

Podstawy fizyki – sezon 1

VI. Ruch obrotowy 2 (!)

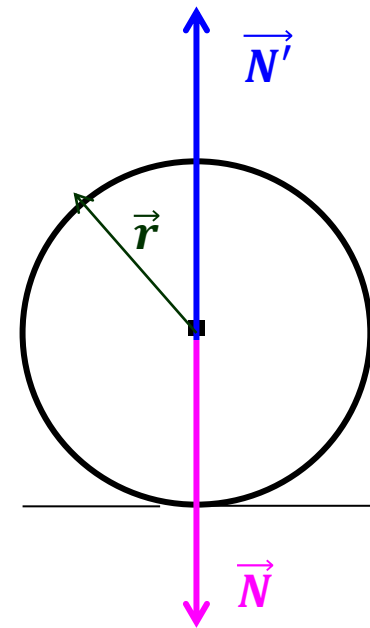
Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFliS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 111
amucha@agh.edu.pl
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

Tarcie toczne

- ▶ **Tarcie toczne** jest to siła oporu działająca, gdy jedno ciało toczy się po drugim (opona na drodze, kula na równi, łożyska)
- ▶ Tarcie toczne jest zazwyczaj dużo mniejsze od kinetycznego (poślizgowego)- szerokie zastosowanie w technice.
- ▶ Toczenie jest **ZAWSZE** związane z odkształceniem powierzchni (nawet b.małym).
- ▶ Tarcie toczne zależy od promienia toczącego się ciała.

gdy ciało spoczywa:
siła reakcji podłoża leży na tej samej
prostej co siła nacisku na podłoże



Tarcie toczne - dynamika

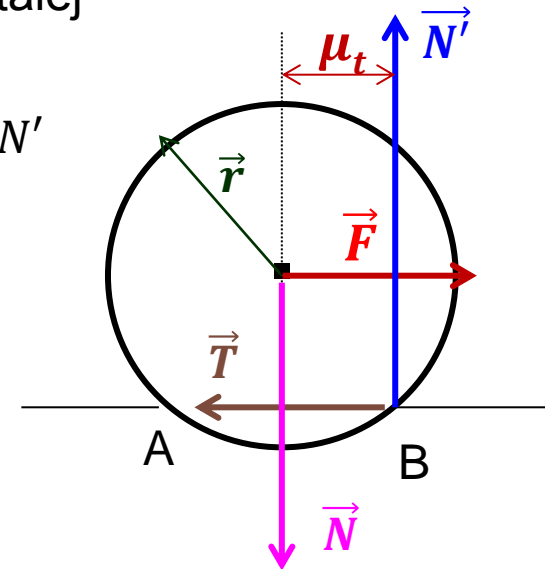
Gdy ciało porusza się (toczy) pod wpływem siły \vec{F} :

- Walec (kula) styka się z podstawą wzdłuż powierzchni AB.
- \vec{F} - siła przyłożona do walca, \vec{T} – siła tarcia, $F = T$ (przy stałej prędkości)
- \vec{N} – siła normalna $N = mg$, \vec{N}' – siła reakcji podłoża, $N = N'$
- Pod wpływem siły \vec{F} , nacisk w pt B rośnie, w A maleje. punkt przyłożenia siły N' przesuwa się w stronę \vec{F} .
- W miarę wzrostu \vec{F} – przesunięcie rośnie, aż do osiągnięcia wartości granicznej μ_t
- W tym momencie działają przeciwne do siebie momenty:

$$\vec{\mu}_t \times \vec{N}' \text{ i } \vec{r} \times \vec{T}$$

- Warunek równowagi: $\vec{\mu}_t \times \vec{N}' = \vec{r} \times \vec{T}$,

stąd współ. tarcia tocznego: $\mu_t = \frac{Tr}{N}$ [m]



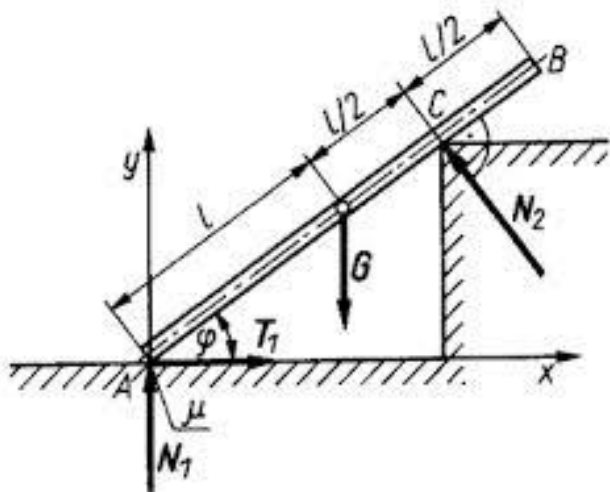
wynika z tego również, że toczenie jest możliwe, gdy siła F przekroczy pewną wartość graniczną – poślizg (dyskusja)

Tarcie toczne w życiu

- ▶ Współczynnik tarcia tocznego jest zwykle bardzo mały, stosunek: $\frac{\mu_t}{r}$ można porównać do współ. tarcia poślizgowego, np. koło o promieniu 50cm po stali : $\frac{\mu_t}{r} = 0.0001$, $\mu_K = 0.09$
- ▶ Współczynnik tarcia tocznego ma wymiar długości! Odpowiada formalnie promieniowi kuli, przy toczeniu której siła tarcia byłaby równa sile nacisku
- ▶ Tarcie toczne toczącej się opony – ciekawe uwagi:
 - Rozmiar opony - opór toczenia odpowiada ugięciu ścian opony oraz powierzchni kontaktu z podłożem.
 - Przy tym samym ciśnieniu szersze opony rowerowe mają mniejsze ugięcie i z tego powodu mniejszy opór toczenia (aczkolwiek większy opór powietrza).
 - Stopień napompowania - mniejsze ciśnienie w oponach skutkuje większym ugięciem ścian opony a co za tym idzie większym tarciem tocznym.
 - Rzeźba bieżnika opony ma duży wpływ na opór toczenia. Im "grubszy" wzór bieżnika, tym większy opór toczenia. Dlatego też "szybkie" opony rowerowe mają drobny bieżnik, a ciężarówki zużywają mniej paliwa, kiedy bieżnik jest zużyty.
 - Mniejsze koła mają większy opór toczenia niż duże http://pl.wikipedia.org/wiki/Tarcie_toczne

Statyka

- ▶ Jakie warunki muszą być spełnione, aby bryła sztywna pozostawała w spoczynku pomimo wielu sił przyłożonych do niej?
- ▶ Ciało sztywne pozostaje w równowadze, gdy:
 - suma wektorowa wszystkich sił zewnętrznych wynosi zero,
 - suma wektorowa wszystkich zewnętrznych momentów sił (liczonych względem dowolnej osi) wynosi zero.



$$\sum \vec{F}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = \mathbf{0}$$

$$\sum \vec{M}_{iA} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{M}_{N1} + \vec{M}_{T1} + \vec{M}_{N2} + \vec{M}_G = \mathbf{0}$$

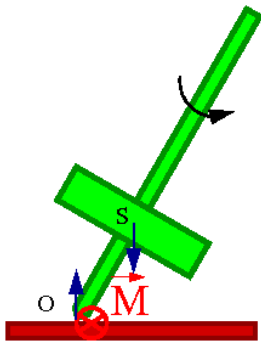
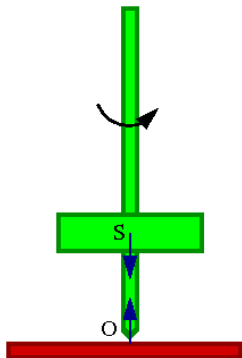
Uwaga na znalezienie odpowiednich kątów pomiędzy wektorami!

Bąk

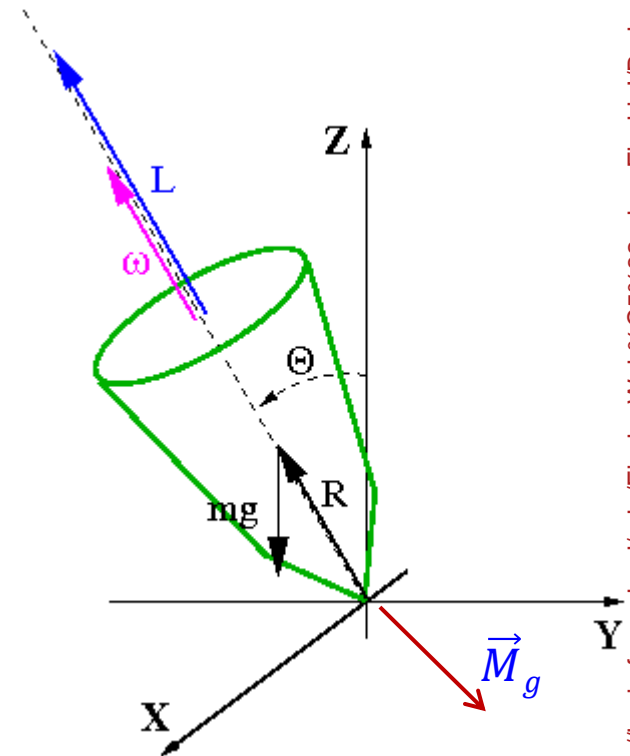
- ▶ Co się dzieje, jeśli obrót bryły sztywnej **nie zachodzi wokół nieruchomej osi**?
- ▶ Ruch bąka wirującego dookoła osi symetrii, która porusza się dookoła osi pionowej, zakreślając powierzchnię stożka.

PRECESJA

gdyby bąk nie wirował-
ustawienie pionowe-równowaga
nietrwała,
gdyby trochę wytrącić go z położenia
równowagi – przewróci się!



gdy bąk wiruje
wychylenie z tego położenia-powstanie
wypadkowego momentu – ruch dookoła
osi pionowej



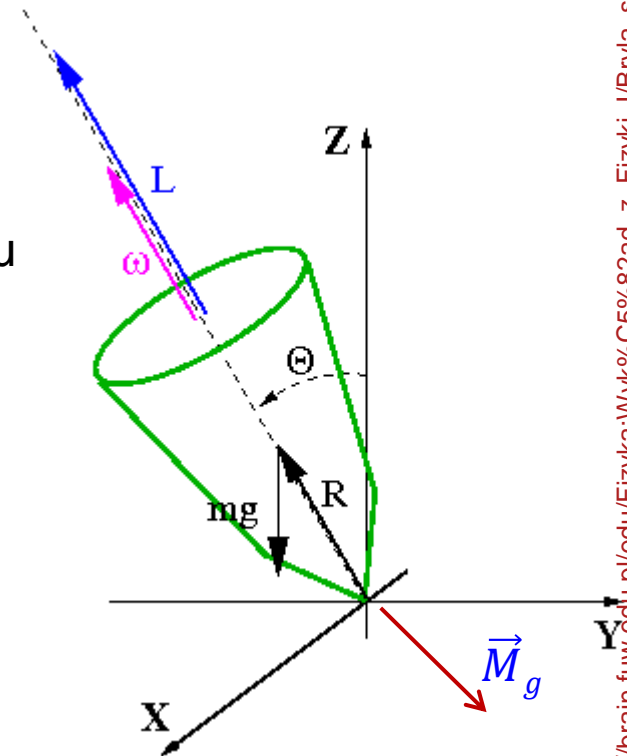
Bąk - dynamika

Siła ciężkości przyłożona w środku masy:

$$\vec{M}_g = \vec{R} \times \vec{Q} ; \vec{M}_g \perp (\vec{R}, \vec{Q})$$

czyli:

- \vec{M}_g jest prostopadły do momentu pędu \vec{L} ,
- że moment \vec{M}_g nie zmienia **wartości** momentu pędu: $\frac{dL}{dt} = 0$,
- ▶ Wektor momentu pędu \vec{L} obraca się wokół nieruchomej osi z prędkością $\vec{\omega}_p$.
- ▶ Siła ciężkości, działając na środek masy bąka, powoduje moment siły względem punktu styczności z podłogą.
- ▶ Moment ten skierowany jest poziomo i powoduje precesję bąka



Precesja momentu pędu

moment siły powoduje zmianę **kierunku**

momentu pędu (zmiana $\Delta\vec{L} \perp \vec{L}$):

$$\vec{M}_g = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

koniec wektora momentu pędu zakreśla okrąg w płaszczyźnie poziomej –

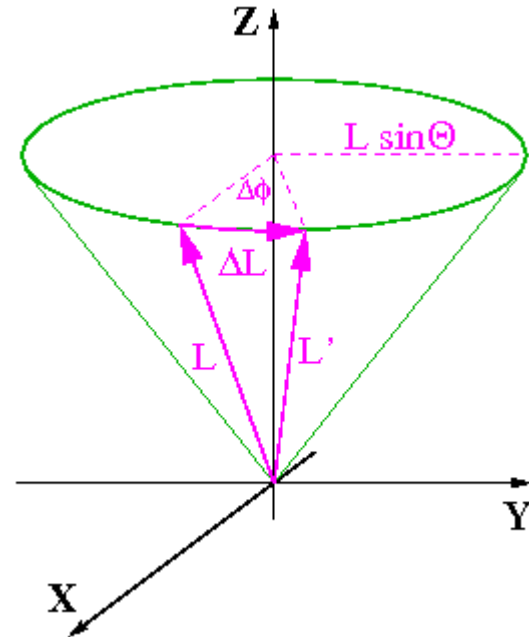
PRECESJA.

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L \sin\Theta} = \frac{M_g \Delta t}{L \sin\Theta}$$

$$M_g = mgR \sin\Theta$$

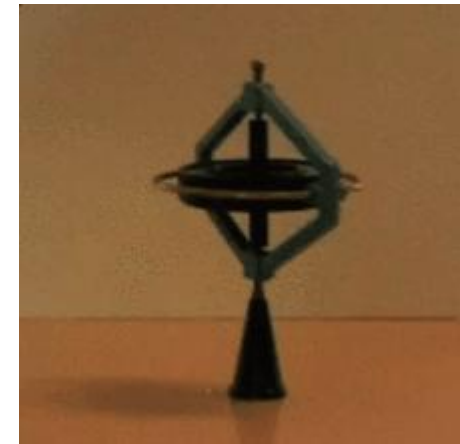
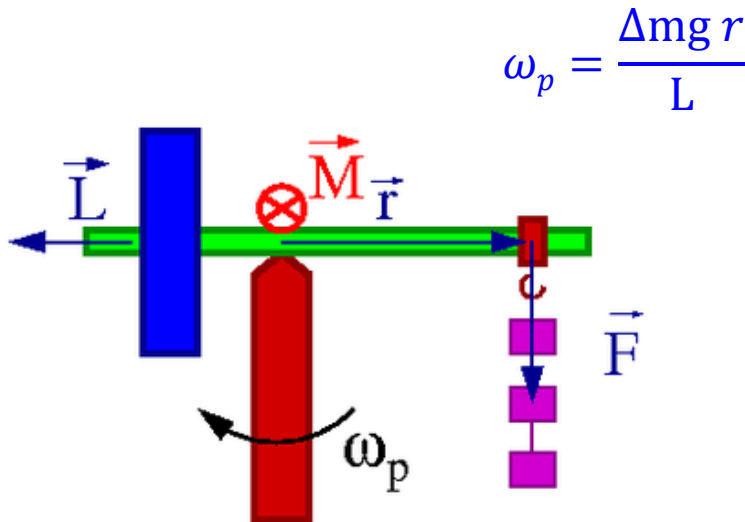
częstość precesji:
$$\omega_p = \frac{mgR}{L}$$



- Częstość precesji maleje ze wzrostem momentu pędu - im szybciej bąk wiruje tym wolniej zmienia się kierunek .
- Częstość precesji nie zależy od kąta pochylenia osi bąka Θ
- Precesja pozwala zrównoważyć działanie zewnętrznej momentu siły

Żyroskop

- ▶ Model żyroskopu składa się z wirującego dysku i przeciwagi, które mogą obracać się na swobodnej osi.
- ▶ Układ jest zrównoważony, gdy $L = 0$ i będzie dążył do równowagi również gdy dysk wiruje.
- ▶ Jeżeli zmienimy ciężar przeciwagi – oś zacznie się obracać – częstość precesji żyroskopu wynosi:



Żyroskop w technice

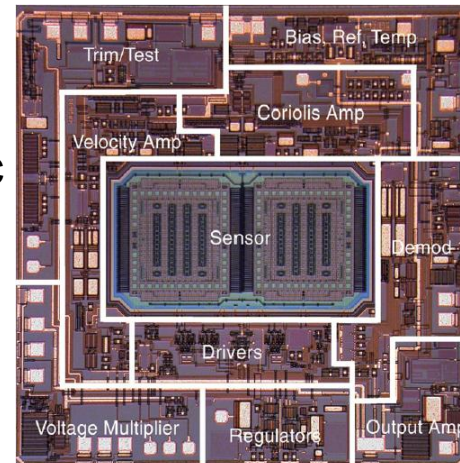
- ▶ Kompas żyroskopowy (żyrokompas):

oddziaływanie momentu pędu żyroskopu – moment siły ciężkości prowadzi do precesji wokół kierunku osi wirowania Ziemi (bez względu na położenie początkowe) pomiar kierunku północnego.

- ▶ Żyroskopy prędkościowe – mierzą prędkość obracającego się ciała, do którego są przymocowane

- ▶ Pojazdy typu Segway – efekt żyroskopowy z siłą Coriolisa

- ▶ MEMS (Micro Electric-Mechanical System)– elektroniczne układy rozpoznające kierunek ruchu i prędkość wykorzystane w telefonach, kontrolerach gier, konsolach, kontroli przebiegu produkcji, gier sportowych.



<http://en.wikipedia.org/wiki/Gyroscope>

<http://www.segway.com.pl/na-co-dzien/sposob-dzialania/>

Żyroskop

- ▶ Pocisk wylatujący z gwintowanej lufy (lub torpeda) obraca się wokół własnej osi – jest to żyroskop o własnym momencie pędu. moment siły oporu powietrza powoduje precesję pocisku wokół stycznej do toru, ale nie powoduje przekręcenia pocisku.
- ▶ Negatywne skutki precesji – uszkodzenia turbin i innych szybko obracających się mechanizmów

Pokazy zasady zachowania momentu pędu

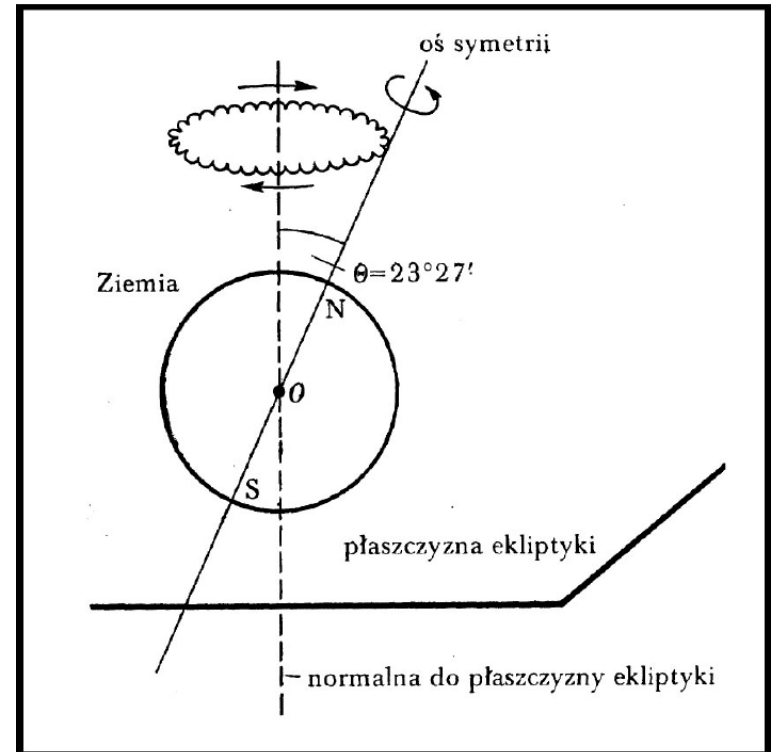
Wirujące bąki

Obracająca się tarcza na sznurze

Ważka żyroskopowa

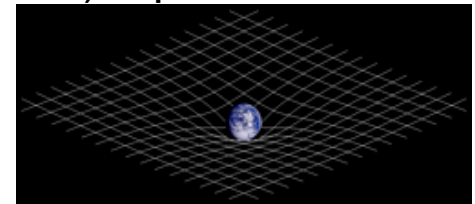
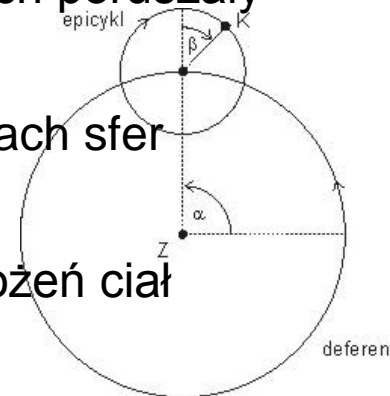
Ziemia jako błąk

- ▶ Ziemia ma kształt spłaszczonej elipsoidy obrotowej wirującej wokół osi niepokrywającej się z jej osią symetrii-
- ▶ Na Ziemię działa zewnętrzny moment siły spowodowany:
 - spłaszczeniem,
 - niejednorodnością pola grawitacyjnego (oddziaływanie Słońca, Księżyca, innych planet
- ▶ Precesja astronomiczna- Ziemia zakreśla stożek wokół kierunku normalnego do płaszczyzny ekliptyki z okresem 26 tys. lat.



GRAWITACJA – trochę historii

- ▶ IV p.n.e. Arystoteles (Grecja)- nie ma ruchu bez przyczyny – ciało spada na Ziemię, bo taka jest jego natura, cięższe przedmioty spadają szybciej
- ▶ Ptolemeusz I n.e (Egipt, Aleksandria) – model geocentryczny – Ziemia stanowiła środek, wokół niej, po bardzo skomplikowanych orbitach poruszały się Słońce, Księżyc i inne planety (ale używał matematyki)
- ▶ Kopernik – 1543 „De revolutionibus orbium coelestium” (O obrotach sfer niebieskich);
- ▶ Tycho Brahe (1546-1601) – 20 lat obserwacji „gołym okiem” położenia ciał niebieskich z dokładnością 1-2 minut kątowych
- ▶ Johannes Kepler (1571-1630) – analiza obserwacji Tycho Brahe – trzy prawa i bardzo dokładne tablice z położeniami gwiazd.
- ▶ Izaak Newton „Matematyczne zasady filozofii przyrody” (1687) – prawo powszechnego ciążenia
- ▶ Ogólna teoria względności A. Einsteina 1915 – Zakrzywienie przestrzeni wokół źródła grawitacji



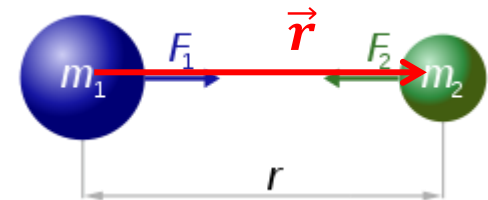
Siła grawitacji

- ▶ Oddziaływanie grawitacyjne jest jednym z trzech oddziaływań fundamentalnych.
- ▶ Prawo powszechnego ciążenia (Newton 1687):
- ▶ Siła działająca pomiędzy dwoma punktami materialnymi o masach m_1 i m_2 , znajdującymi się w odległości r , jest siłą przyciągającą, skierowaną wzdłuż prostej łączącej te punkty o wartości:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- ▶ W postaci wektorowej siła działająca na masę m_2 ze strony m_1 :

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

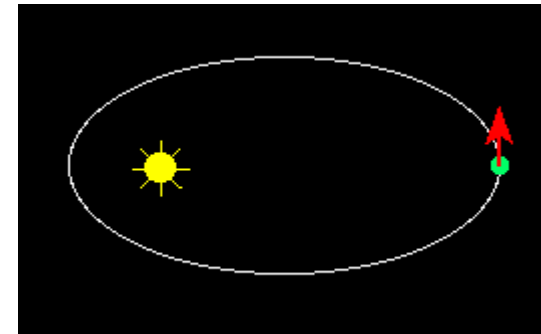
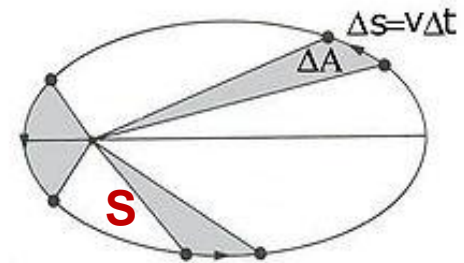
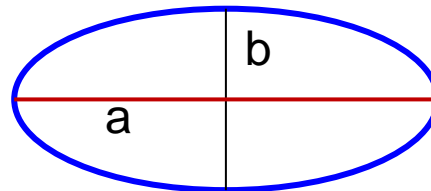


$G=6.673 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ - stała grawitacyjna

Prawa Keplera (1619)

- I. Wszystkie planety poruszają się po orbitach eliptycznych. W jednym z ognisk elipsy znajduje się Słońce.
- II. Promień wodzący planety zakreśla w równych odstępach równe pola.
- III. Kwadraty okresów obiegu planet dookoła Słońca są proporcjonalne do sześciątów wielkich półosi elipsy:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$



Są to prawa historyczne. Prawa Keplera wynikają wprost z zasad dynamiki Newtona.

Kepler opisał **JAK PORUSZAJĄ SIĘ PLANETY**, a Newton wyjaśnił dodatkowo **DLACZEGO** tak się poruszają (prawo powszechnego ciążenia, siła, ciężar, masa).

Ruchy planet

- ▶ II prawo Keplera wynika bezpośrednio z zasady zachowania momentu pędu:

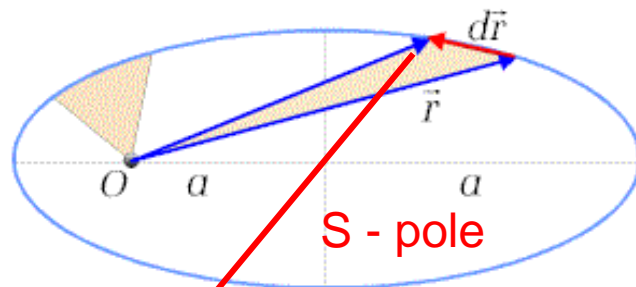
Moment pędu jest zachowany, gdy znika moment siły działającej na ciało. Jest to możliwe, gdy:

- nie działa siła,
- siła jest zawsze równoległa do promienia wodzącego, czyli np. dla **sił centralnych**:

Jeżeli siła jest centralna: $\vec{F}_g = f(r)\vec{r}$, czyli $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = 0$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = \text{const},$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



$$d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r}$$

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{v}dt$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{L}$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \text{const}$$

▪ prędkość polowa jest stała,

Gdy moment pędu jest zachowany, ruch jest płaski, odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora momentu pędu.

Ruch w polu sił centralnych jest płaski (\vec{r}, \vec{v}) .

Ruchy planet

- ▶ III prawo Keplera jest konsekwencją prawa powszechnego ciążenia, gdzie rolę siły dośrodkowej pełni siła grawitacyjna:

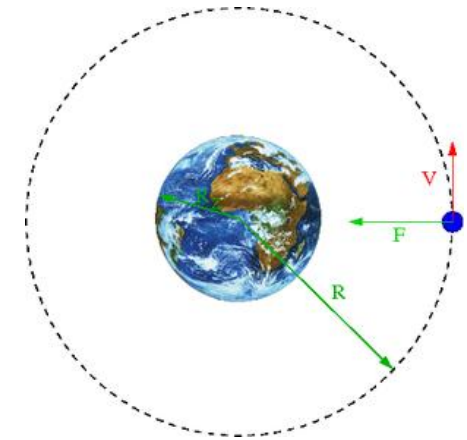
$$F_{doś} = F_g$$

$$m\omega^2 R = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

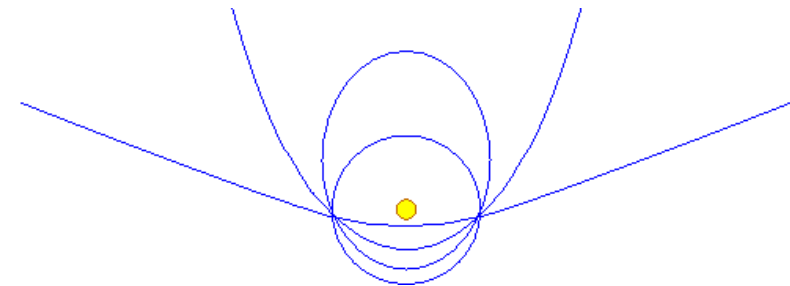
$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2}$$

lub

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$



- ▶ I prawo Keplera wynika z rozwiązania równań ruchu masy w polu siły centralnej – w zależności od całkowitej energii i momentu pędu - torem może być **okrąg**, **elipsa**, **parabola** lub **hiperbola**



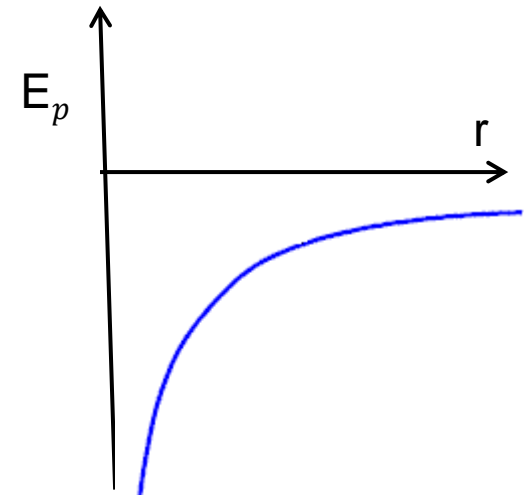
Energia pola grawitacyjnego

- ▶ Pole grawitacyjne jest potencjalne.
- ▶ Praca wykonana przez siłę ciężkości zależy tylko od punktu początkowego i końcowego i wyraża się przez zmianę energii potencjalnej:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \, d\vec{r} = E_{pA}(\vec{r}_A) - E_{pB}(\vec{r}_B) = -\Delta E_p$$

$$\Delta E_p = \int_{r_A}^{r_B} G \frac{M m}{r^2} \cdot dr = \left[-\frac{G M m}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$$

$$E_p(r) = -\frac{G M m}{r} + C \quad E_p(\infty) = 0$$



- ▶ Energia całkowita ciała w polu grawitacyjnym

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p(r) = \text{const}$$

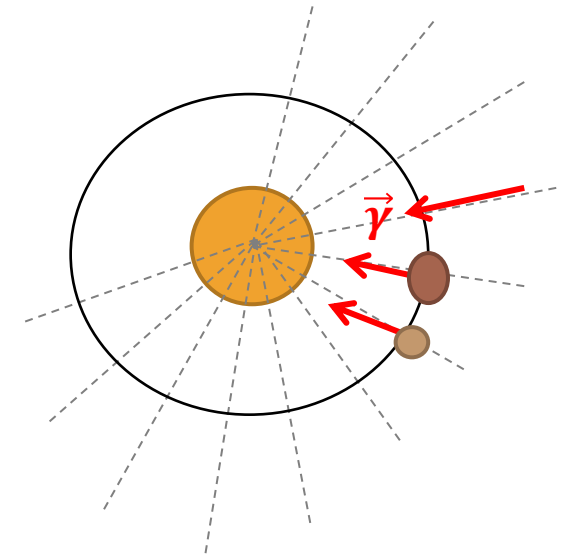
Natężenie pola grawitacyjnego

- ▶ Natężenie pola grawitacyjnego charakteryzuje pole:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}$$



informuje jaka siła działa w danym punkcie pola na jednostkę masy i nie zależy od masy ciała próbnego



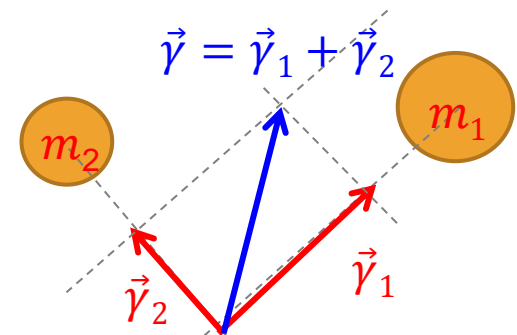
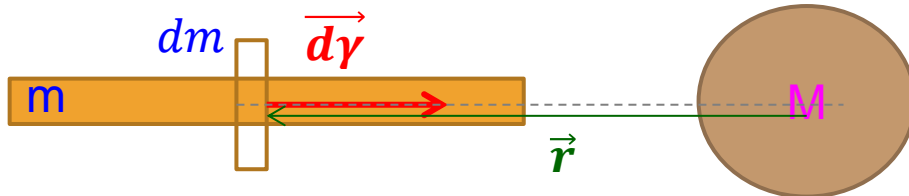
- ▶ Natężenie wytwarzane przez punkt materialny:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \frac{M \vec{r}}{r^2}$$

- ▶ Dla układu punktów materialnych (mas) stosujemy zasadę superpozycji:

$$\vec{\gamma} = \sum \vec{\gamma}_i$$

- ▶ Dla ciał ciągłych: $\gamma = \int d\gamma$



Podsumowanie

- ▶ Tarcie toczne.
- ▶ Statyka.
- ▶ Efekty związane z zachowaniem momentu pędu:
 - precesja bąka
 - żyroskop
- ▶ Prawo powszechnego ciążenia.
- ▶ Natężenie pola i zasada superpozycji