

Podstawy fizyki – sezon 1

III. Praca i energia

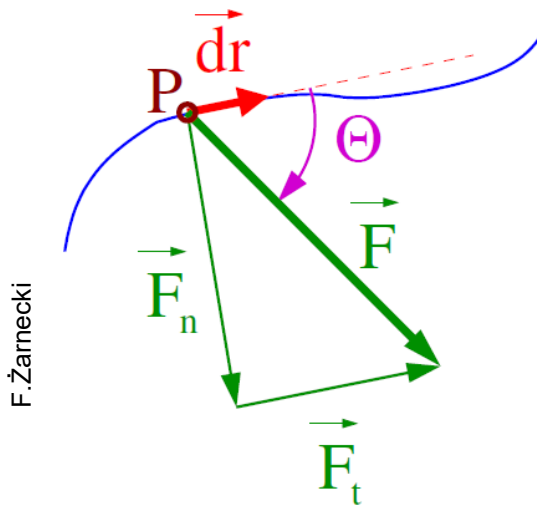
Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFliS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 111
amucha@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

Praca

- ▶ Rozważamy punkt materialny P, na który działa siła $\vec{F}(\vec{r}, t, \vec{v}, \dots)$
- ▶ Praca, jaką wykonuje siła \vec{F} przy przesunięciu P o \vec{dr} :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dr}$$



Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy.

- siła dośrodkowa, siła Coriolisa, Lorentza...

Praca wykonana przez siłę \vec{F} nad punktem P przy przesunięciu z punktu A do B wynosi:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

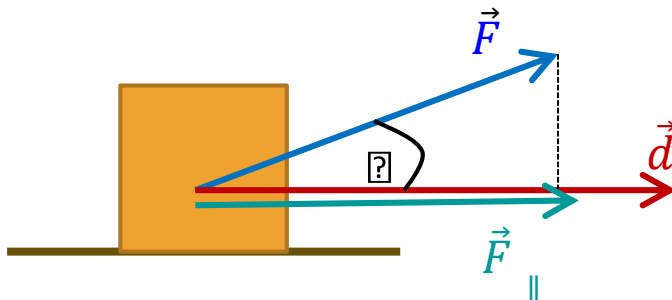


Praca siły stałej

Jeśli na punkt P działa siła **stała**, to jej praca przy przemieszczeniu \vec{d} wynosi:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

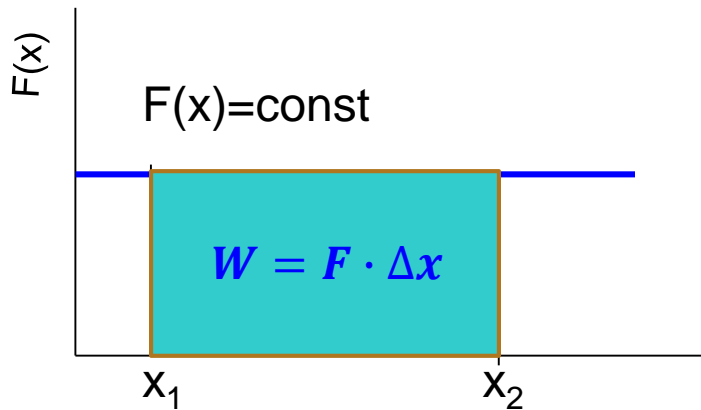
[J=N m]



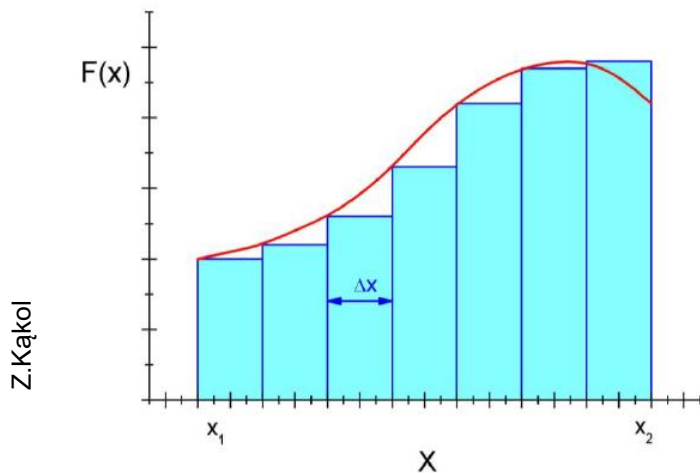
$$W = F d \cos \alpha (\vec{F}, \vec{d}) = F_{\parallel} d$$

- Wzór określa pracę wykonaną wyłącznie przez siłę \vec{F} .
- Na ciało mogą działać również inne siły, np. siła tarcia, ciężar.
 - Praca wypadkowej kilku sił jest równa sumie prac wykonanych przez poszczególne siły.
- Ciało może przemieszczać się w innym kierunku niż działa siła (np. przy rzucie w górę siła grawitacyjna działa w dół – jej praca jest ujemna).

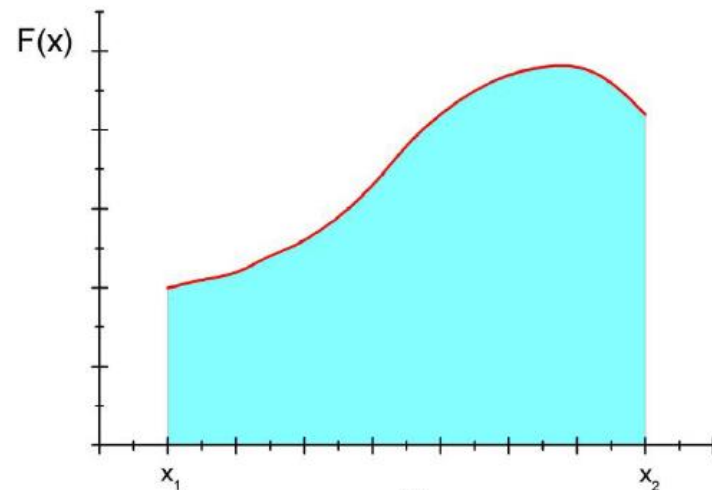
Praca siły zmiennej a stałej



- Praca jest polem powierzchni pod wykresem siły.
 - W przypadku siły stałej jest to prostokąt.
 - Dla **siły zmiennej** – dzielimy wykres na jak największą liczbę prostokątów i sumujemy pola



$$W = \sum F_i \Delta x$$

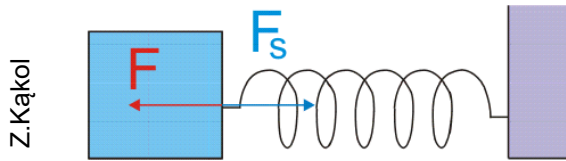


$$W = \lim_i \sum F_i \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$$

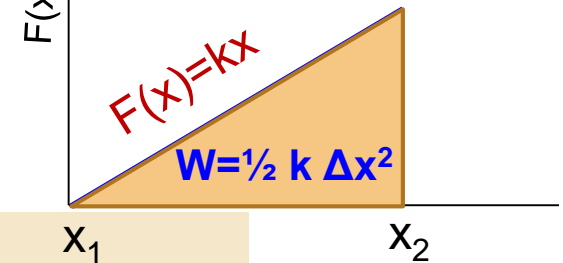
Praca sił zmiennych - przykłady

Przykł. 1 – Praca siły sprężystości: $F_s(x) = -kx$.

Rozciągamy sprężynę, liczymy pracę, jaką wykona zewnętrzna siła $F = kx$:

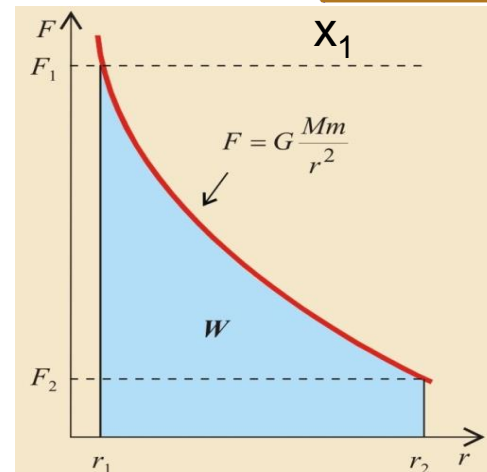
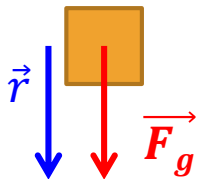


$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2)$$



Przykł. 2 – Praca siły grawitacji:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \int_{r_1}^{r_2} GMm \frac{1}{r^2} dr = -GMm \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$



Energia kinetyczna (przyp. nierelatywistyczny)

Na ciało działa wypadkowa siła \mathbf{F} i nadaje mu przyspieszenie \mathbf{a} . Liczymy pracę tej siły nad ciałem (ruch wzdłuż osi x , $m = \text{const}$):

$$\begin{aligned} W &= \int \mathbf{F} d\mathbf{x} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{v_1}^{v_2} m v dv = \\ &= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k \end{aligned}$$

gdzie zdefiniowano **energię kinetyczną**: $E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$



oraz pokazano, że:

zmiana energii kinetycznej ciała jest równa pracy W , jaką wykonuje wypadkowa siła nad tym ciałem.

Twierdzenie o pracy i energii.

Twierdzenie jest prawdziwe niezależnie od postaci siły \vec{F} i drogi.

Moc

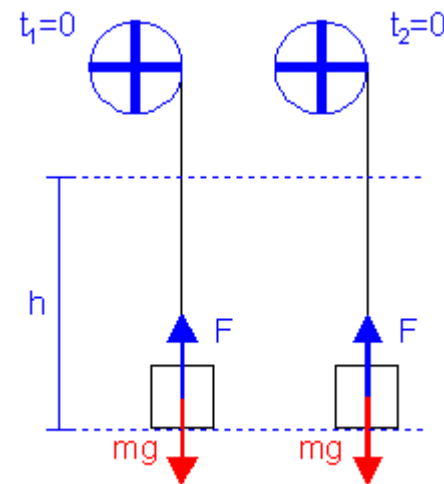
- Jeśli interesuje nas szybkość wykonania pracy, określamy **MOC**:

$$P = \frac{dW}{dt} \text{ - moc chwilowa [W=J/s], [kWh]}$$



$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \text{ - moc średnia}$$

dla stałej siły: $\bar{P} = \frac{F s}{t} = F \bar{v}$



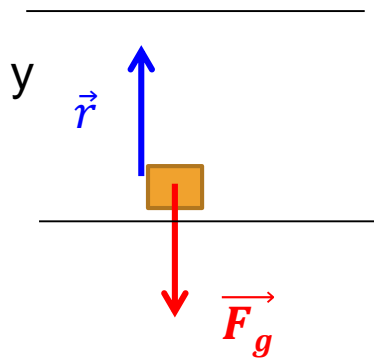
Z. Kąkol

Siły zachowawcze

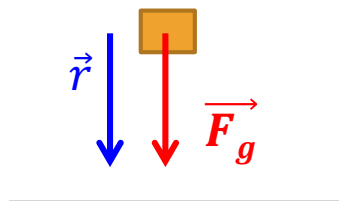
- Jeżeli praca pewnej siły zależy tylko od położenia punktu początkowego A i końcowego B, to siłę taką nazywamy **ZACHOWAWCZĄ**.

Praca takiej siły, wykonana po drodze zamkniętej **WYNOŚI ZERO**.

Przykład: Liczymy pracę siły grawitacji (w pobliżu Ziemi, czyli $F_g = mg$, przy podnoszeniu i opuszczaniu ciała na wysokość y :

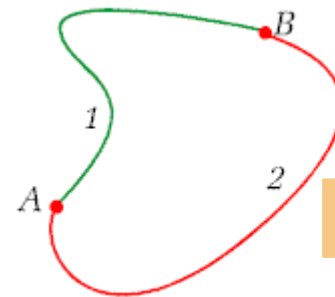


$$W_1 = -mgy$$



$$W_2 = mgy$$

$$W_1 = -W_2$$



$$W_{AB} + W_{BA} = 0$$

Siłami zachowawczymi są np:

- siła grawitacji
- siła sprężystości

Siła tarcia jest siłą niezachowawczą.

Energia potencjalna

- Siła jest zachowawcza, gdy jest ona funkcją jedynie położenia ciała: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, taką, że jej pracę można przedstawić w postaci:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = E_{pA}(\vec{r}_A) - E_{pB}(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$



gdzie ΔE_p - zmiana energii potencjalnej

- Siła zachowawcza nie może zależeć ani od czasu, ani od prędkości.
- Energia potencjalna jest skalarną funkcją położenia \vec{r} .
- Jest to energia, jaką posiada ciało w polu danej siły \vec{F} .

$$E_{pB} = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + E_{pA}$$

- Wartość energii potencjalnej jest określona z dokładnością do pewnej stałej, zależnej od wyboru punktu odniesienia A.

$$E_{pB} = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + const$$

Energia potencjalna

❓ Ustalmy jeden z punktów, np. A, tak, aby $E_{pA} = 0$.

Energia potencjalna wynosi zero w położeniu, gdy $\vec{F}_A = 0$ (nierozciągnięta sprężyna, nieskończona odległość od Ziemi).

❓ Otrzymujemy zależność energii potencjalnej od siły:

$$Ep_B = - \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

czyli:

$$-\frac{dEp}{d\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

Bardziej ogólnie:

praca wykonana przez siłę $\vec{F}(\vec{r})$ przy przesunięciu $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ wynosi:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = -dEp \\ &= -\frac{\partial Ep}{\partial x} dx - \frac{\partial Ep}{\partial y} dy - \frac{\partial Ep}{\partial z} dz \end{aligned}$$

czyli:

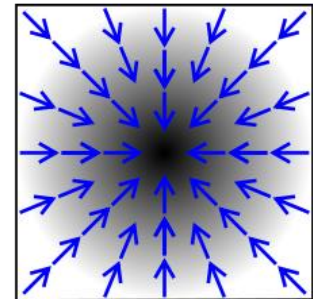
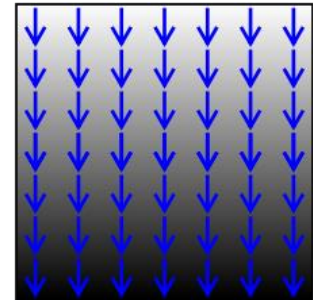
$$\vec{F} = -\nabla Ep$$

∇ -operator różniczkowy-nabla

Operatory wektorowe*

- Jeżeli w każdym punkcie przestrzeni istnieje określona **wielkość wektorowa** (np. siła, natężenie), to mówimy o takim **polu wektorowe**.
Np. pole grawitacyjne jest polem wektorowym.
- Do opisu pól wektorowych służą **operatory wektorowe**:
 - gradient: $\text{grad } f(x, y, z) \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$
 - dywergencja
 - rotacja
- **Gradient** wielkości skalarnej jest wektorem, który pokazuje spadek (lub narastanie) tej wielkości w określonym kierunku.
- W polu grawitacyjnym – siła jest wielkością (wektorem) pokazującą, jak szybko i w jakim kierunku zmienia się energia potencjalna (skalar)

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$



Ciemniejszy kolor pokazuje większą wartość pewnego skalaru (np. E_p lub temp), strzałki pokazują kierunek narastania tego skalaru (uwaga na „-”)

Zasada zachowania energii

- Podsumujmy, co wiemy już o pracy, sile, energii kinetycznej i potencjalnej:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = E_{pA} - E_{pB} \quad - \text{praca siły zachowawczej}$$

$$W_{AB} = E_{kB} - E_{kA} \quad - \text{tw. o pracy i energii (dowolna siła)}$$

czyli:

$$E_{kB} - E_{kA} = E_{pA} - E_{pB}$$

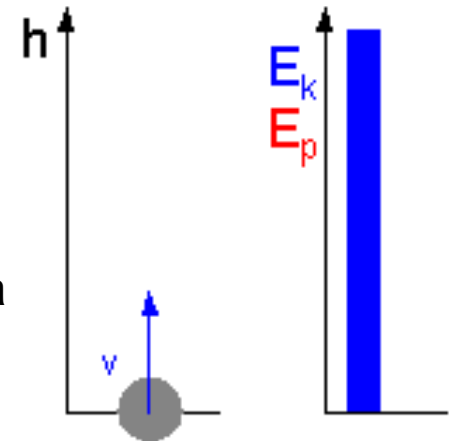
lub:

$$E_{kB} + E_{pB} = E_{pA} + E_{kA}$$

z czego wynika:

$$\mathbf{E = E_{pA} + E_k = const}$$

W polu sił zachowawczych całkowita energia
jest zachowana



Z.Kąkol

Siła, energia - przykłady

Przykład 1. Wyznaczenie energii potencjalnej w pobliżu Ziemi:

$$F(y) = -mg$$

F jest stała. Przyjmujemy, że dla $y = 0, E_p(0) = 0$.

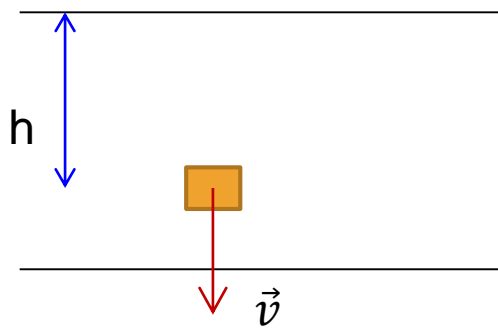
Wtedy

$$E_p(y) = -\int_0^y F(y)dy + E_p(0) = -\int_0^y (-mg)dy = mgy$$

Sprawdzenie

$$F = -\frac{dE_p(y)}{dy} = -\frac{d(mgy)}{dy} = -mg$$

Przykład 3. Spadek swobodny z wysokości h



$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Siła, energia - przykłady

Przykład 2. Wyznaczenie energii potencjalnej sprężyny

$$F(x) = -kx$$

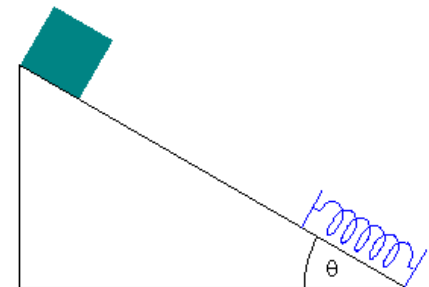
dla $x = 0$, $E_p(0) = 0$.

Wtedy

$$E_p = -\int_0^x (-kx)dx = \frac{kx^2}{2}$$

Sprawdzenie:

$$F = -\frac{dE_p(x)}{dx} = -\frac{d\left(\frac{kx^2}{2}\right)}{dx} = -kx$$



Z. Kąkol

Energia potencjalna pola grawitacyjnego

Uwaga! Przyjmowane było, siła grawitacyjna w pobliżu Ziemi jest stała $F = -mg$.

Teraz znajdziemy energię potencjalną masy m znajdującej się w dowolnym punkcie nad powierzchnią Ziemi odległym o r od środka Ziemi.

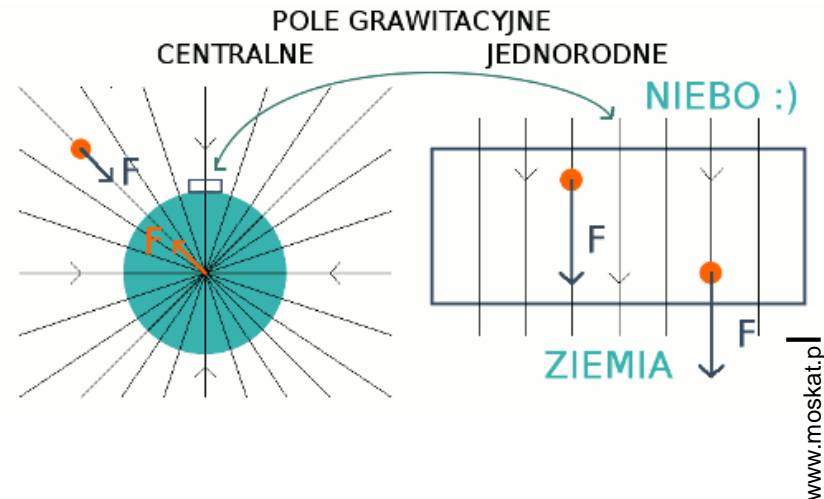
$$F_g = -GMm \frac{1}{r^2}$$

Znak „-” oznacza kierunek do środka Ziemi, siła przyciągająca.

$$E_{pB} = -W_{AB} + Ep_A, \quad A \rightarrow \infty, \quad B \rightarrow r$$

$$E_p(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} + Ep_{\infty}, \quad Ep_{\infty} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} E_p(r) &= - \int_{\infty}^r F(r) dr = - \int_{\infty}^r \left(-GMm \frac{1}{r^2} \right) dr = \\ &= -GMm \frac{1}{r} \Big|_{\infty}^r = -GMm \frac{1}{r} \end{aligned}$$



Energia potencjalna, potencjał

Energia potencjalna ma wartość równo zero w nieskończoności (punkt odniesienia) i maleje w miarę zmniejszania się r .

$$E_p(r) = -GMm \frac{1}{r}$$

Potencjał pola grawitacyjnego: $V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -GM \frac{1}{r}$



Przykł: Obliczyć jaką prędkość należy nadać obiektowi na Ziemi aby uciekł on z Ziemi na zawsze.

$$\begin{aligned} E_K + E_p(R_Z) &= E_p(R_Z \rightarrow +\infty) \\ \frac{1}{2}mv_{II}^2 - GM_Zm \frac{1}{R_Z} &= 0 \\ v_{II} &= \sqrt{2 GM_Z \frac{1}{R_Z}} \cong 11.2 \text{ km/s} \end{aligned}$$

jest to tzw. prędkość ucieczki – druga prędkość kosmiczna

Pierwsza prędkość kosmiczna - najmniejszą możliwą prędkość jaką musi mieć punkt materialny swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi.

Energia dla sił niezachowawczych

- W układach oprócz sił zachowawczych działają zwykle siły niezachowawcze, np. tarcie.
 - twierdzenie o pracy i energii, dla wszystkich sił: $\Delta E_k = W_z + W_{nz}$
 - a dla sił zachowawczych: $W_z = -\Delta E_p$
 - czyli: $W_{nz} = \Delta E_k + \Delta E_p$

praca sił niezachowawczych została przekształcona w **energię wewnętrzną U**.

Zmiana energii wewnętrznej U jest równa stałonej energii mechanicznej:

$$\Delta E_k + \Delta E_p + \Delta U = 0$$

Zasada zachowania energii całkowitej!

Zasada zachowania energii należy do najbardziej podstawowych praw fizyki. Wszystkie nasze doświadczenia pokazują, że jest to prawo bezwzględnie obowiązujące; nie znamy wyjątków od tego prawa.

Zasada zachowania energii całkowitej

- Jeżeli na ciało działa siła zewnętrzna (dowolna), siła zachowawcza (np. grawitacji) oraz niezachowawcza (np. tarcia), to można napisać:

$$F_{wyp} = F_{zew} + F_z + F_{nz}$$

a z tw. o pracy i energii: $\Delta E_K = W_{zew} + W_z + W_{nz}$

czyli: $\Delta E_K = W_{zew} - \Delta E_p - \Delta U$

$$W_{zew} = \Delta E_K + \Delta E_p + \Delta U$$

Praca siły zewnętrznej a zasada zachowania energii całkowitej

- Każda praca wykonana na ciele przez czynnik zewnętrzny równa się wzrostowi energii kinetycznej plus wzrost energii potencjalnej plus wzrost energii wewnętrznej.
- *Cała energia została zarejestrowana.*
- Wynika z niego, że *energia może być przekształcona z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczona;*

Energia całkowita jest wielkością stałą.

Podsumowanie

- ▶ Praca siły zmiennej i stałej (grawitacji, sprężystości).
- ▶ Energia kinetyczna.
- ▶ Moc.
- ▶ Siły zachowawcze.
- ▶ Energia potencjalna.
- ▶ Zasada zachowania energii mechanicznej.
- ▶ Gradient.
- ▶ Potencjał.
- ▶ Pole grawitacyjne.
- ▶ Zasada zachowania energii całkowitej (w przypadku działania sił niezachowawczych oraz zewnętrznych)