

# Podstawy fizyki – sezon 1

## **VI. Ruch obrotowy 2 (!)**

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFliS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,  
D11, pok. 111  
amucha@agh.edu.pl  
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

# Dynamika bryły sztywnej

- Do bryły sztywnej przykładamy siłę  $\vec{F}$ .

Bryła może obracać się wokół nieruchomej osi prostopadłej do ciała, w punkcie „O”.

- Na ciało działa moment siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- Ciało obraca się zgodnie z II zas. dyn. Newtona:

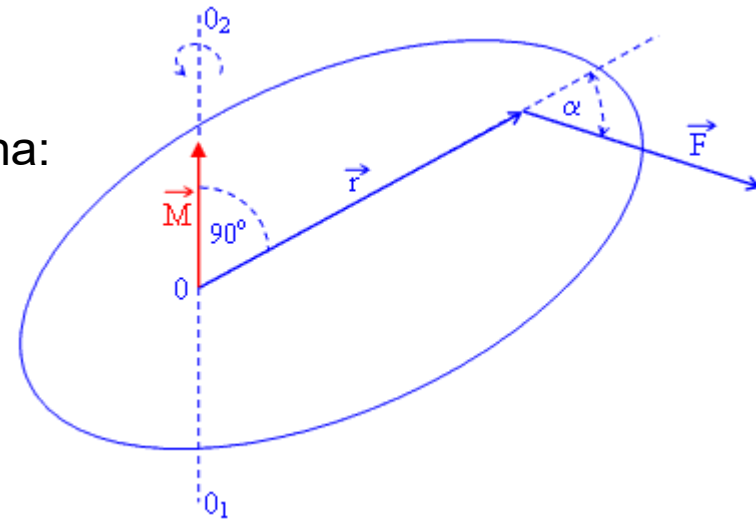
$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- Ciało obracając się o kąt  $\varphi$  wykonuje pracę:

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} d\vec{\varphi}$$

- Moc w ruchu obrotowym:

$$P = M \omega$$



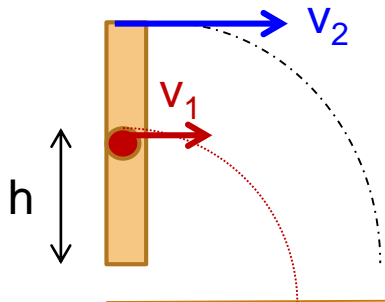
zad: dopisać analogiczne wzory dla ruchu prostoliniowego...

# Siły, pędy i momenty

		II zas. dynamiki	Zasada zachowania
pęd	$\vec{p} = m \vec{v}$	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\sum \vec{F}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ $\vec{P} = \text{const}$
siła	$\vec{F} = m \vec{a}$		
moment pędu	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{M}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ $\vec{L} = \text{const}$
moment siły	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$		

# Zasady zachowania w ruchu bryły sztywnej - przykłady

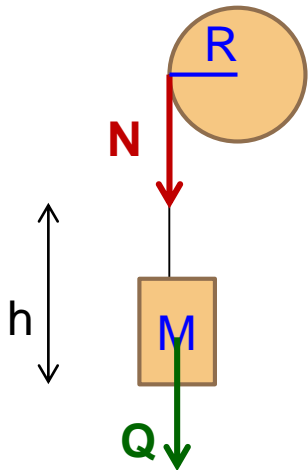
Zasada zachowania energii:



$$\Delta E_K + \Delta E_p = 0$$

$$Mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Tw. o pracy i energii:



Zmiana en. kinetycznej krążka jest równa pracy wykonanej przez ciężarek

$$\Delta E_k = W$$

$$\frac{1}{2} I \Delta \omega^2 = Qh$$

Zasada zachowania momentu pędu:



$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad L_2 = I_2 \omega_2$$

$$L_1 = L_2, \quad I_1 > I_2$$

$$\Rightarrow \omega_1 < \omega_2$$

helikopter – wirnik spycha powietrze w dół i wytwarza siłę unoszącą

Równania ruchu:

$$NR = I \varepsilon$$

$$Ma = Q - N$$

$$a = \varepsilon R$$

zad: sformułować ww zasady (założenie-teza)

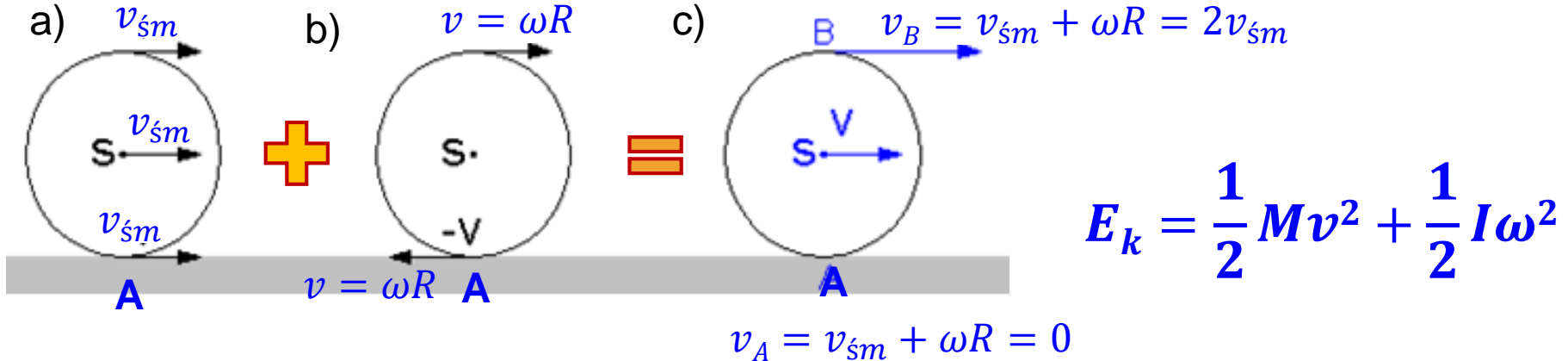
# Toczenie (na dwa sposoby)



**Toczenie** (bez poślizgu) – ruch postępowo-obrotowy

Z. Kąkol

I. Złożenie ruchu **postępowego** środka masy (a) i **ruchu obrotowego** względem środka masy (b)



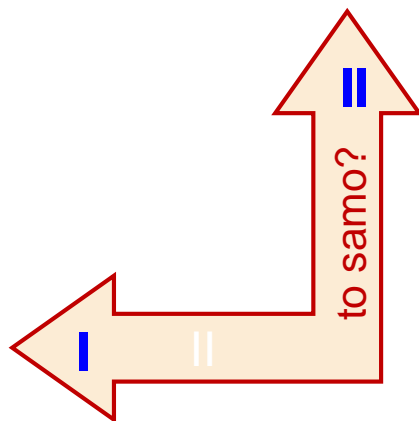
przyczyną toczenia bez poślizgu jest siła tarcia statycznego,  
wtedy:  $v - \omega R = 0$

**LUB:**

# Toczenie II

## II. Ruch obrotowy względem chwilowej osi obrotu:

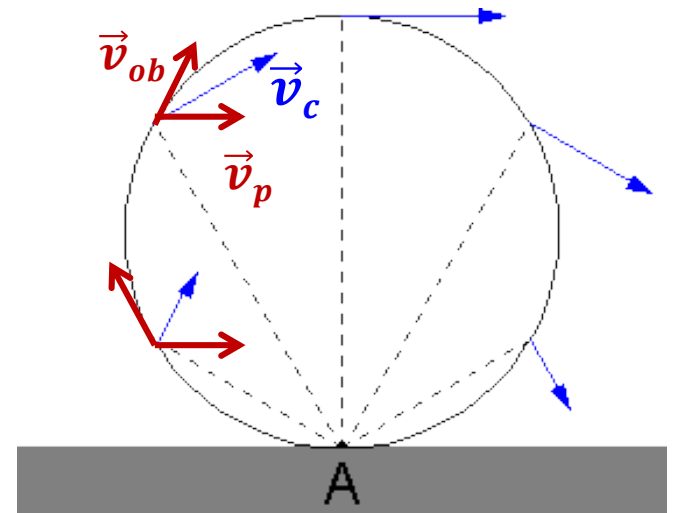
- punkt A spoczywa – porównaj z poprzednim rys.
- każdy inny punkt porusza się dookoła ptu A z prędkością  $\vec{v}_c$ , która jest złożeniem prędkości liniowej ruchu postępowego i obrotowego względem środka masy  $\vec{v}_{ob}$ . Jeżeli nie ma poślizgu, te prędkości mają równe długości.
- wektory prędkości  $\vec{v}_c$  są  $\perp$  promienia – ruch obrotowy względem pewnego punktu



$$E_k = \frac{1}{2} I_A \omega^2$$

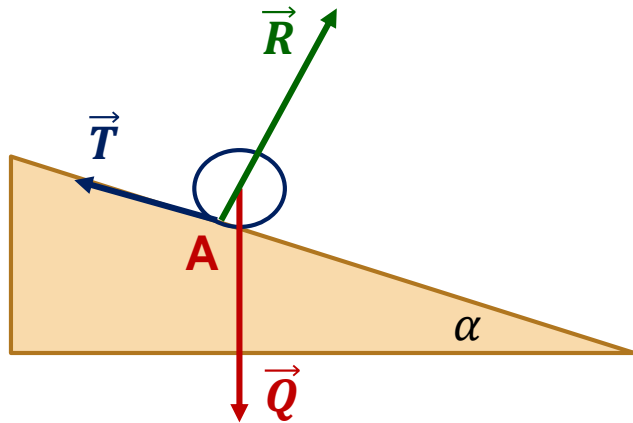
$$I_A = I + MR^2$$

moment bezwładności  
wzgl.ptu A (z tw. Steinera)



# Toczenie bez poślizgu

- Ciało porusza się ruchem obrotowym, gdy działa na niego wypadkowy **MOMENT SIŁY**
- Ruch obrotowy odbywa się **BEZ** poślizgu, gdy prędkość punktu **A** styku ciała z płaszczyzną wynosi **ZERO**  $v = v_{\dot{m}} - \omega R = 0$
- Jeżeli ciało porusza się bez przyspieszenia – brak poślizgu!



- jak nie ma tarcia – ciało się zsuwa, ale nie obraca,
- jak występuje tarcie, ale:
  - kąt nachylenia jest niewielki, to tarcie jest zawsze większe niż  $Q \sin \alpha$ , ciało się obraca bez poślizgu,
- jak nie ma poślizgu, to prędkość **A** wynosi zero i tarcie statyczne musi przeciwdziałać poślizgowi,
- wartość tarcia statycznego jest nieokreślona, ale zawsze:  $T_s \leq Nf = fmg \cos \alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} ma = mg \sin \alpha - T \\ I\varepsilon = Tr \\ T \leq fmg \cos \alpha \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \dots \\ a = \dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \omega r \\ a = \varepsilon r \end{array} \right.$$

jeżeli kąt nachylenia jest większy i...

# Ruch z poślizgiem

- Dla większych kątów nachylenia, siła tarcia jest za mała, aby powodować, żeby dolny punkt koła nie przesuwał się względem podłoża,  $T_{s\max} = fmg\cos\alpha$
- Jeżeli koło się przesuwa (ślizga), to działa tarcie kinetyczne:  $T = fN$

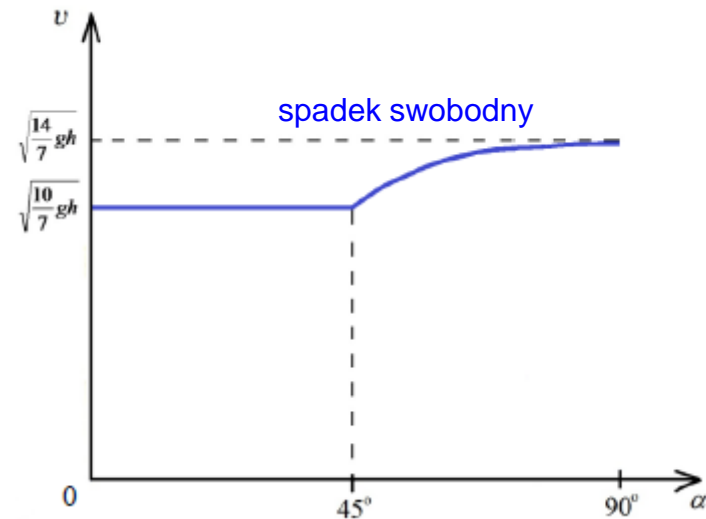
$$ma = mg \sin\alpha - T$$

$$I\varepsilon = Tr$$

$$T = fmg \cos\alpha$$

$$\text{ALE: } v - \omega r > 0 \quad v = \dots$$

$$a = \dots$$



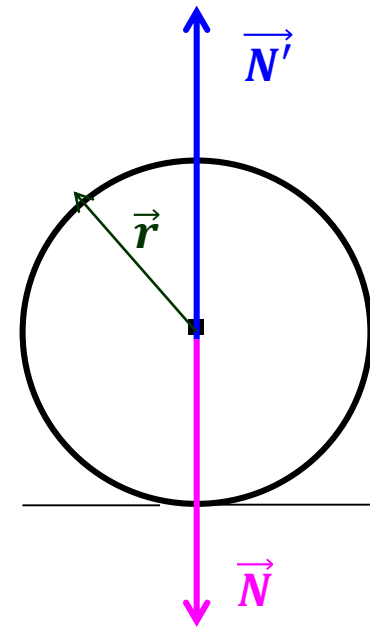


# Tarcie toczne (opór toczenia)

- **Tarcie toczne** jest to siła oporu działająca, gdy jedno ciało toczy się po drugim (opona na drodze, kula na równi, łożyska)
- Tarcie toczne jest zazwyczaj dużo mniejsze od kinetycznego (poślizgowego)- szerokie zastosowanie w technice.
- Toczenie jest **ZAWSZE** związane z odkształceniem powierzchni (nawet b.małym).
- Tarcie toczne zależy od promienia toczącego się ciała.

gdy ciało spoczywa:

siła reakcji podłoża leży na tej samej prostej co siła nacisku na podłoże



# Tarcie toczne

- **Tarcie toczne** jest to siła oporu działająca, gdy jedno ciało toczy się po drugim (opona na drodze, kula na równi, łożyska)
- Tarcie toczne jest zazwyczaj dużo mniejsze od kinetycznego (poślizgowego)- szerokie zastosowanie w technice.
- Toczenie jest **ZAWSZE** związane z odkształceniem powierzchni (nawet b.małym).
- Tarcie toczne zależy od promienia toczącego się ciała.

Przy stałej prędkości-

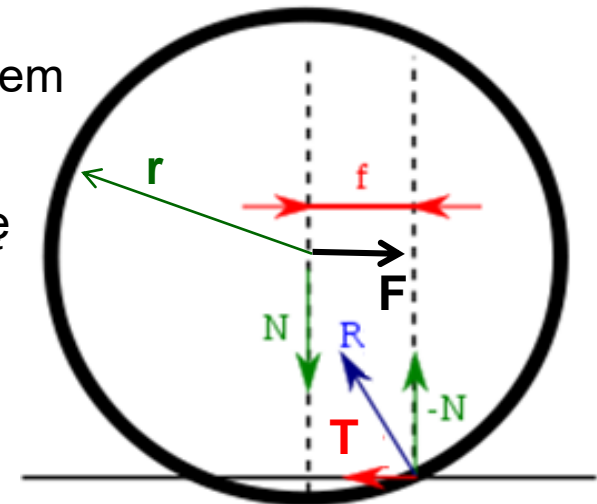
siły:  $\vec{F} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{R} = 0, \quad \vec{F} + \vec{T} = 0$

momenty sił:  $\vec{f} \times \vec{N}$  i  $\vec{r} \times \vec{T}$

$\vec{T}$  - siła tarcia tocznego, hamująca ruch,  
suma momentów sił musi wynosić zero:

$$Tr = Nf$$

stąd współ. tarcia tocznego:  $f = \frac{Tr}{N}$  [m]



$\vec{F}$  - siła ciągnąca

$\vec{R}$  - siła reakcji podłoża

$\vec{N}$  - siła nacisku

$f$  - ramię siły nacisku,  
wsp. tarcia tocznego

# Tarcie toczne w życiu

- Tarcie toczne jest to stosunek siły nacisku do promienia... (zastosowania?)
- Współczynnik tarcia tocznego ma wymiar długości! Odpowiada formalnie promieniowi kuli, przy toczeniu której siła tarcia byłaby równa sile nacisku
- Współczynnik tarcia tocznego jest zwykle bardzo mały, stosunek:  $\frac{\mu_t}{r}$  można porównać do współ. tarcia poślizgowego, np. koło o promieniu 50cm po stali :  $\frac{\mu_t}{r} = 0.0001$ ,  $\mu_K = 0.09$
- Tarcie toczne toczącej się opony – ciekawe uwagi:
  - Rozmiar opony - opór toczenia odpowiada ugięciu ścian opony oraz powierzchni kontaktu z podłożem.
  - Stopień napompowania - mniejsze ciśnienie w oponach skutkuje większym ugięciem ścian opony, a co za tym idzie większym tarciem tocznym.
  - Rzeźba bieżnika opony ma duży wpływ na opór toczenia. Im "grubszy" wzór bieżnika, tym większy opór toczenia. Dlatego też "szybkie" opony rowerowe mają drobny bieżnik, a ciężarówki zużywają mniej paliwa, kiedy bieżnik jest zużyty.
  - Mniejsze koła mają większy opór toczenia niż duże

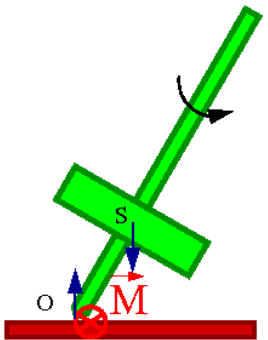
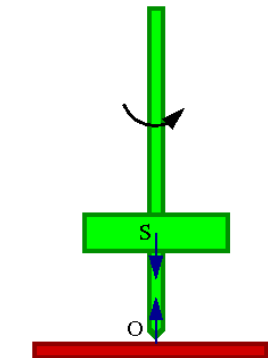
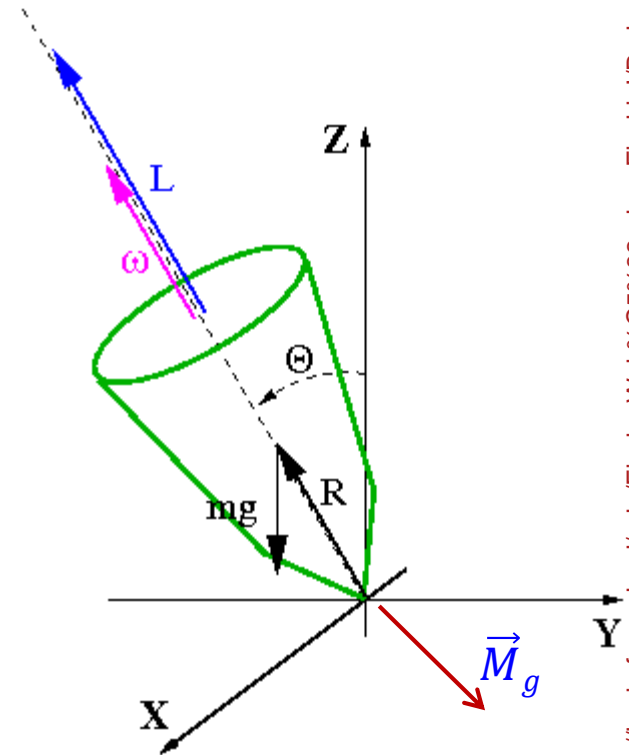
# Bąk

- Co się dzieje, jeśli obrót bryły sztywnej **nie zachodzi wokół nieruchomej osi**?
- Ruch bąka wirującego dookoła osi symetrii, która porusza się dookoła osi pionowej, zakreślając powierzchnię stożka.

## PRECESJA

gdyby bąk nie wirował-  
ustawienie pionowe-równowaga nietrwała,  
gdyby trochę wytrącić go z położenia  
równowagi – przewróci się!

gdy bąk wiruje  
wychylenie z tego położenia-powstanie  
wypadkowego momentu – ruch dookoła  
osi pionowej



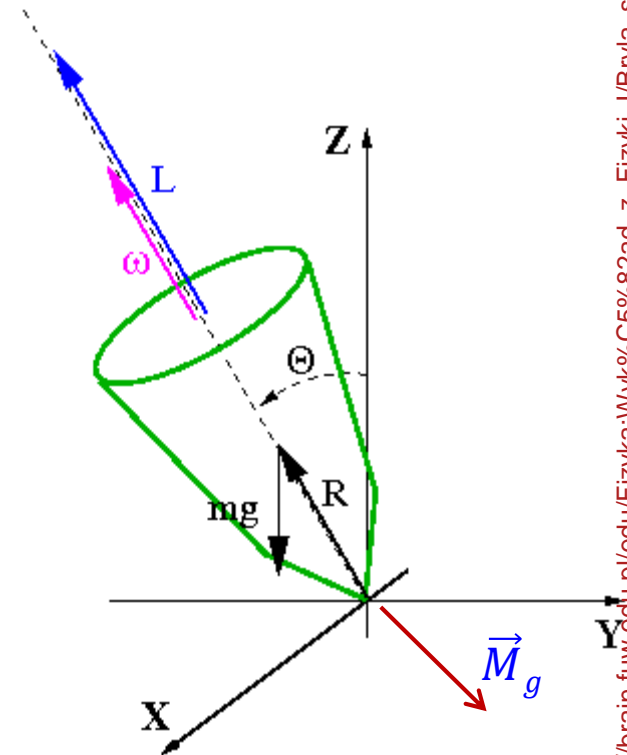
# Bąk - dynamika

Siła ciężkości przyłożona w środku masy:

$$\vec{M}_g = \vec{R} \times \vec{Q} ; \vec{M}_g \perp (\vec{R}, \vec{Q})$$

czyli:

- $\vec{M}_g$  jest prostopadły do momentu pędu  $\vec{L}$ ,
- moment  $\vec{M}_g$  nie zmienia **wartości** momentu pędu:  $\frac{dL}{dt} = 0$ ,
- Wektor momentu pędu  $\vec{L}$  obraca się wokół nieruchomej osi z prędkością  $\vec{\omega}_p$ .
- Siła ciężkości, działając na środek masy bąka, powoduje moment siły względem punktu styczności z podłogą.
- Moment ten skierowany jest poziomo i powoduje precesję bąka



# Precesja momentu pędu

moment siły powoduje zmianę **kierunku**

momentu pędu (zmiana  $\Delta \vec{L} \perp \vec{L}$ ):

$$\vec{M}_g = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

koniec wektora momentu pędu zakreśla okrąg w płaszczyźnie poziomej –

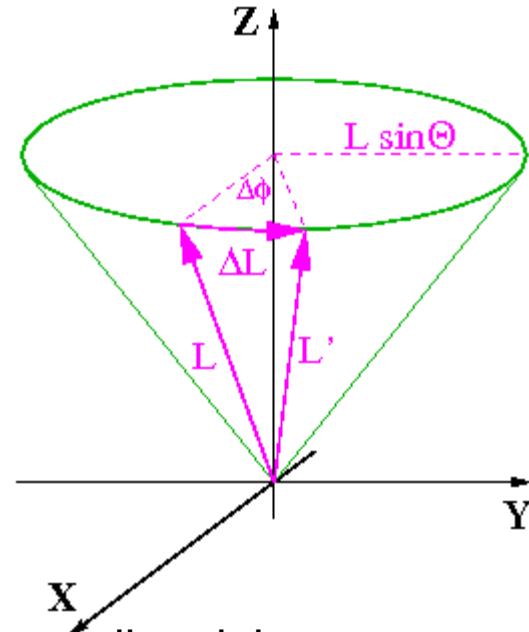
**PRECESJA.**

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L \sin\Theta} = \frac{M_g \Delta t}{L \sin\Theta}$$

$$M_g = mgR \sin\Theta$$

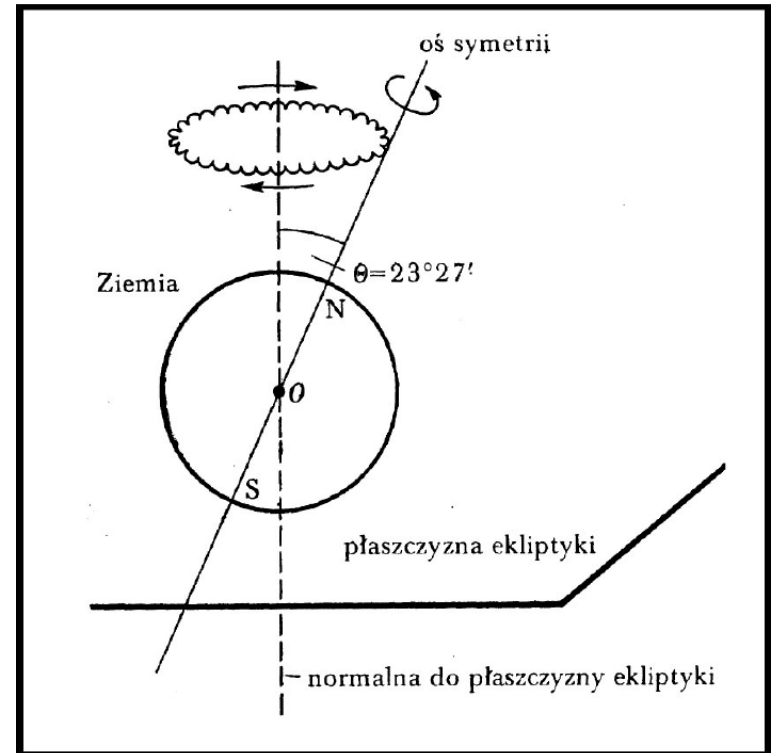
częstość precesji: 
$$\omega_p = \frac{mgR}{L}$$



- Częstość precesji maleje ze wzrostem momentu pędu - im szybciej bąk wiruje tym wolniej zmienia się kierunek .
- Częstość precesji nie zależy od kąta pochylenia osi bąka  $\Theta$
- Precesja pozwala zrównoważyć działanie zawętrznego momentu siły

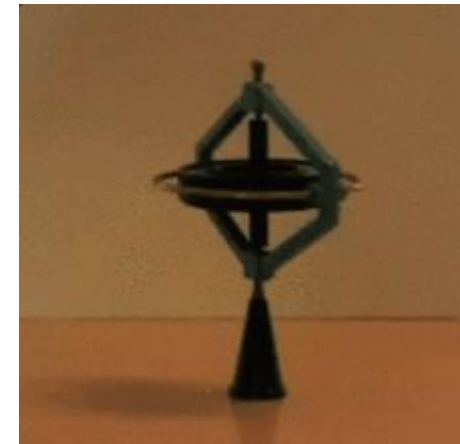
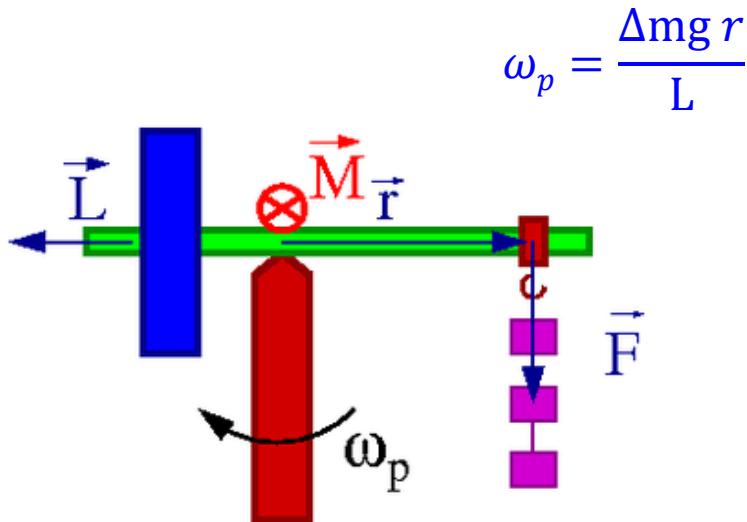
# Ziemia jako błąk

- Ziemia ma kształt spłaszczonej elipsoidy obrotowej wirującej wokół osi nie pokrywającej się z jej osią symetrii-
- Na Ziemię działa zewnętrzny moment siły spowodowany:
  - spłaszczeniem,
  - niejednorodnością pola grawitacyjnego (oddziaływanie Słońca, Księżyca, innych planet
- Precesja astronomiczna- Ziemia zakreśla stożek wokół kierunku normalnego do płaszczyzny ekliptyki z okresem 26 tys. lat.



# Żyroskop

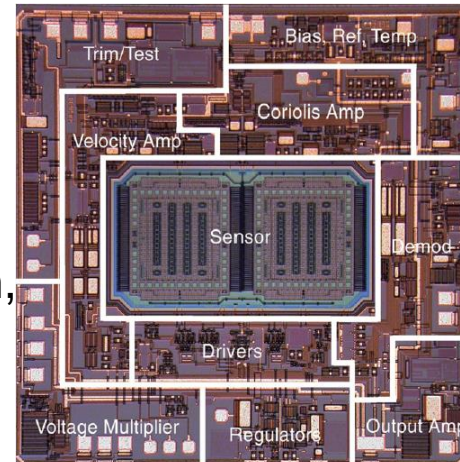
- Model żyroskopu składa się z wirującego dysku i przeciwagi, które mogą obracać się na swobodnej osi.
- Układ jest zrównoważony, gdy  $L = 0$  i będzie dążył do równowagi również gdy dysk wiruje.
- Jeżeli zmienimy ciężar przeciwagi – oś zacznie się obracać – częstość precesji żyroskopu wynosi:





# Żyroskop w technice

- Kompas żyroskopowy (żyrokompas):
  - oddziaływanie momentu pędu żyroskopu – moment sił ciężkości prowadzi do precesji wokół kierunku osi wirowania Ziemi (bez względu na położenie początkowe) – pomiar kierunku północnego.
- Żyroskopy prędkościowe – mierzą prędkość obracającego się ciała, do którego są przymocowane
- Pojazdy typu Segway – efekt żyroskopowy z siłą Coriolisa
- MEMS (Micro Electric-Mechanical System)– elektroniczne układy (piezoelektryk) rozpoznające kierunek ruchu i prędkość wykorzystane w telefonach, kontrolerach gier, konsolach, kontroli przebiegu produkcji, gier sportowych.



<http://en.wikipedia.org/wiki/Gyroscope>

<http://www.segway.com.pl/na-co-dzien/sposob-dzialania/>

# Żyroskop

- Pocisk wylatujący z gwintowanej lufy (lub torpeda) obraca się wokół własnej osi – jest to żyroskop o własnym momencie pędu. moment siły oporu powietrza powoduje precesję pocisku wokół stycznej do toru, ale nie powoduje przekręcenia pocisku.
- Negatywne skutki precesji – uszkodzenia turbin i innych szybko obracających się mechanizmów

## Pokazy zasady zachowania momentu pędu

Wirujące bąki

Obracająca się tarcza na sznurze

Ważka żyroskopowa