź uczciwą cenę opcji call typu Asset-or-Nothing o tej samej cenie wykonania.
9. (*Egzamin aktuarialny, 2008*) Inwestor działający na rynku opcji na akcje otrzymał w momencie  $t = 0$  następujące kwotowania:
- obecna cena akcji A: 42 PLN,
  - nominalna stopa wolna od ryzyka: 10% w skali roku,
  - europejska opcja kupna na 1 akcję A z ceną wykonania 40 PLN, wygasająca za 3 miesiące kosztuje 3 PLN,
  - europejska opcja sprzedaży na 1 akcję A z ceną wykonania 40 PLN, wygasająca za 3 miesiące kosztuje 2.25 PLN.

Inwestor uważa, że wykorzystując jedną akcję A istnieje możliwość zrealizowania zysku arbitrażowego. Strategia arbitrażowa ma opierać się na zajęciu odpowiednich pozycji na rynku opcji oraz na rynku akcji i instrumentów wolnych od ryzyka. Zysk arbitrażowy na moment  $t = 0$  wynosi (do obliczeń przyjmij kapitalizację ciągłą, dopuszczamy możliwość krótkiej sprzedaży akcji bez kosztów transakcyjnych):

- (a) 1.66 PLN;
- (b) 2.24 PLN;
- (c) 2.29 PLN;
- (d) 3.00 PLN;
- (e) Nie ma zysku arbitrażowego, inwestor poniesie zawsze stratę.