

Zestaw 6 - WWO, filtracje i martyngały.
ROZWIĄZANIA

1. Pokazać, że dla procesu stóp zwrotu z akcji $(K(n))_{n \in \{1, \dots, n\}}$ zachodzą następujące własności

- (a) Dla każdego n zmienna losowa $K(n)$ ma rozkład dwupunktowy

$$K(n, \omega) = \begin{cases} U, & \text{gdy } n\text{-ty wyraz ścieżki } \omega \text{ jest równy } u \\ D, & \text{gdy } n\text{-ty wyraz ścieżki } \omega \text{ jest równy } d \end{cases}$$

przy czym $\mathbb{P}(K(n) = U) = p$ i $\mathbb{P}(K(n) = D) = 1 - p$.

- (b) $K(1), \dots, K(N)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie,
(c) Dla wszystkich n

$$\sigma(K(1), K(2), \dots, K(n)) = \mathcal{F}_n.$$

2. Niech $(M(n))_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}$ będzie procesem stochastycznym zdefiniowanym na przestrzeni probabilistycznej z filtracją: $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}, \mathbb{P})$. Wówczas $(M(n))$ jest martyngałem względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

- (a) $M(n)$ jest całkowalną zmienną losową, dla każdego n ,
(b) proces $(M(n))$ jest adaptowany do filtracji (\mathcal{F}_n)
(c) dla każdego $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ zachodzi równość

$$\mathbb{E}(M(n+1)|\mathcal{F}_n) = M(n).$$

3. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Przypuśćmy, że proces stochastyczny $(M(n))_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}$ jest adaptowalny do filtracji (\mathcal{F}_n) , każde $M(n)$ jest całkowalne oraz dla dowolnego $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ zachodzi równość

$$\mathbb{E}(M(n+1) - M(n)|\mathcal{F}_n) = 0$$

Wykazać, że $(M(n))$ jest martyngałem względem filtracji (\mathcal{F}_n) .

4. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Niech X będzie całkowalną zmienną losową. Oznaczmy $M(n) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$. Pokazać, że proces $(M(n))_{n \in \{0, 1, \dots, N\}}$ jest martyngałem względem filtracji (\mathcal{F}_n) .
5. Rozważmy 3 gry o następujących zasadach:

• **GRA 1:**

O 12:00 każdego dnia (przez kolejne 365 dni) rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł - dostajemy 1 zł, jeżeli wypadnie reszka - płacimy 1 zł. Zakładamy, że moneta jest uczciwa.

- **GRA 2:**

O 12:00 każdego dnia (przez kolejne 365 dni) rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł - dostajemy 1 zł, jeżeli wypadnie reszka - płacimy 1 zł. Zakładamy, że moneta nie jest uczciwa: średnio na cztery rzuty wypadają 3 reszki.

- **GRA 3:**

O 12:00 każdego dnia (przez kolejne 365 dni) rzucamy monetą. Jeżeli wypadnie orzeł - dostajemy tyle zł, ile orłów wypadło do tej pory (wliczając orła, który właśnie wypadł), jeżeli wypadnie reszka - płacimy tyle zł, ile reszek wypadło do tej pory (wliczając reszkę, która właśnie wypadła). Zakładamy, że moneta jest uczciwa.

Dla danej gry, niech $X(n)$ będzie sumą naszych wygranych (i przegranych) o 20:00 n -tego dnia. Przyjmujemy przy tym $X(0) = 0$. Poniższe polecenia wykonaj dla każdej gry osobno.

- Zbudować model gry o powyższych zaadach: wybrać odpowiednią przestrzeń probabilistyczną i zdefiniować na niej zmienne losowe $X(n)$, których wartości są równe sumie naszych wygranych.
 - Wyznaczyć jawne wzory zmiennych losowych $X(1)$, $X(2)$ i $X(3)$ (wskazówka: narysuj drzewo dwumianowe dla powyższej gry).
 - Jaki rozkład ma zmienna losowa $X(n)$? Obliczyć jej wartość oczekiwaną. Czy wartość oczekiwana jest stała dla procesu $(X(n))$?
 - Wyznaczyć $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, a następnie obliczyć $\mathbb{E}(X(3)|\mathcal{F}_0)$, $\mathbb{E}(X(3)|\mathcal{F}_1)$ oraz $\mathbb{E}(X(3)|\mathcal{F}_2)$, gdzie (\mathcal{F}_n) jest filtracją generowaną przez proces $(X(n))$ (tj. $\mathcal{F}_n = \sigma(X(0), X(1), \dots, X(n))$).
 - Czy proces $(X(n))$ jest martyngałem względem filtracji (\mathcal{F}_n) ?
6. Wykonujemy dwukrotnie rzut kostką. Niech X oznacza sumę oczek z obu rzutów, a Y wynik pierwszego rzutu. Obliczyć $\mathbb{E}(X|Y)$.
7. Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

ω	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$	$\mathbb{P}(\{\omega\})$
ω_1	100	121	130	140	1/8
ω_2	100	121	130	110	1/8
ω_3	100	121	100	110	1/8
ω_4	100	121	100	90	1/8
ω_5	100	90	105	90	1/8
ω_6	100	90	105	95	1/8
ω_7	100	90	85	95	1/8
ω_8	100	90	85	75	1/8

- Obliczyć $\mathbb{E}(S(3)|S(1) = 121)$.
- Niech \mathcal{P}_2 będzie podziałem zbioru $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_8\}$ generowanym przez $(S(0), S(1), S(2))$. Oznaczmy $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{P}_2)$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(S(3)|\mathcal{F}_2)$.

8. Rozważmy model cen akcji z dynamiką:

ω	$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$\mathbb{Q}(\{\omega\})$
ω_1	80	120	180	$\frac{2}{15}$
ω_2	80	120	80	$\frac{3}{15}$
ω_3	80	60	72	$\frac{4}{9}$
ω_4	80	60	36	$\frac{2}{9}$

Sprawdzić czy proces cen akcji $(S(n))_{n=0,1,2}$ jest martyngałem względem filtracji generowanej przez ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)_{n=0,1,2}$ przestrzeni probabilistycznej $(\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$.