**Zestaw 9 - momenty stopu.**
ROZWIĄZANIA

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna z filtracją $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\in\{0,\ldots,N\}}, \mathbb{P})$. Wykazać, że zmienna losowa $\tau : \Omega \to \{0, 1, \ldots, N\} \cup \{\infty\}$ jest momentem stopu, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$
$$\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

2. Rozważmy trzykrokowy model CRR, w którym dane są dwie zmienne losowe opisane poniższą tabelką:

| $\omega$ | uuu | uud | udu | udd | duu | dud | ddu | ddd |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tau_1(\omega)$ | 2 | 2 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\tau_2(\omega)$ | 2 | 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Sprawdzić czy $\tau_1, \tau_2$ są momentami stopu.

3. Rozważmy czterokrokowy model CRR, w którym $S(0) = 16$, $U = 100\%$, $D = -50\%$. Dla ustalonych $\alpha, \beta > 0$ zdefiniujmy zmienne losowe $\tau_\alpha^-$, $\tau_\beta^+$ jako[1]:
$$\tau_\alpha^-(\omega) = \min\{n \in \{0, 1, \ldots, 4\} : S(n, \omega) \leq \alpha\}$$
$$\tau_\alpha^-(\omega) = \min\{n \in \{0, 1, \ldots, 4\} : S(n, \omega) \geq \beta\}$$
   (a) Wyznacz $\tau_5^-$, $\tau_{60}^+$, a następnie wykaż, że są one momentami stopu.
   (b) Czy zmienna losowa $\tau$ zdefiniowana jako
$$\tau(\omega) = \max\{n \in \{0, 1, \ldots, 4\} : S(n, \omega) = 16\}$$
   jest momentem stopu?

4. Grasz w następującą grę: pierwszego dnia rzucasz dwiema kostkami. Oznaczmy przez $X$ liczbę oczek, która wypadła na pierwszej kostce, a przez $Y$ liczbę oczek, która wypadła na drugiej kostce. W dniu $\tau = \min(X, Y)$ otrzymujesz wypłatę w wysokości $\max(X, Y)$ PLN. Niech proces $(S(n))_{n\in\{1,2,3,\ldots,6\}}$ reprezentuje wypłaty otrzymane przez Ciebie z powyższej gry w kolejnych dniach poczynając od pierwszego.
   (a) Przedstaw probabilistyczny model powyższej gry. Zdefiniuj odpowiednią przestrzeń probabilistyczną i zmienne losowe $X$, $Y$. Wyznacz proces $(S(n))$.
   (b) Wyznacz filtrację $(\mathcal{F}_n)_{n\in\{1,\ldots,6\}}$ generowaną przez proces $(S(n))$.
   (c) Czy $\tau$ jest momentem stopu względem tej filtracji?

[1] zmienne te nazywamy odpowiednio *pierwszym czasem przejścia w dół przez* $\alpha$ oraz *pierwszym czasem przejścia w górę przez* $\beta$. Przyjmujemy przy tym $\min\{\emptyset\} = \infty$