

# Podstawy fizyki – sezon 1

## **VII. Ruch drgający**

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFliS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,  
D11, pok. 111  
amucha@agh.edu.pl  
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

# Ruch skutkiem działania siły

- Przypominamy: ruch ciała spowodowany jest (nie-)działaniem siły. Można znaleźć położenie, prędkość i przyspieszenie ciała, jeżeli znamy siłę, która na ciało działa.

- Do tej pory pokazano dwa przykłady:

- ruch ciała w polu siły ciężkości

$$F_g = mg$$

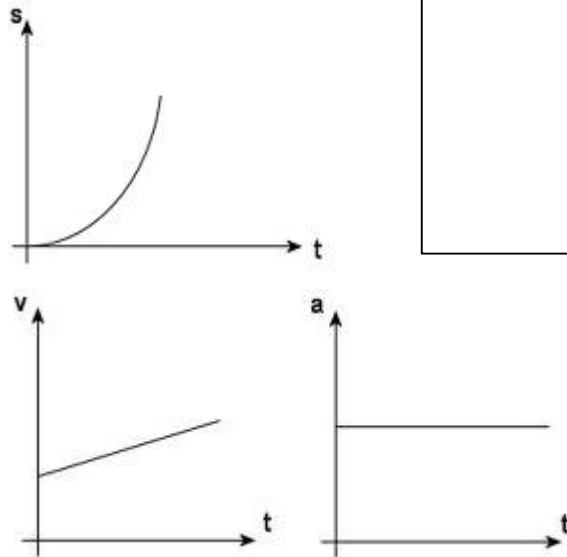
$$m \frac{dv}{dt} = mg$$

Rozwiązujemy:

$$a(t) = g$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$



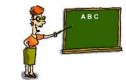
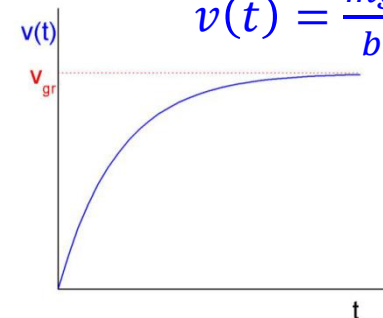
$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

- ruch ciała w polu siły ciężkości z oporem powietrza

$$F_{op} = -bv$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - bv$$

$$v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-\frac{b}{m}t})$$



sprawdzam!:

# Siła harmoniczna

- Załóżmy, że chcemy opisać ruch pod wpływem siły postaci:  $F(x) = -kx$

- i. Jaką sytuację fizyczną opisuje taka siła?

Jest to siła proporcjonalna do przemieszczenia i skierowana przeciwnie do przemieszczenia – **SIŁA HARMONICZNA**

- ii. Napiszmy równania ruchu:  $m \frac{dv}{dt} = -kx$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

- iii. Rozwiążmy równania ruchu:

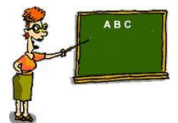
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

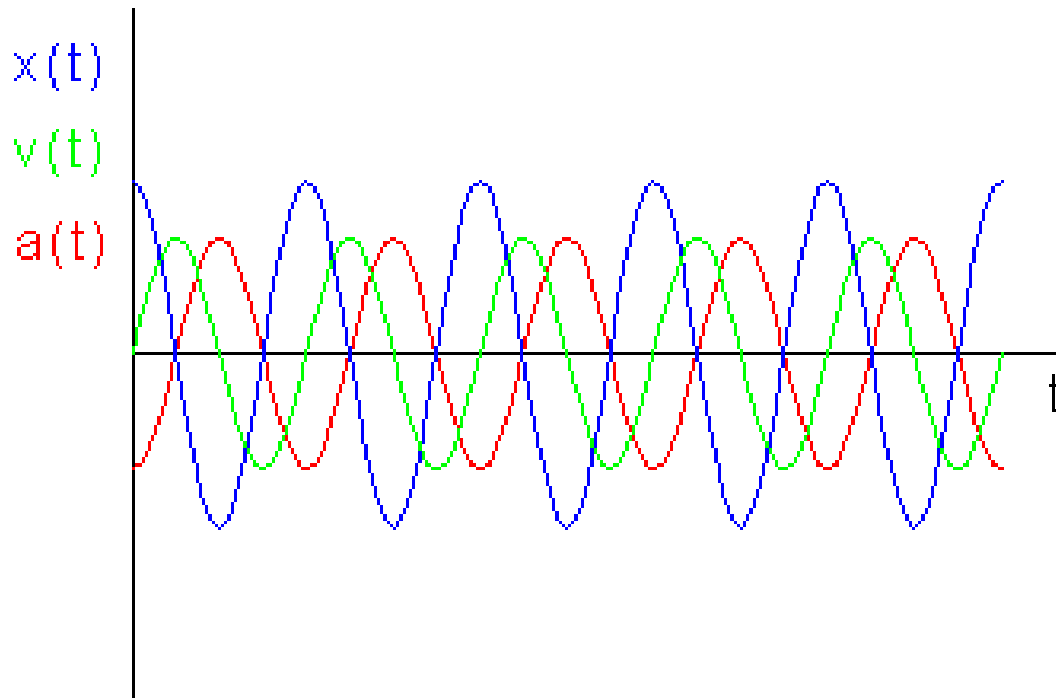
- iv. Zinterpretujmy rozwiązania.

**A**- amplituda,  **$\omega$**  – częstość,  **$\varphi$**  - faza początkowa



# Ruch harmoniczny - interpretacja

- Położenie, prędkość i **przyspieszenie** ciała są okresowymi funkcjami czasu!



$$\begin{aligned}x_{max} &= A \\v_{max} &= A\omega \\a_{max} &= A\omega^2\end{aligned}$$

- Ruch pod wpływem siły harmonicznej nazywamy **ruchem harmonicznym**.

Nie każdy ruch okresowy jest ruchem harmonicznym.

# Energia drgań

- Energia kinetyczna i potencjalna w ruchu harmonicznym:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

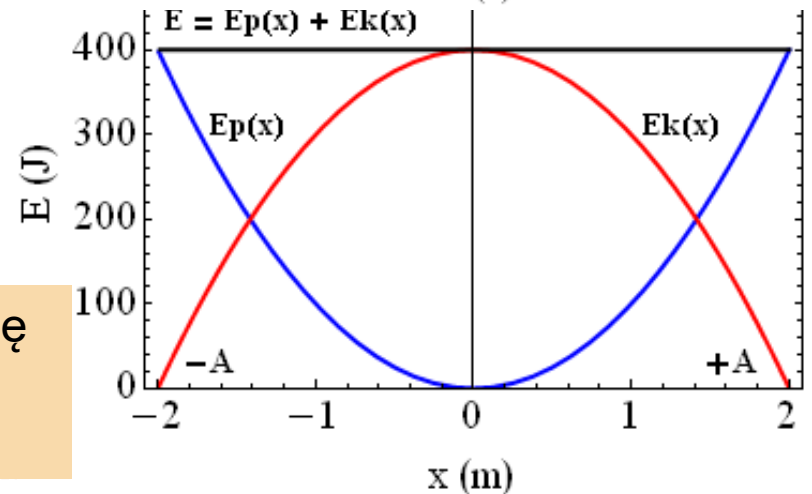
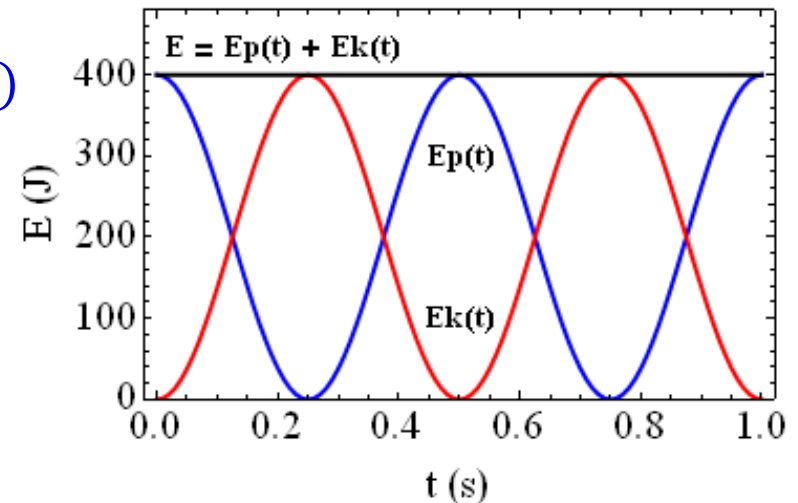
$$E_p(t) = \frac{1}{2}mx^2(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

- Energia całkowita:

$$E_c = E_p(t) + E_k(t) = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

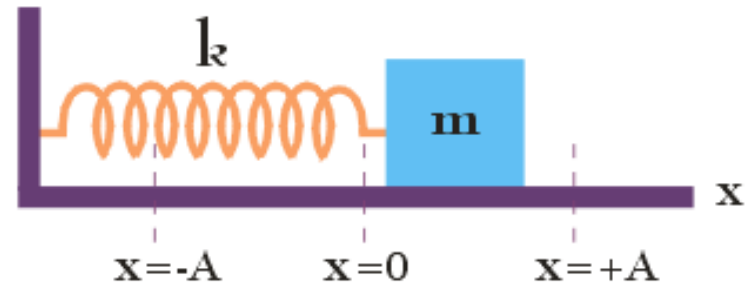
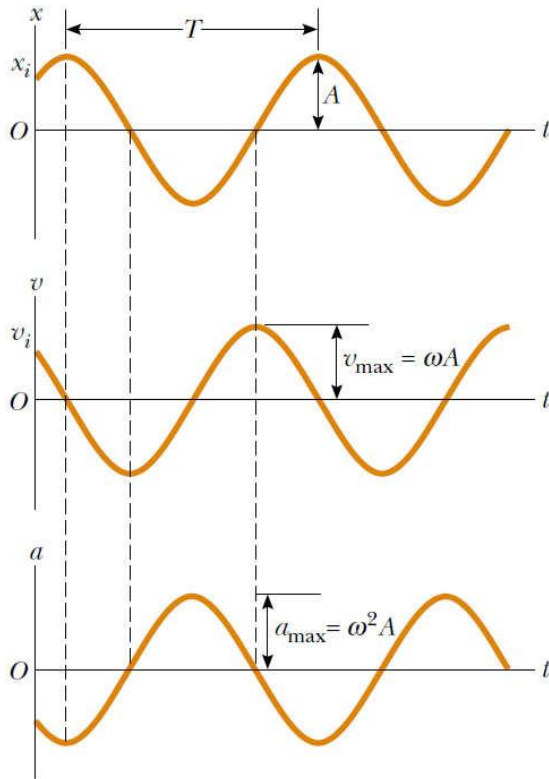
$$\frac{1}{2}kA^2 [\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi)] = \frac{1}{2}kA^2$$

Energia kinetyczna i potencjalna zmieniają się okresowo z czasem, całkowita energia jest stała



# Ruch drgający w przykładach

- Oscylator harmoniczny – masa zawieszona na sprężynie. Ruch masy  $m$  spowodowany jest siłą sprężystości sprężyny



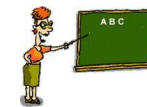
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

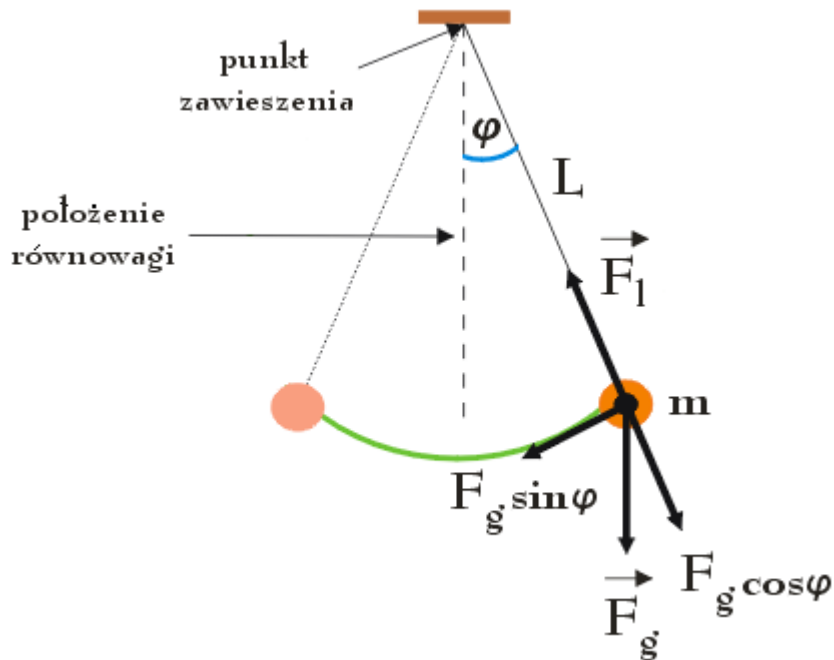


$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



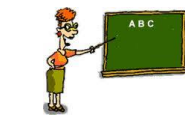
# Ruch drgający w przykładach

## Wahadło matematyczne



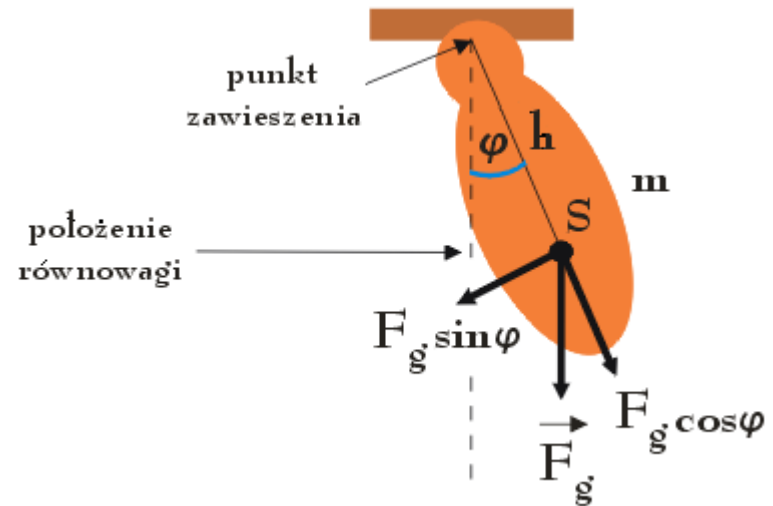
C:\WYKŁADY\  
2013-14\drzania2

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



wprowadzam!

## Wahadło fizyczne



<http://efizyka.net.pl/>

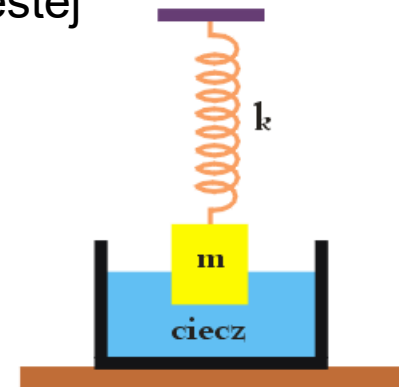
Ruch wahadła matematycznego i fizycznego jest harmoniczny TYLKO dla **MAŁYCH WYCHYLEŃ**, tzn. takich, że:

$$\sin \varphi = \varphi$$

# Drgania tłumione

- Załóżmy teraz, że masa drgająca na sprężynie zanurzona jest w gęstej cieczy.
- Obserwujemy tłumienie drgań – ruch odbywa się pod wpływem siły sprężystości  $F_s = -kx$  i siły tłumiącej  $F_{\text{tł}} = -bv$ :

II Zas.Dyn.New: 
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$



- Rozwiązanie równania ruchu oscylatora tłumionego:

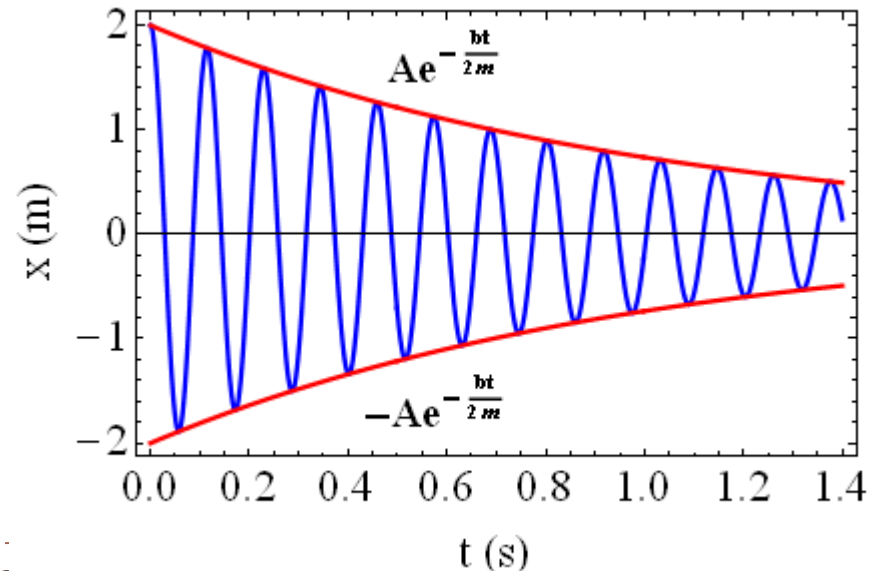
$$x(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \varphi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$



- Energia:

$$E(t) = \frac{1}{2} kA e^{-\frac{bt}{2m}}$$





# Drgania tłumione w zależności od tłumienia

- Rozwiązanie równania ruchu oscylatora tłumionego:

$$x(t) = A e^{-\frac{bt}{2m}} \cos(\omega' t + \varphi)$$

amplituda drgań tłumionych

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

częstość kołowa drgań tłumionych

częstość kołowa drgań własnych

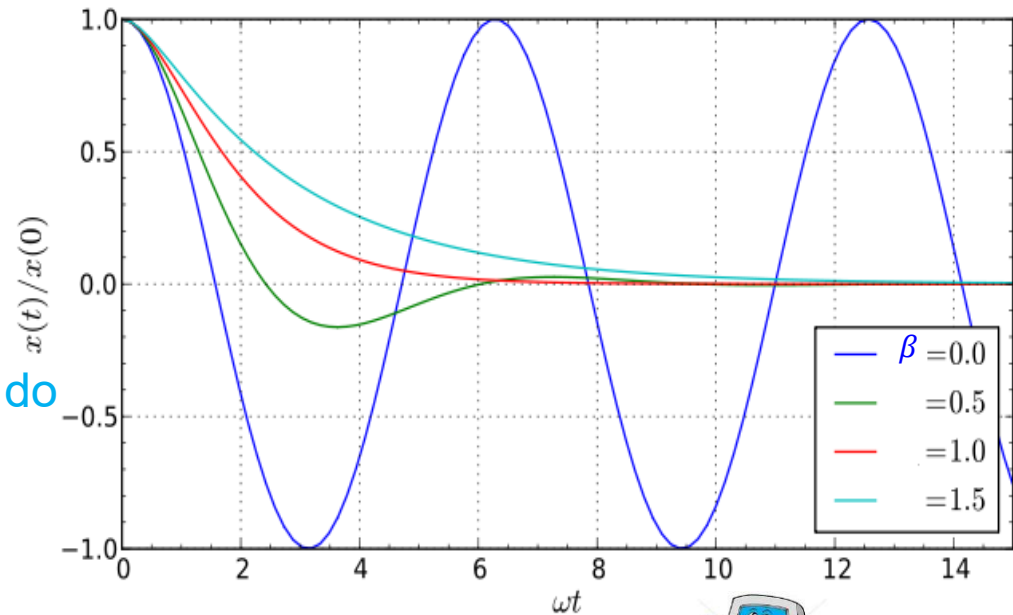
$$\beta = \frac{b}{2m}$$

współczynnik tłumienia

- W zależności od współczynnika tłumienia:
  - gdy  $b^2 < 4mk$  drgania tłumione,
  - gdy  $b^2 = 4mk$  tłumienie krytyczne,
  - gdy  $b^2 > 4mk$  aperiodyczny powrót do stanu równowagi

$$\beta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau}$$

$\beta$  – współczynnik tłumienia,  $\tau$  - stała czasowa



# Drgania z siłą wymuszającą

- Tłumienie drgań można kompensować działając siłą wymuszającą, np. okresową:  $F_z = F_0 \sin \omega t$

II Z.D.N:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t \quad \beta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \alpha_0 = \frac{F_0}{m}$$

- Rozwiązujemy?

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \sin \omega t$$

Założmy, że rozwiązanie jest postaci:

$$x(t) = A_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

co oznacza drgania niegasnące, ale zarówno amplituda, jak i przesunięcie fazowe są funkcją częstości siły wymuszającej  $\omega$

# Drgania z siłą wymuszającą

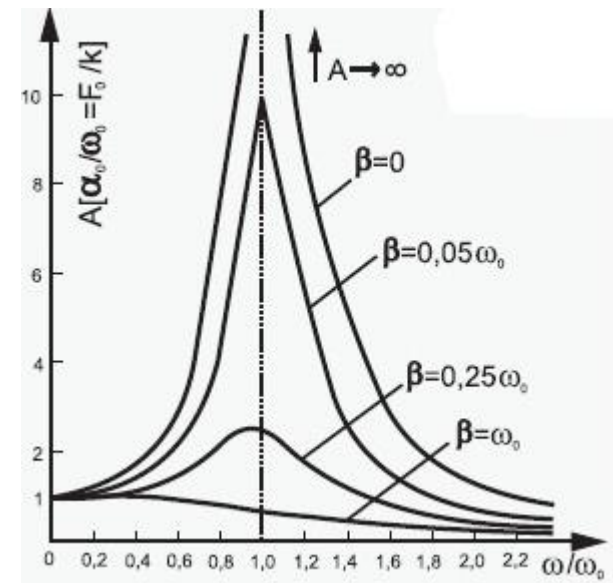
- Pokazać można, że amplituda drgań z siłą wymuszającą wynosi:

$$A_0(\omega) = \frac{\alpha_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2]^{1/2}}$$

a przesunięcie fazowe:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- Gdy częstość siły wymuszającej  $\omega$  będzie w pobliżu częstości drgań własnych  $\omega_0$ , a tłumienie  $\beta$  nie będzie za duże: amplituda wzrośnie do maksimum!
- Może dojść do zjawiska **REZONANSU**



# Rezonans

- Częstość rezonansowa (obliczymy ją poprzez znalezienie maksimum  $A_0(\omega)$ ):

- $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

- Odpowiada ona amplitudzie rezonansowej:

- $A_r = \frac{\alpha_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$

- Dla drgań swobodnych, dla których:  $\omega_r = \omega_0$  przesunięcie fazowe  $\varphi$  pomiędzy siłą a wychyleniem wynosi:  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .
- Oznacza to, że siła wymuszająca jest przesunięta o  $\frac{\pi}{2}$  w stosunku do wychylenia.
- Ale za to prędkość (policz!) jest w fazie z siłą wymuszającą!
- Moc zależy od prędkości, zatem w warunkach rezonansu dochodzi do maksymalnej absorpcji mocy przez oscylator – znaczenie przy rezonansie elektrycznym


# Drgania, rezonanse i życie




Wiatr wywołujący drgania o częstotliwości zbliżonej do częstotliwości własnej drgań mostu prowadzi do jego zniszczenia (Tacoma Narrows, USA 1940)

# Składanie drgań harmoniczných

- **Zasada superpozycji** – jeżeli ciało podlega jednocześnie dwóm drganiom, to jego wychylenie jest sumą wychyleń wynikających z każdego ruchu z osobna.
- Składanie drgań zachodzących w tych **samych kierunkach**:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\mathbf{x_w(t) = x_1(t) + x_2(t)}$$

- Składanie drgań w kierunkach **wzajemnie prostopadłych**:

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) \qquad y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

$$\mathbf{y(x)}$$

## Składanie drgań (jeden kierunek)

- Składamy drgania o tej samej (lub nie) amplitudzie i częstotliwości. Drgania są przesunięte względem siebie o fazę  $\varphi$  :

$$x_1(t) = A \cos \omega t ; \quad x_2(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

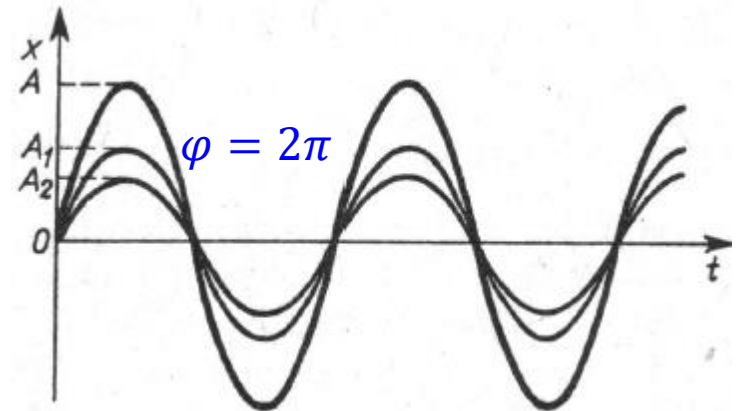
- W wyniku złożenia otrzymujemy (do policzenia, zwykła trygonometria!):

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t) = \underbrace{2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{amplituda wypadkowa}} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

amplituda wypadkowa

- Są to drgania o amplitudzie wypadkowej zależnej od fazy  $\varphi$ :

- dla  $\varphi = \pi$ ;  $x_w = 0$  – całkowite **wygaszenie** drgań,
- dla  $\varphi = 2\pi$ ;  $x_w = 2A \cos \omega t$  – dwukrotny wzrost amplitudy drgań - **wzmocnienie**,
- Jeżeli różnica faz pozostaje stała w czasie – **drgania koherentne**



# Dudnienia

- Nakładanie się drgań o bardzo zbliżonych częstościach:

$$x_1(t) = A \sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \quad x_2(t) = A \sin\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t$$

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t) = A \left[ \sin\left(\omega - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t + \sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \right]$$

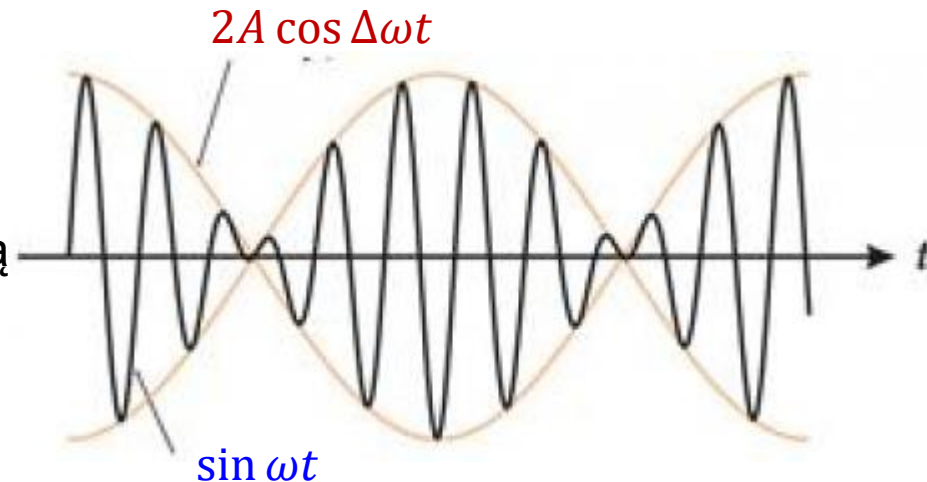
- Korzystając z tożsamości trygonometrycznych:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$x_w(t) = \underbrace{2A \cos \Delta\omega t}_{\text{wolnozmienną się amplitudą wypadkową}} \sin \omega t$$

wolnozmienną się  
amplitudą wypadkową

- Efekt sumowania – drgania z pierwotną częstością, ale obwiednia zmienia się powoli w czasie (efekty dźwiękowe, elektrotechnika)





# Składanie niekoherentne

- Jeżeli różnica faz drgań składowych zmienia się z upływem czasu w dowolny sposób, to również amplituda drgań wypadkowych zmienia się z czasem – niekoherentne składanie drgań.
- Drgania wypadkowe typu:

$$x(t) = A(t) \cos[\omega t + \varphi(t)]$$

nazywamy modulowanymi, gdy:

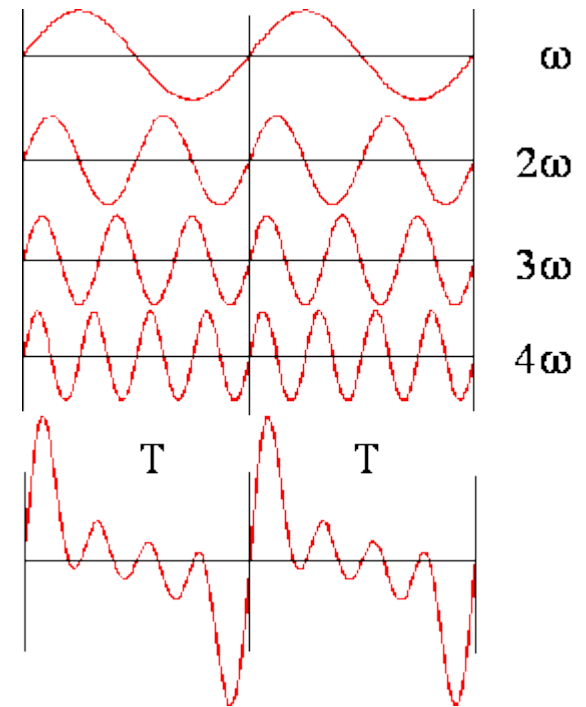
- $A = \text{const}$ ;  $\varphi(t)$  - modulowana jest faza – FM
- $\varphi = \text{const}$ ;  $\frac{dA}{dt} \ll \omega A_{\text{max}}$  - modulowana amplituda - AM

# Analiza harmoniczna

- **Analiza harmoniczna** – metoda przedstawienia złożonych drgań modulowanych w postaci szeregu prostych drgań harmonicznych
- G.Fourier – dowolne drganie można przedstawić jako sumę prostych drgań harmonicznych o wielokrotnościach pewnej podstawowej częstości kątowej  $\omega$ :

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A_n \sin(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$

- Pierwszy wyraz szeregu – częstość podstawowa  $\omega$ , następne – częstości harmoniczne- „pierwsza”, „druga”, itp.
- W ten sposób można za pomocą prostych drgań harmonicznych przedstawić drganie o dowolnym kształcie, np. piłokształtnym, trójkątnym, prostokątnym..

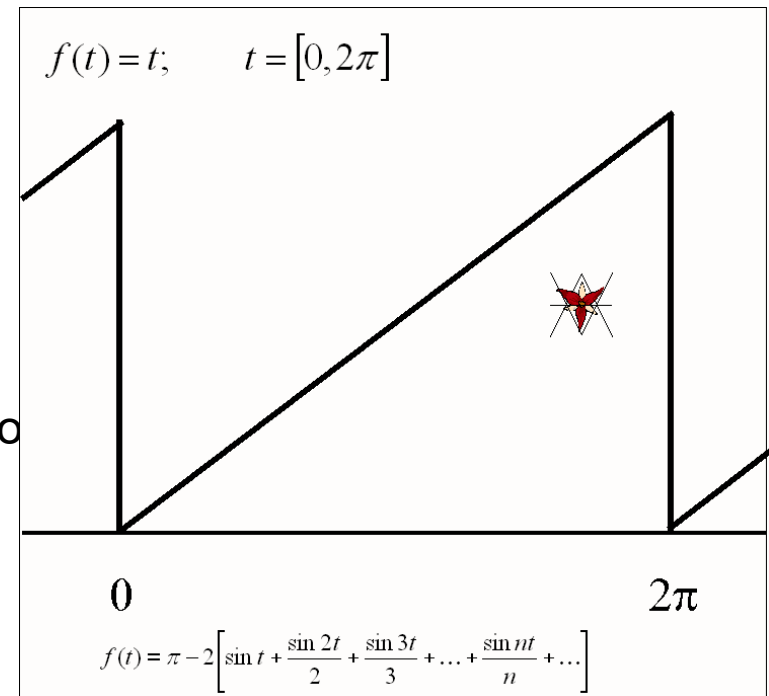


# Analiza harmoniczna

- **Analiza harmoniczna** – metoda przedstawienia złożonych drgań modulowanych w postaci szeregu prostych drgań harmonicznyc
- G.Fourier (1807)– dowolne drganie można przedstawić jako sumę prostych drgań harmonicznyc o wielokrotnościach pewnej podstawowej częstotliwości kątovej  $\omega$ :

$$x(t) = \sum_{n=0}^N A_n \sin(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$

- Pierwszy wyraz szeregu – częstotliwość podstawowa  $\omega$ , następne – częstotliwości harmoniczne- „pierwsza”, „druga”, itp.
- W ten sposób można za pomocą prostych drgań harmonicznyc przedstawić drganie o dowolnym kształcie, np. piłokształtnym, trójkątnym, prostokątnym..



# Krzywe Lissajous

- Składania drgań harmoniczych o tych samych częstościach  $\omega$  w kierunkach wzajemnie prostopadłych:

$$x(t) = A_x \sin(\omega t) \qquad y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$$



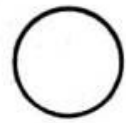


- Jules Lissajous (1857) - demonstracja wyniku, gdy:

$$\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$$

- $\varphi = 0^\circ$ :  $y(x) = \frac{A_y}{A_x} x$  - linia prosta
- $\varphi = 180^\circ$ :  $y(x) = -\frac{A_y}{A_x} x$  - linia prosta
- $\varphi = 90^\circ$ :  $x(t) = A_x \sin(\omega t) \quad y(t) = A_y \cos(\omega t)$

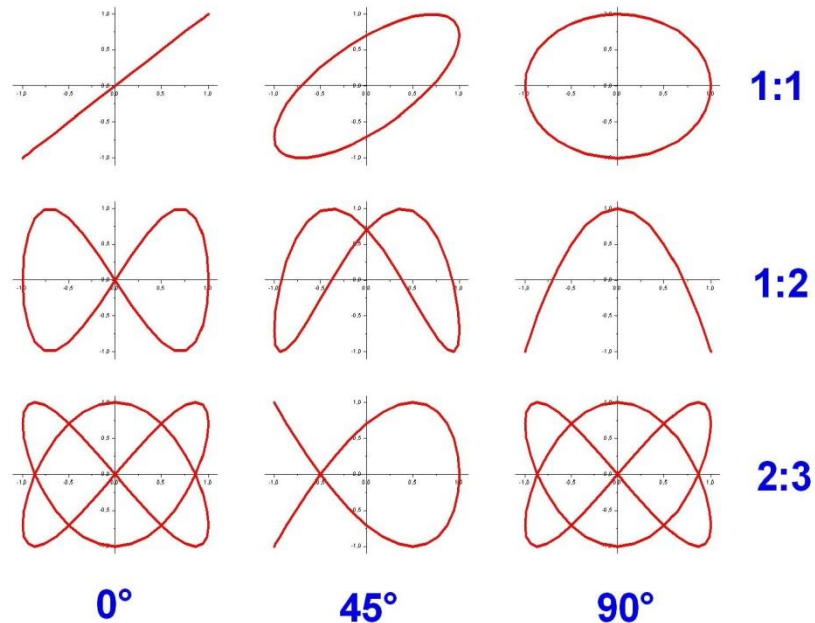
$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1$$

- elipsa, okrąg

Kąt $\varphi$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
Stosunek częstości					
$\frac{f_x}{f_y} = \frac{1}{1}$					

# Krzywe Lissajous – dowolna faza

- Inne różnice faz, ale te same częstości – elipsy, ale w kierunkach innych niż osie ukł. współrzędnych.
- Przypadek ogólny – dowolne fazy, częstości, amplitudy – krzywe Lissajous:



# Podsumowanie

- Rozwiązanie równania ruchu pod wpływem siły o zadanej postaci pozwala na wyznaczenie położenia, prędkości i przyspieszenia.
- Ruch pod wpływem siły harmoniczej – rozwiązanie, parametry, przykłady:
  - prosty oscylator harmoniczny,
  - wahadło matematyczne,
  - wahadło fizyczne.
- Ruch z tłumieniem – równanie, rozwiązanie, interpretacja.
- Ruch drgający pod wpływem siły wymuszającej. Rezonans.
- Składanie drgań:
  - wzmocnienie, wygaszenie, drgania koherentne,
  - dudnienia,
  - analiza harmoniczna
  - krzywe Lissajous
- Pokazy