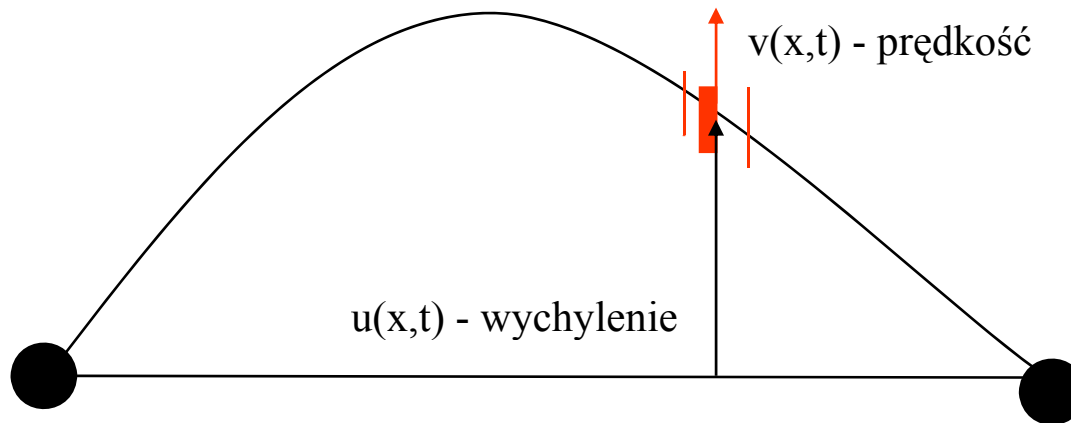


$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{równanie falowe ciąg dalszy}$$

metoda różnic skończonych, zamiast rozkładu na drgania własne (który może być wolnozbieżny)

Rozwiązanie numeryczne: dzielimy strunę na N fragmentów,  
dla każdego z nich rozwiązujemy równania Newtona  
(zabieg odwrotny do wyprowadzenia równania różniczkowego)



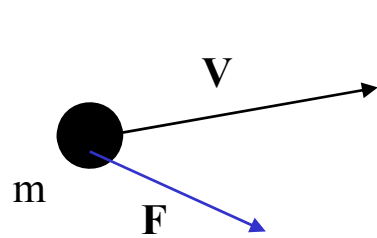
$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

z równania falowego:

$$a(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2}$$

**Schemat Verleta** (popularny dla symulacji dynamiki molekularnej)



$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

**Schemat Verleta**

Phys. Rev. **159**, 98 (1967)

Pomysł: rozwinąć położenie  $\mathbf{r}$  w chwili  $t+\Delta t$  i  $t-\Delta t$  w szereg Taylora

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t - \Delta t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t) + \mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

**tylko o jeden rząd  
mniej dokładny niż RK4**

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t) + \mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

Schemat Verleta

Jeśli chodzi nam tylko o tor ruchu: świetny schemat.

Nie używa *prędkości*, ale ta często potrzebna:

np do wyliczenia energii, ale również : sił (np. oporu, Lorentza)

jeśli siły niezależne od prędkości, a informacja o nich potrzebna jest do innych celów  
można - wykonać krok do  $t+\Delta t$ , a potem

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \longleftarrow$$

rzęd błędu wyższy,  
wciąż dokładnie dla ruchu  
jednostajnie przyspieszonego  
 $a$  stałe między  $t$  a  $\Delta t$

jeśli siły zależą od prędkości: nie wykonamy kroku do  $t+\Delta t$ , możemy co najwyżej:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

kiepsko: wynik dokładny tylko dla  $a=0$

## prędkościowa wersja schematu Verleta (dający prędkości jednocześnie z położeniami)

Położenia – poświęcamy jeden rząd dokładności:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

---

Potrzebny przepis na prędkość w chwili  $t + \Delta t$  z błędem  $O(\Delta t^2)$ :

Rozwinąć  $\mathbf{r}$  w Taylora względem punktu  $t + \Delta t$ :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{V}(t + \Delta t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t + \Delta t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Dodać stronami:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t)) + O(\Delta t^2) \quad (\text{wzór potencjalnie  
niejawny})$$

---

Wzory podkreślone na czerwono – Verlet prędkościowy.



$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t)) + O(\Delta t^2)$$

Verlet prędkościowy

$$\mathbf{V}(t + \Delta t/2) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}(t)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta t\mathbf{V}(t + \Delta t/2)$$



Inny (popularny) zapis wzorów w czerwonej ramce

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t + \Delta t/2) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}(t + \Delta t)$$

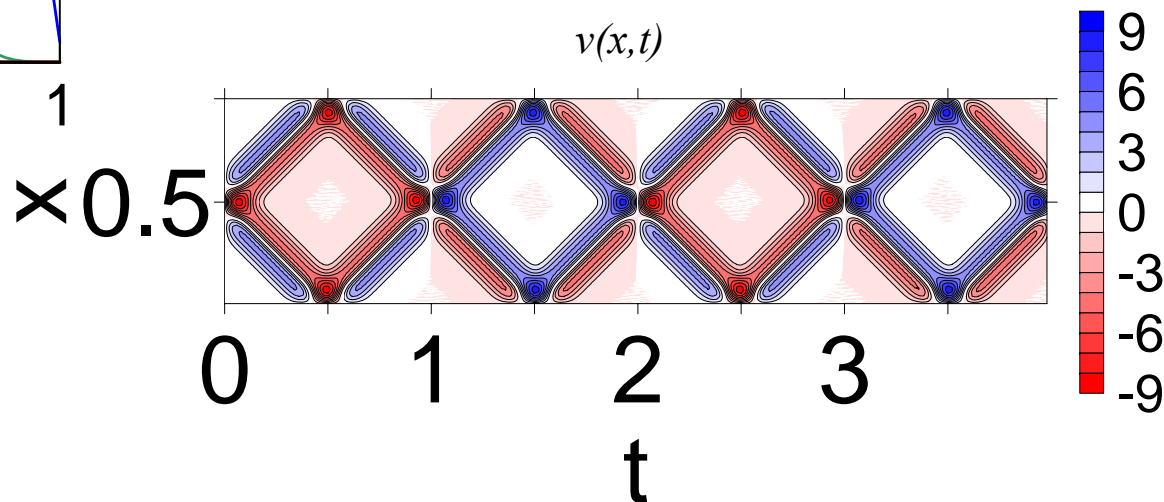
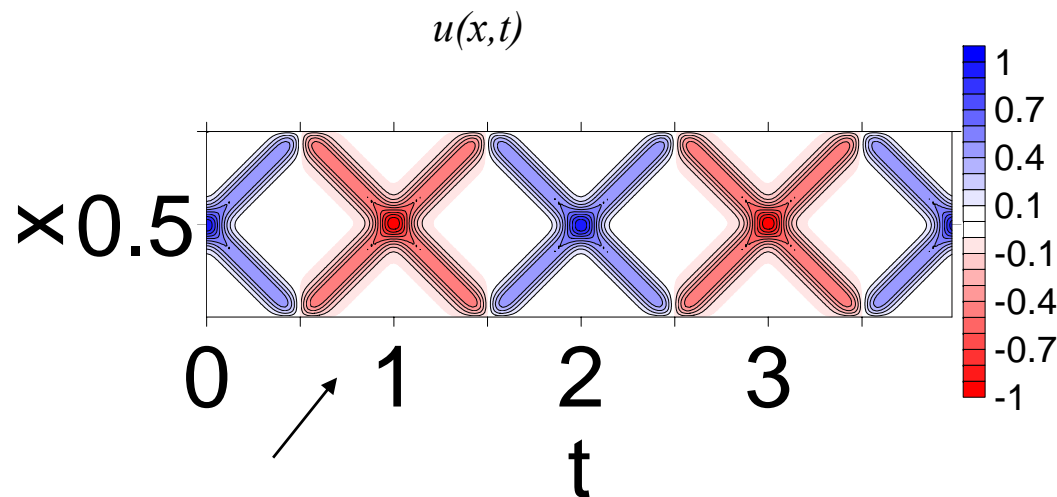
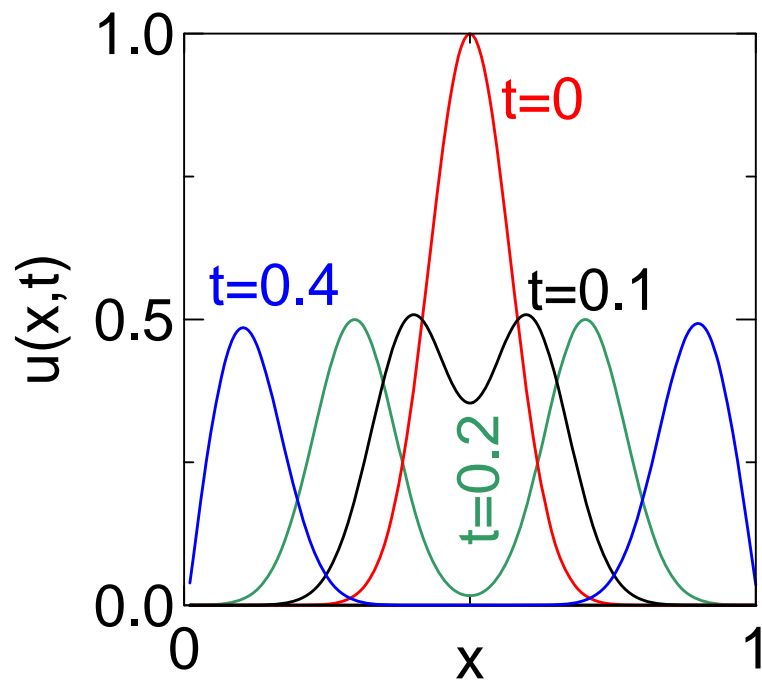
uwaga: jeśli siły (przyspieszenia) zależą od prędkości  
ostatnie równanie jest niejawne

# Rozwiązania numeryczne 1. (laboratorium)

$L=1$

$$u(x,t=0)=\exp[-100(x-0.5)^2]$$

$$v(x,t=0)=0$$

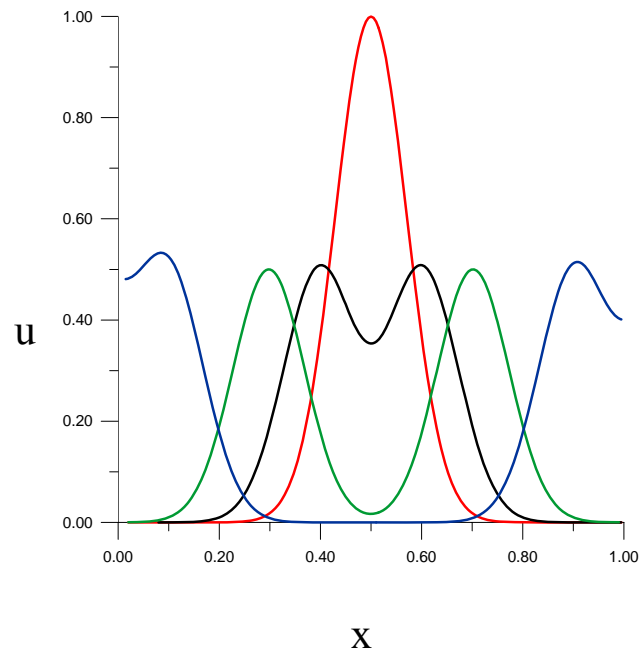
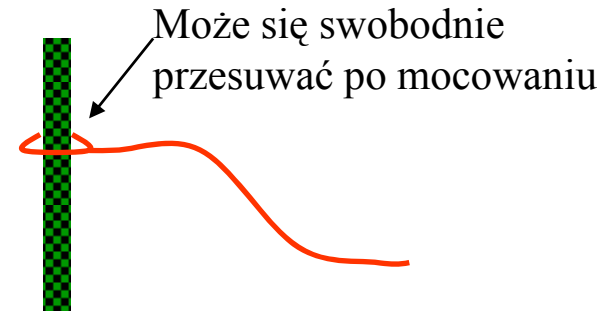


## Rozwiązanie numeryczne 2.

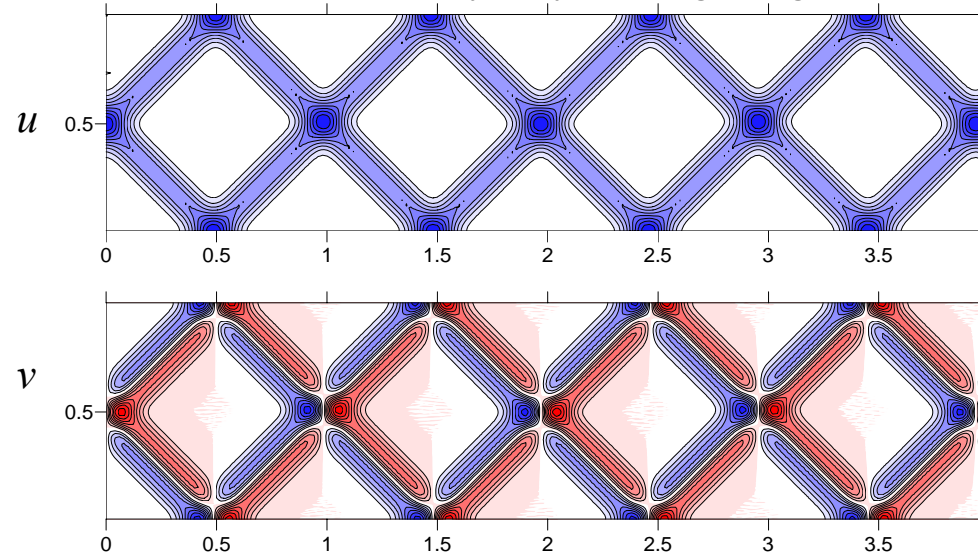
Swobodne warunki brzegowe:  
na brzegach na strunę nie działa żadna siła pionowa:

Warunek brzegowy  
Neumana (na pochodną)  
zamiast Dirichleta  
(na wartość funkcji)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x=0,t)} = 0$$



Odbicie bez zmiany fazy: idzie górą, górą wraca



### energia drgania:

$$dE = \frac{1}{2}\rho(x)dxv^2(x, t) + \frac{1}{2}T_0dx \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

---

kinetyczna

---

Potencjalna: odkształcenie struny

Dla  $\rho(x)=\rho$

$$E = \frac{1}{2}\rho \int_0^L v^2(x, t)dx + \frac{1}{2}T_0 \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

---

Dla pojedynczego modu własnego

$$u(x, t) = \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

$$E = \frac{\omega_n^2}{2}\rho \cos^2(\omega_n t) \int_0^L \sin^2(k_n x)dx + \frac{k_n^2}{2}T_0 \sin^2(\omega_n t) \int_0^L \cos^2(k_n x)dx$$

$$E = \frac{\omega_n^2}{2}\rho \cos^2(\omega_n t) \frac{L}{2} + \frac{k_n^2}{2}T_0 \sin^2(\omega_n t) \frac{L}{2}$$

$$\begin{aligned} \omega &= kc \\ T_0 &= \rho c^2 \end{aligned}$$

$$E = \frac{L}{4}(kc)^2 \rho (\cos^2(\omega_n t) + \sin^2(\omega_n t)) \longleftarrow \text{Kinetyczna na potencjalną się zmienia, całkowita zachowana}$$

## Analiza chwilowa drgania

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

Rozwiązując równanie falowe schematem Verleta można z zależności czasowych wydobyć częstości własne bez konieczności rozwiązywania równania własnego

Gdy drgania tłumione - częstość przestrzenna modów własnych nie ulega zmianie (zobaczmy), ale czasowa – tak.

Analiza chwilowa drgania na podstawie wychylenia zależności położeniowych = wychylenia  $g(x)$  i prędkości  $h(x)$  w *danej chwili*.

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx$$

$$s_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L h(x) \sin(k_n x) dx$$

## Równanie fali tłumionej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{du}{dt} \quad \begin{array}{l} a > 0 = \text{stała tłumienia} \\ c \text{ niezależna od położenia} \end{array}$$

Opory związane z prędkością struny [np. powietrza]

Warunki brzegowe  $u(x=0,t)=u(x=L,t)=0$

Warunki początkowe  $u(x,t)$  oraz  $v(x,t)$ .


Mody normalne dla fali tłumionej:

Poszukajmy rozwiązania metodą separacji zmiennych  $u(x,t)=X(x)T(t)$

$$XT'' = c^2 X''T - 2aT'X / : XT$$

$$\frac{T''}{T} + \frac{2aT'}{T} = \frac{c^2 X''}{X} = -\omega^2$$

część przestrzenna bez zmian!



$$X_n(x) = \sin(k_n x)$$

$$k_n = n\pi / L$$

$$k = \omega / c$$

Część przestrzenna: 
$$\frac{T''}{T} + \frac{2aT'}{T} = -\omega_n^2 = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2$$

$$T'' + 2aT' + \omega_n^2 T = 0$$

wstawiamy  $T = \exp(rt)$ , równanie charakterystyczne:  $\exp(rt) [r^2 + 2ar + \omega_n^2] = 0$ ,  
szukamy rozwiązań na  $r$

możliwe przypadki: 2 pierwiastki rzeczywiste, jeden podwójny, obydwa zespolone

Warunki początkowe:  $T'(t = 0) = 0$  Struna spoczywa w chwili początkowej

$T(t = 0) = 1$  Rozwiązanie określone co  
do stałej multiplikatywnej (równanie jednorodne)

$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : \exp(-at) \left[ \cosh\left(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh\left(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t\right) \right] \\ \omega_n = a : \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : \exp(-at) \left[ \cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t\right) \right] \end{cases}$$

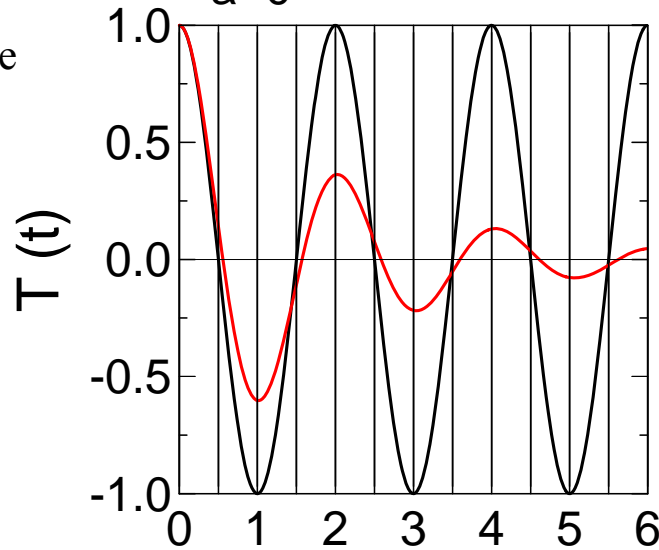
$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : \exp(-at) \left[ \cosh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) \right] \\ \omega_n = a : \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : \exp(-at) \left[ \cos(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) \right] \end{cases}$$

$$\omega_n = nc\pi/L$$

$$L=1, c=1, \omega_n = n\pi$$

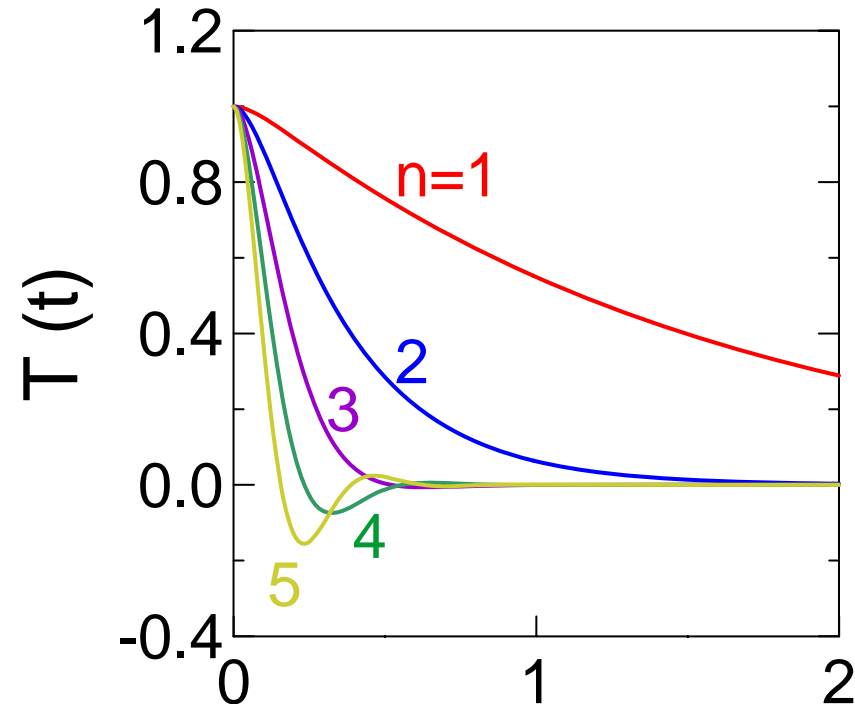
Słabe tłumienie  $a < \omega_1$   
 $a=0.5$   
 $a=0$

Drganie  
z  $\omega_1$



Poza zanikiem drgania  
widzimy zmniejszenie częstości

$a=8$ ,  $\omega_1$  i  $\omega_2$  = „przetłumione”  
pozostałe „tłumione”



Najpierw zgasną wyższe tłumienia



## Rozwiązanie równania fali tłumionej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{du}{dt}$$

rozwiązanie ogólne:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(t) \sin(k_n x)$$

---

### Położeniowa analiza Fourierska

- rozkład na mody normalne w danej chwili :  $c_n(t)$   
= część przestrzenna nie zmienia się pod wpływem tłumienia.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$
$$v(x, t) = -\omega_n \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

↗

w ogólności  
zależne od czasu

$$\int_0^L u(x, t) \sin(k_n x) dx = c_n \frac{L}{2} \cos(\omega_n t)$$
$$\int_0^L v(x, t) \sin(k_n x) dx = -\omega_n c_n \frac{L}{2} \sin(\omega_n t)$$

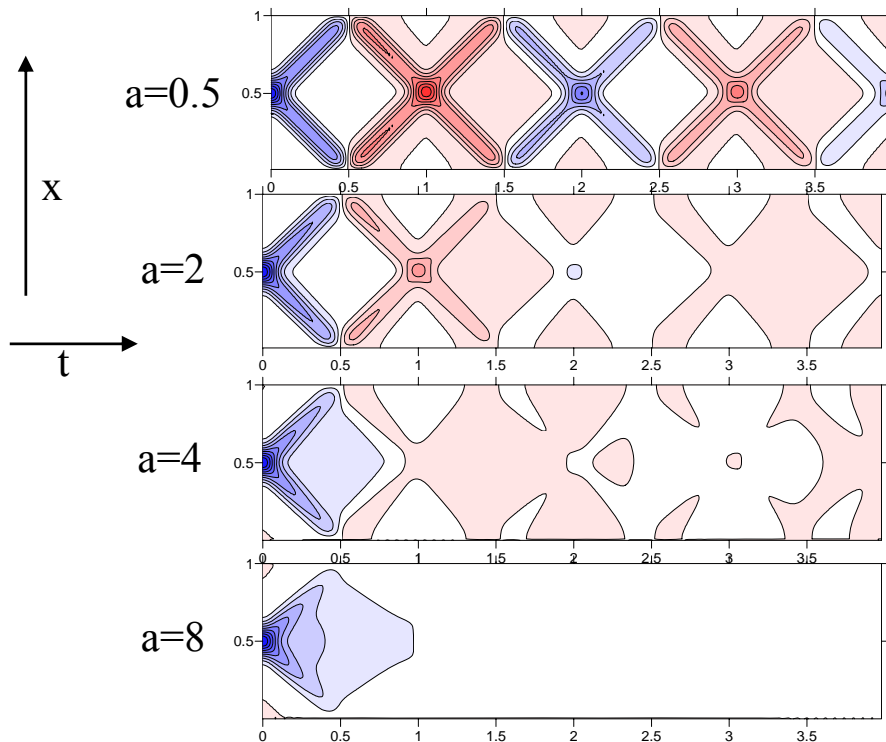
aby wydobyć  $c_n$  : drugie równanie  
wydzielimy przez  $\omega_n$ , podniesiemy  
w kwadracie i dodamy

$$c_n^2 = \left( \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin(k_n x) dx \right)^2 + \left( \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L v(x, t) \sin(k_n x) dx \right)^2$$

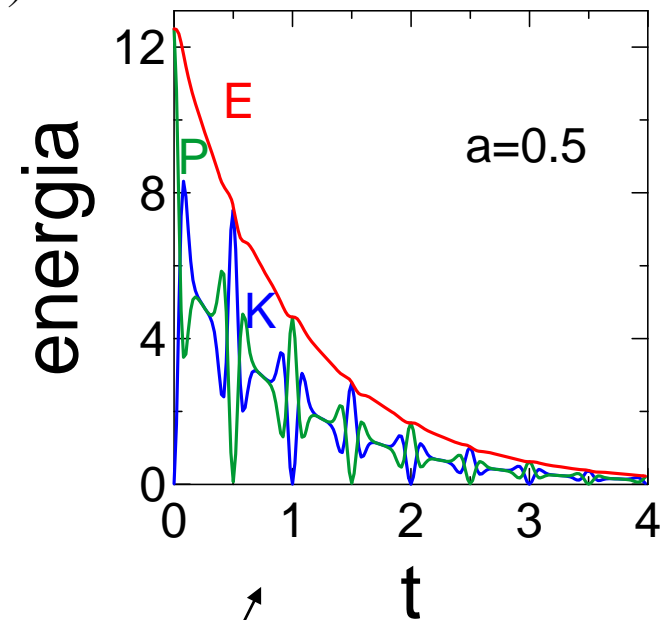
udział względny:  $r_n^2 = \frac{c_n^2}{\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2}$

Przykład:  $L=1$

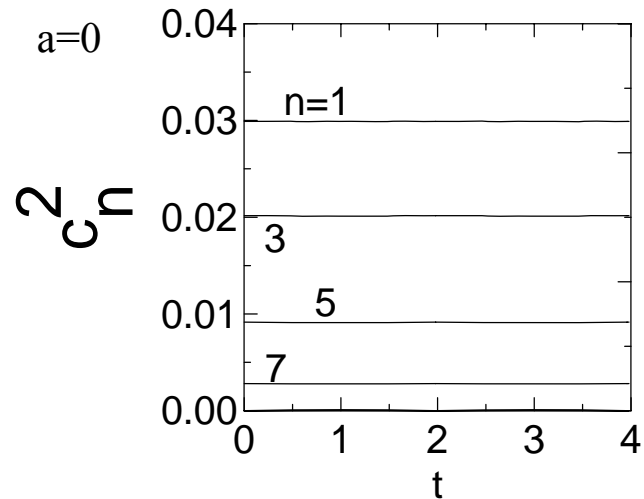
W chwili początkowej pakiet  $f(x, t=0) = \exp(-100(x-0.5)^2)$



$E=K+P$  (kinetyczna+potencjalna)



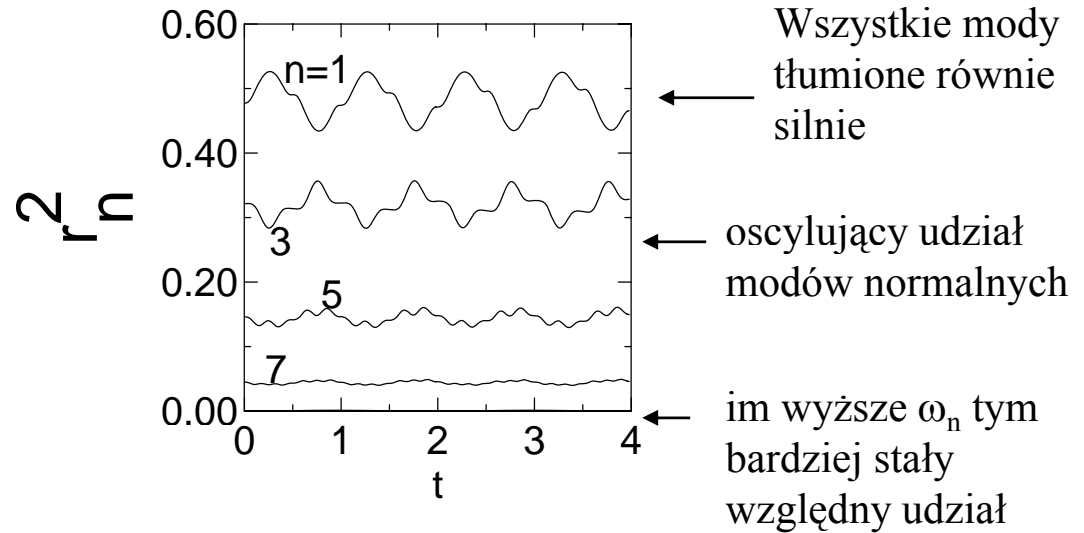
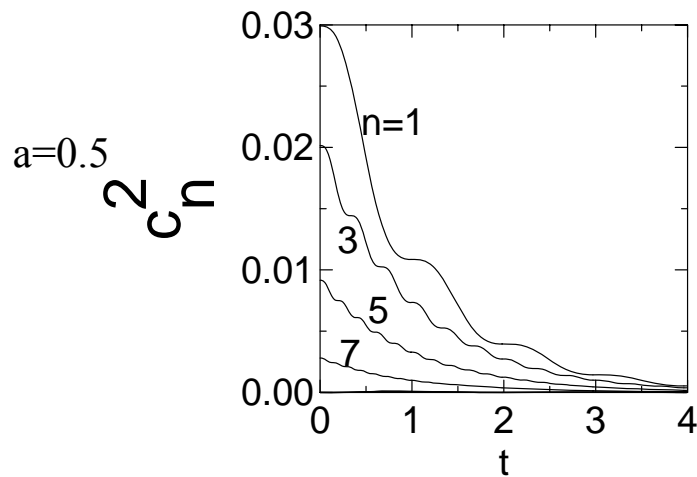
Spadek  $E$  najszybszy gdy  $K$  największe

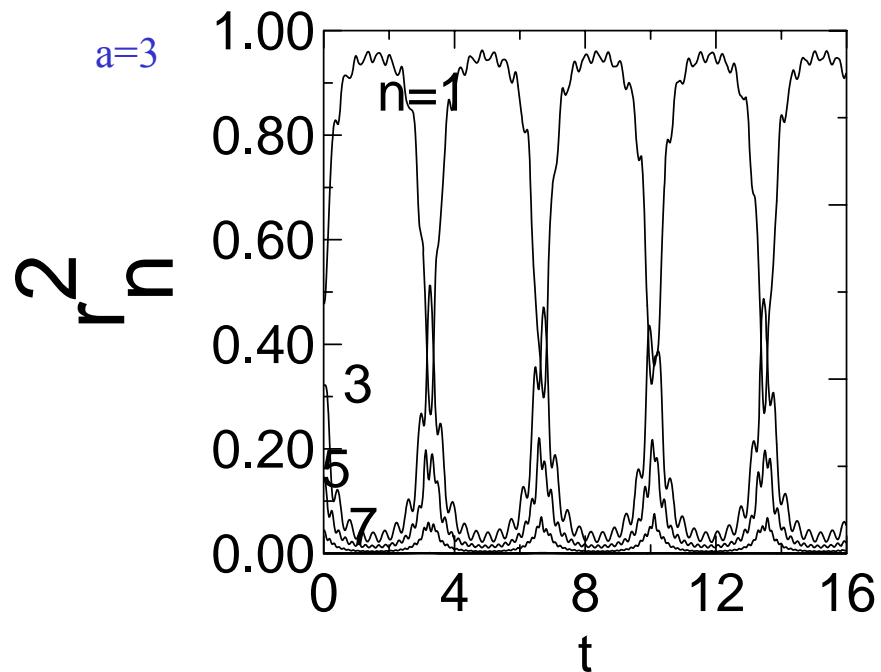
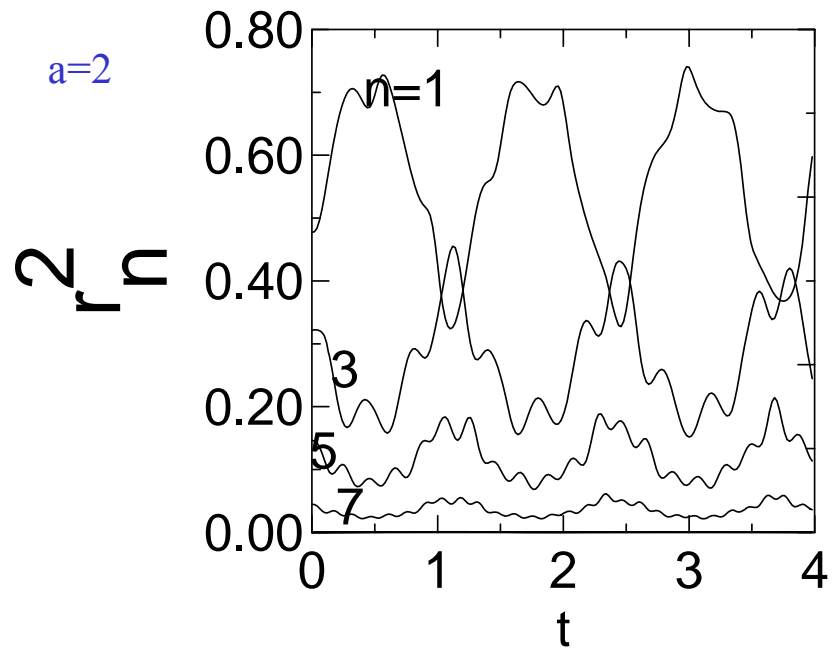


$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : \exp(-at) \left[ \cosh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) \right] \\ \omega_n = a : \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : \exp(-at) \left[ \cos(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) \right] \end{cases}$$

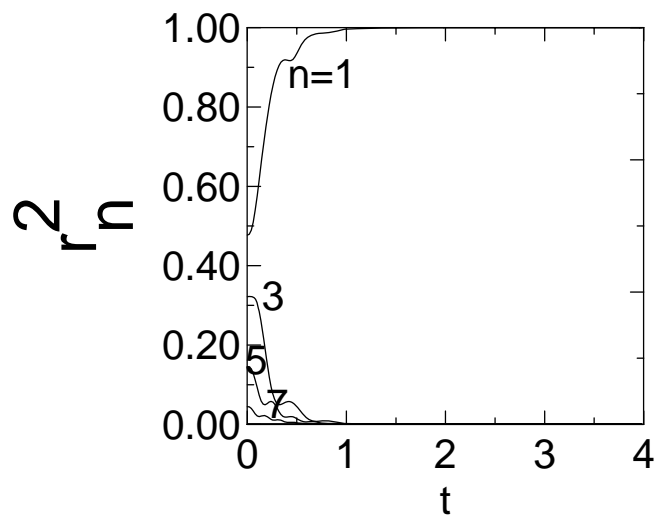
$$\omega_n = n\pi$$

Parzyste  $n$  nie wnoszą przyczynku (symetria)

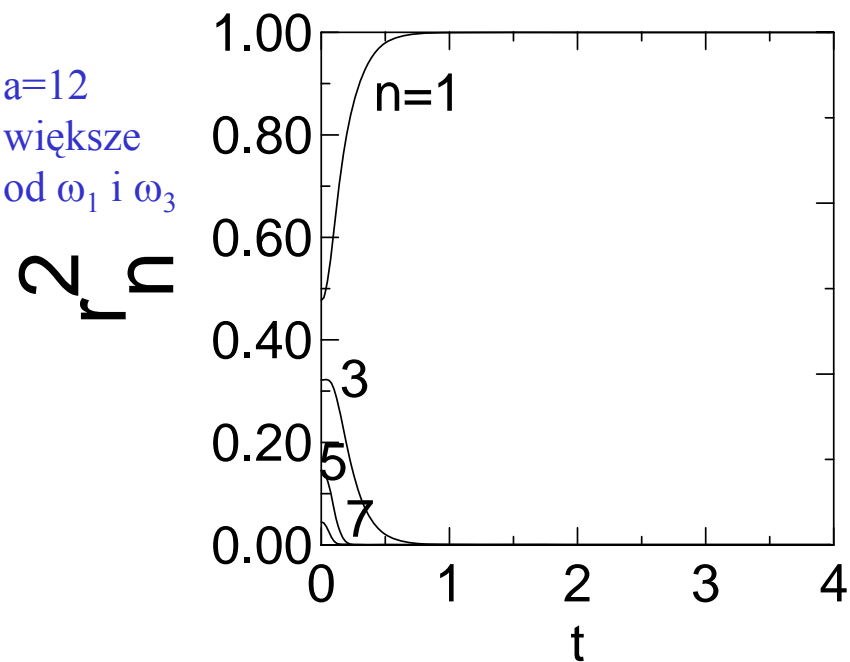




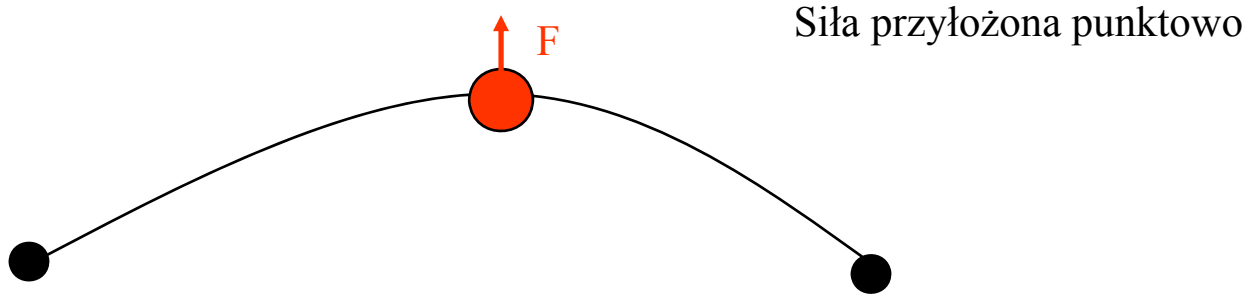
$a=4$ , większe tylko od  $\omega_1$



$a=12$   
większe  
od  $\omega_1$  i  $\omega_3$



## Laboratorium: R. hiperboliczne z niejednorodnością: Drgania tłumione z siłą wymuszającą



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial u}{\partial t} + a_F(x, t) \leftarrow \text{niejednorodność}$$

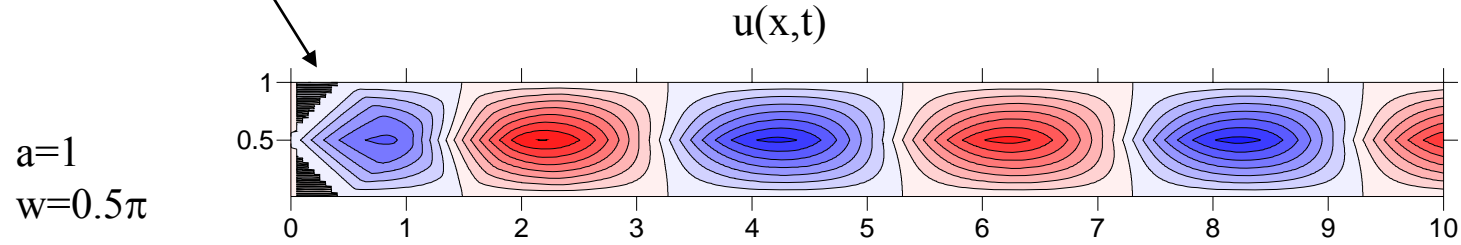
$$a_F(x, t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{dla } x = x_0 \\ 0 & \text{w pozostałych punktach} \end{cases}$$

↑  
wymuszenie periodycznie zmienne

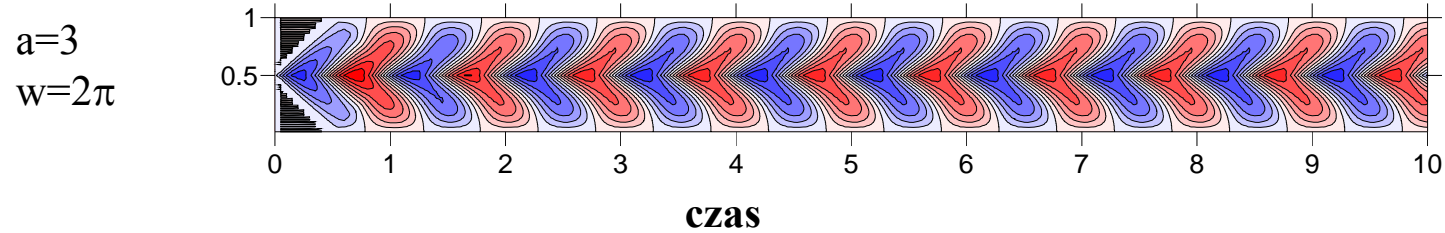
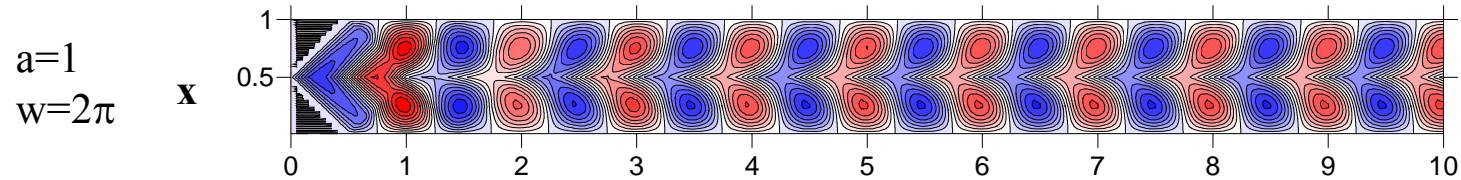
Dla  $t=0$  struna spoczywa ( $v(x,t)=0$ ) w położeniu równowagi ( $u(x,t)=0$ )

Prędkość dźwięku = 1

Siła przyłożona w środku struny  $x_0=1/2$



pojawia się „stan ustalony” = drgania periodyczne.



W stanie ustalonym ruch jest periodyczny z okresem siły wymuszającej (*mode locking*).

## Stan ustalony a energia struny

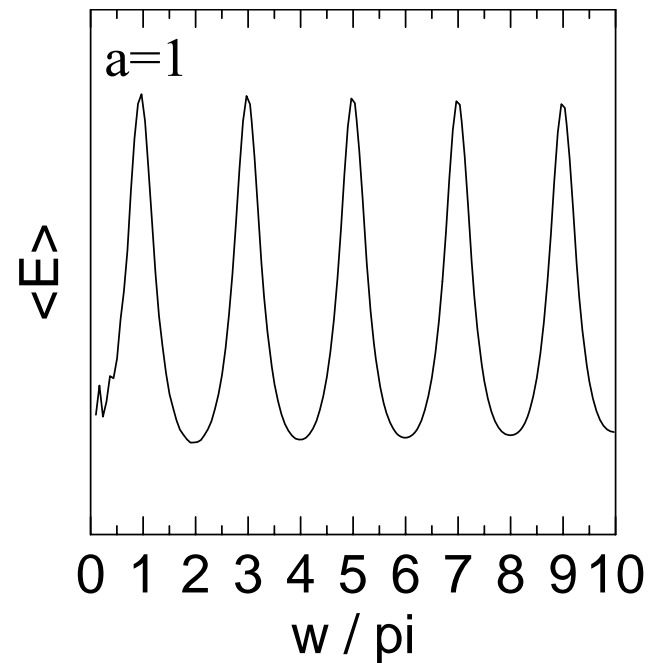
Siła przyłożona w środku struny  $x_0=1/2$

Brakuje  $w_{2n}$  ??  
Dlaczego?

Średnia energia w stanie ustalonym:

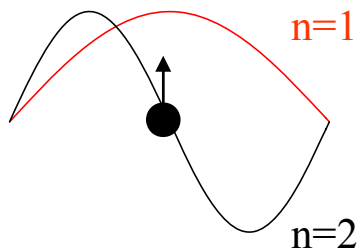
$$\langle E \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt,$$

Rezonans



# Stan ustalony a energia struny

Siła przyłożona w środku struny  $x_0=1/2$



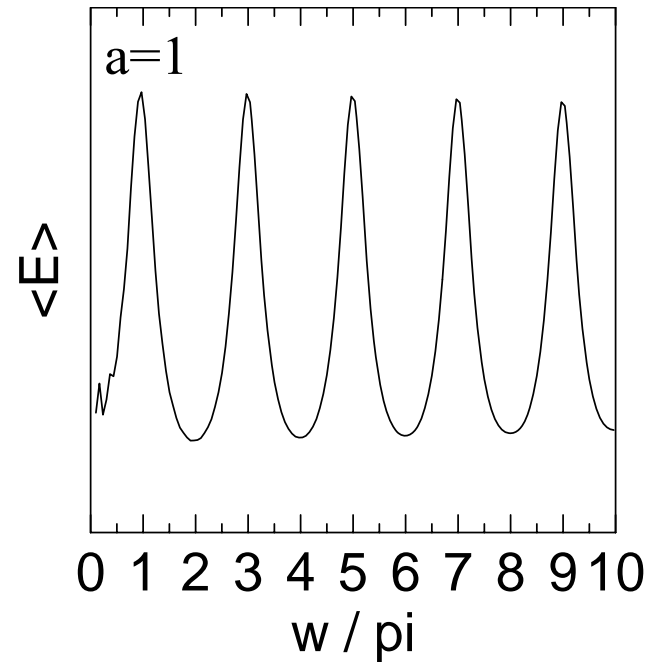
Brakuje  $w_{2n}$  ??

W środku  
studni = węzeł  
dla parzystych  $n$

Średnia energia w stanie ustalonym:

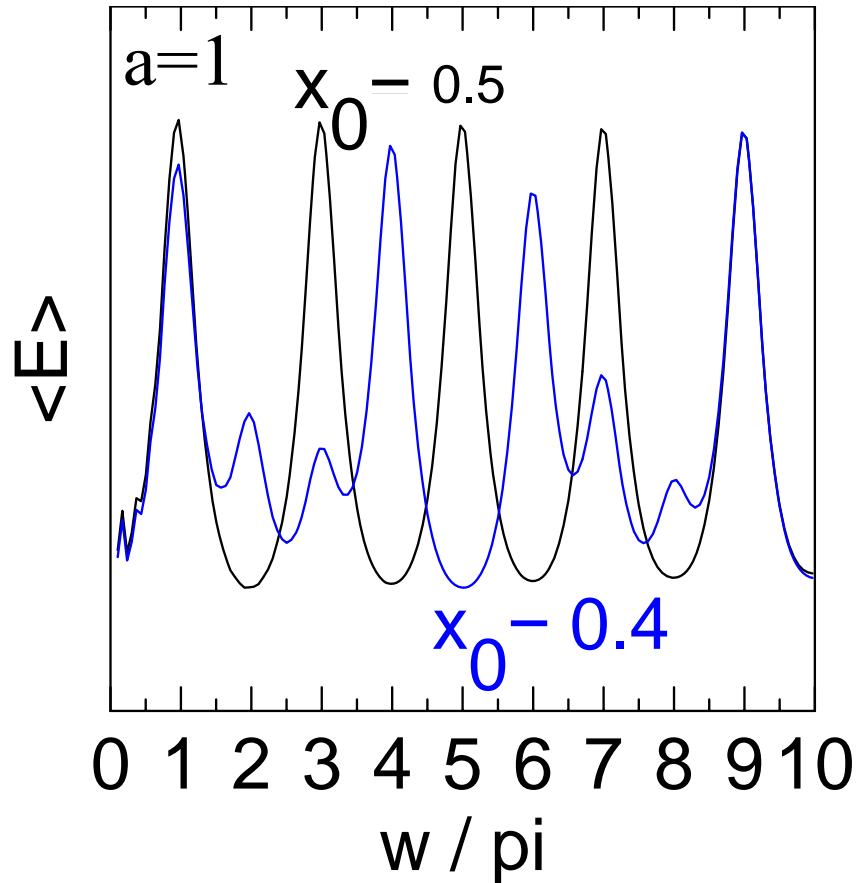
$$\langle E \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt,$$

## Rezonans





mody z parzystym n wzbudzone gdy punkt przyłożenia przesunąć ze środka



Krzywa rezonansowa w przybliżeniu opisana przez sumę funkcji Lorentza

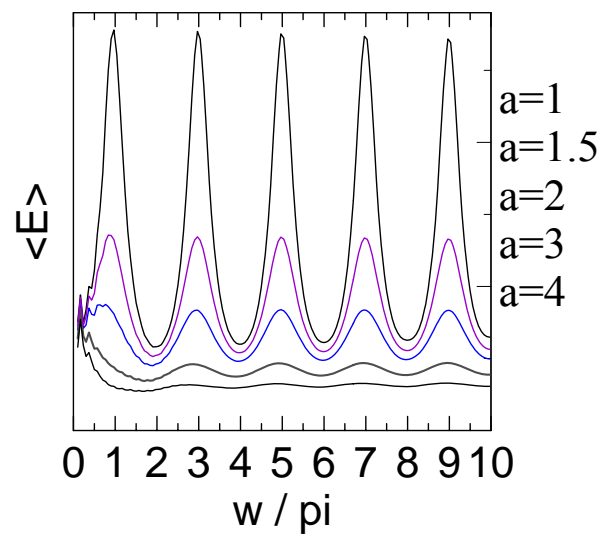
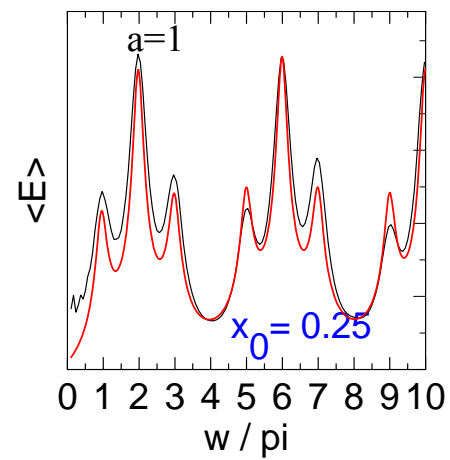
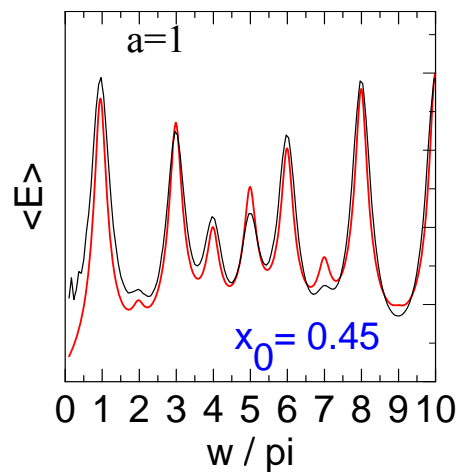
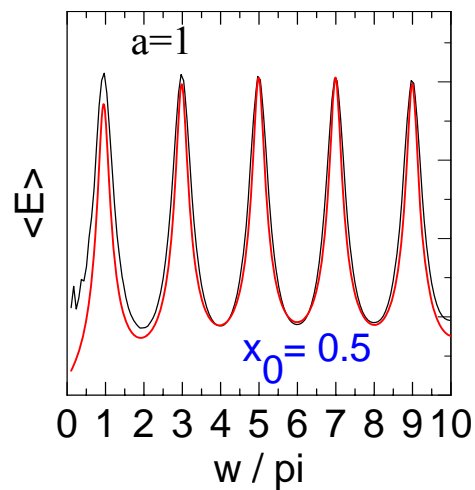
$$s(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{(w - w_i)^2 + (a/2)^2}$$

$$w_i = \sqrt{\omega_i^2 - a^2}$$

Siła sprzężenia = kwadrat wartości modu normalnego w miejscu przyłożenia siły:

$$c_i^2 = \sin^2(i\pi x_0)$$

## Średnie energie stanu ustalonego a wzory lorentowskie

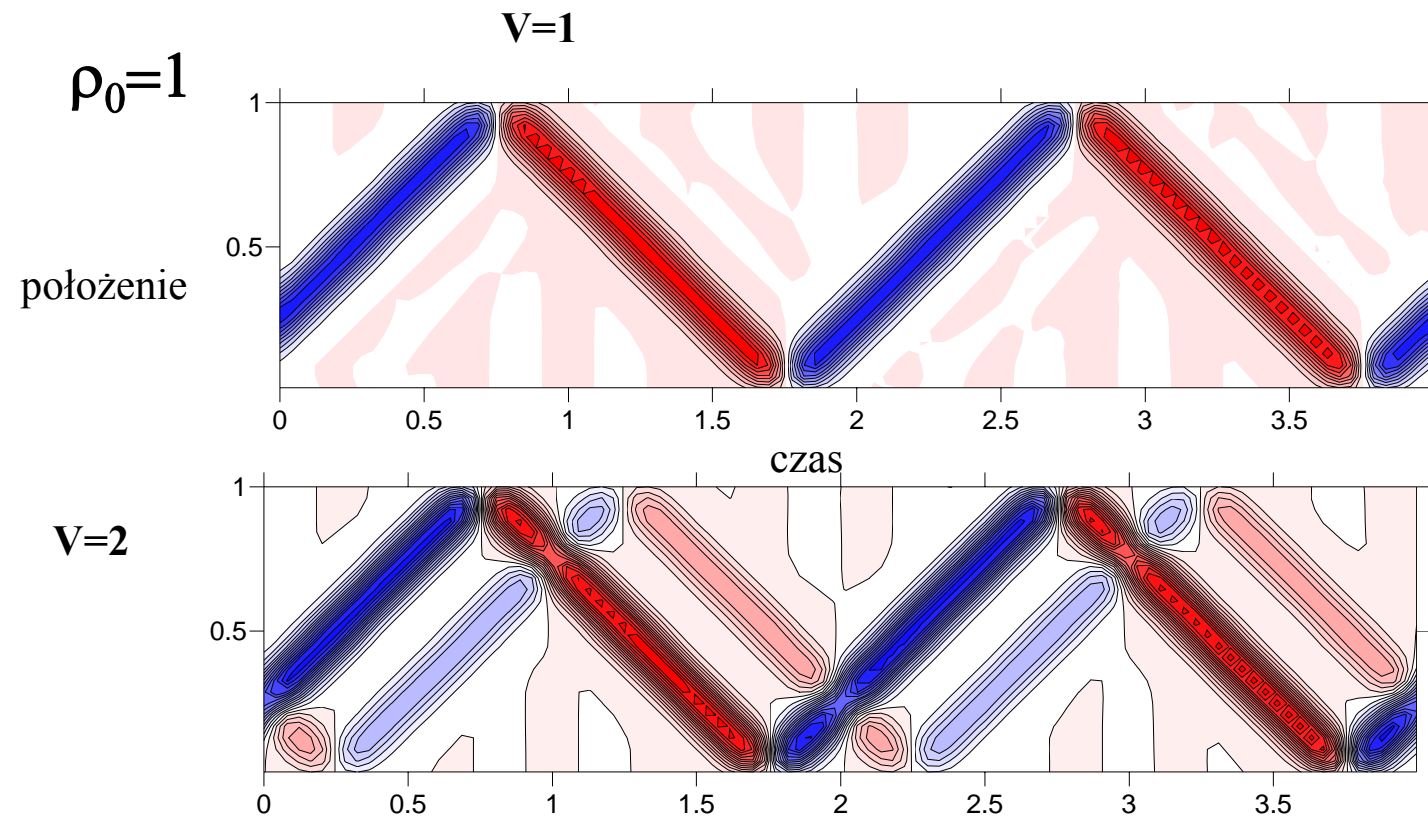


Rezonans a stała tłumienia

## Laboratorium 2: odbicie pakietu od granicy ośrodków

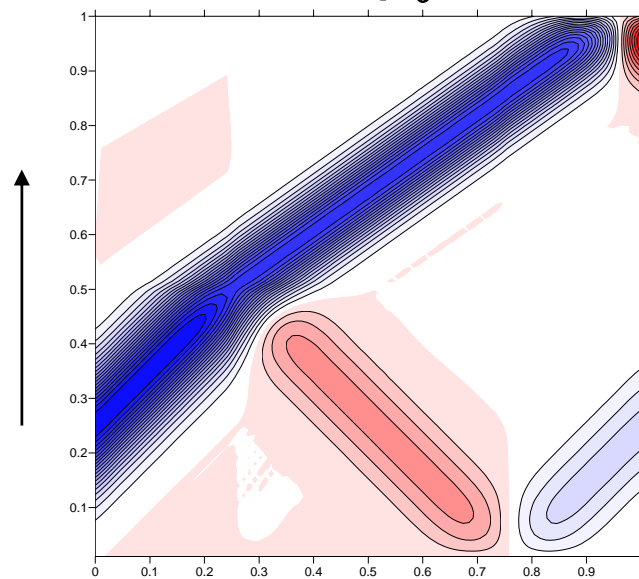
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < \frac{1}{2} \\ \rho_0 & \text{dla } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u(x - Vt) = \exp(-100(x - Vt - 1/4)^2)$$

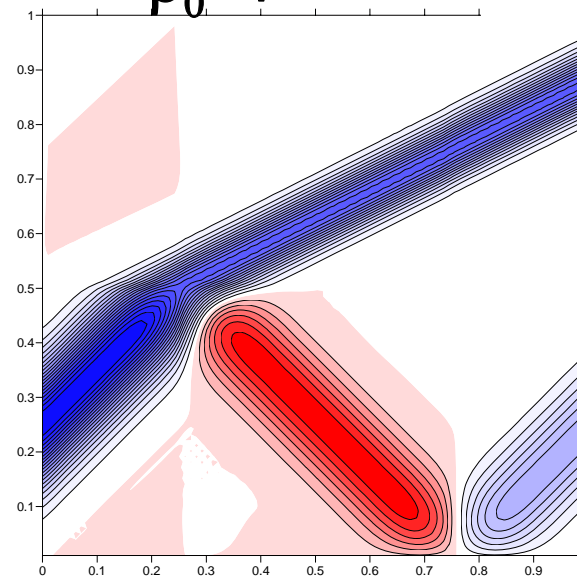


$V=1$

$\rho_0=2$



$\rho_0=4$

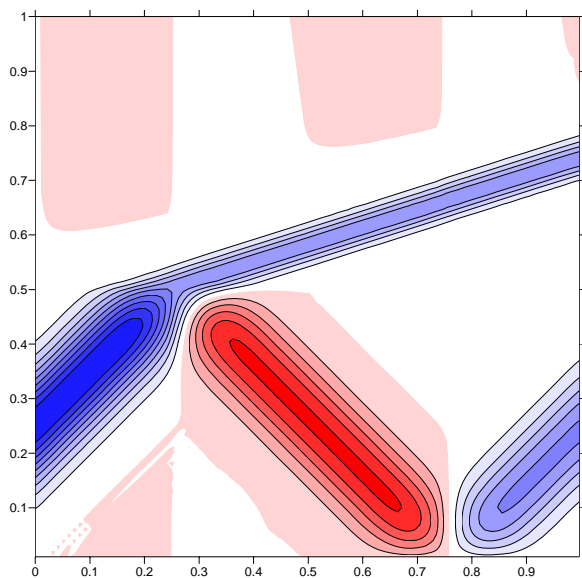


$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < \frac{1}{2} \\ \rho_0 & \text{dla } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

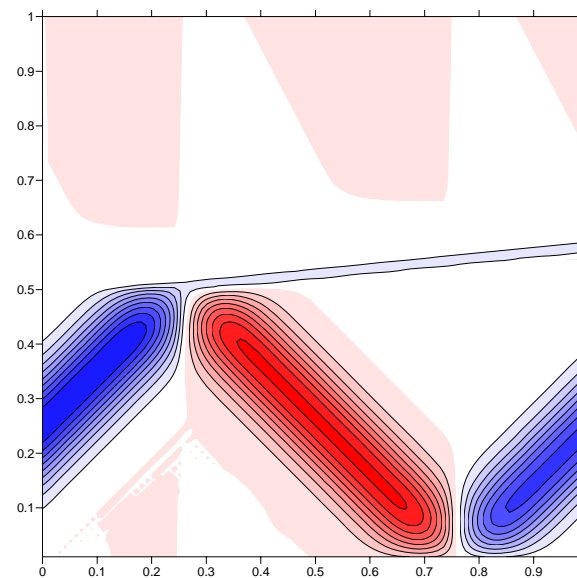
położenie



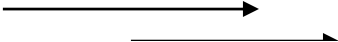
$\rho_0=10$



$\rho_0=100$



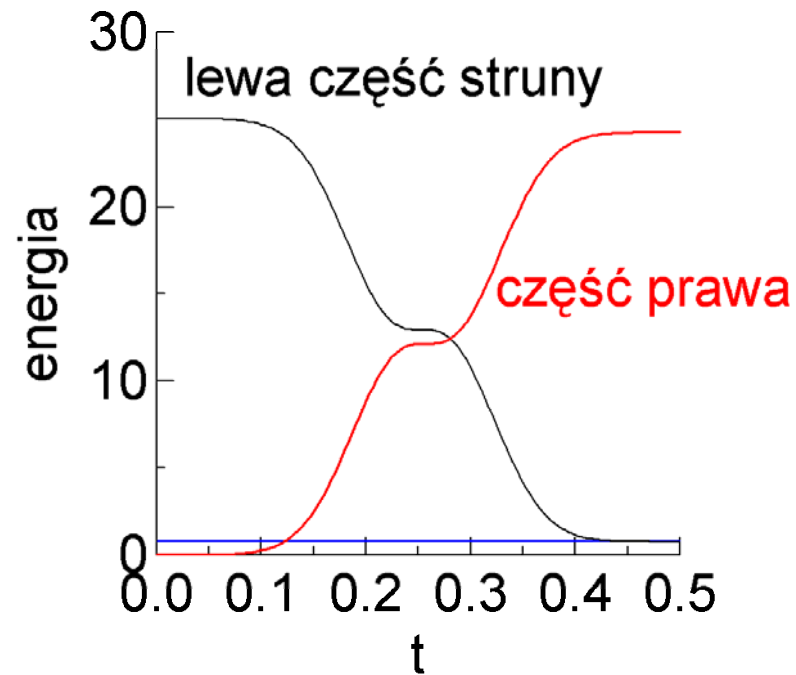
czas



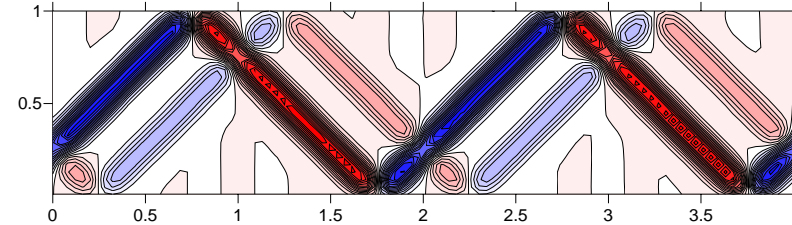
Część energii, która  
pozostaje po lżejszej stronie struny  $\rho=1$   
po odbiciu

$$\left( \frac{1 - \sqrt{\rho_0}}{1 + \sqrt{\rho_0}} \right)^2$$

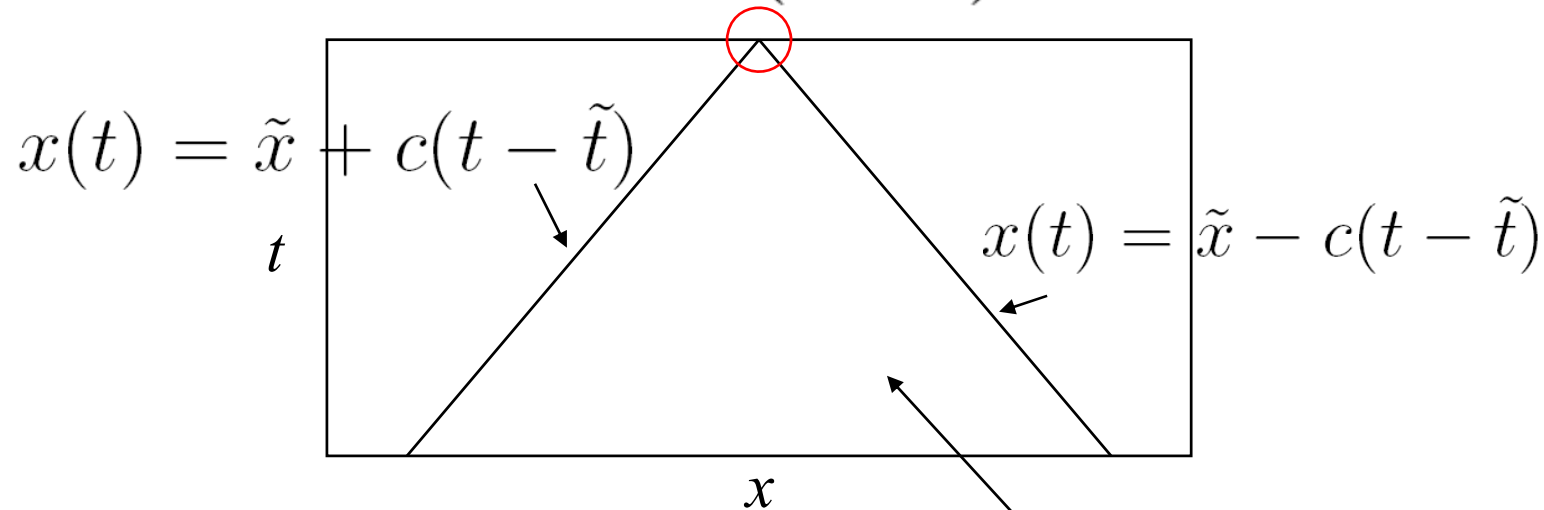
$$\rho_0=2$$



**Domena zależności (Domain of Dependence)  
i kryterium stabilności CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)**



$$P(\tilde{x}, \tilde{t})$$



domena zależności:  
tylko zdarzenia z trójkąta ograniczonego  
charakterystykami mogą  
mieć wpływ na rozwiązanie w punkcie  $P$

Numeryczna domena zależności  
[NUMERYCZNA PRZESZŁOŚĆ]

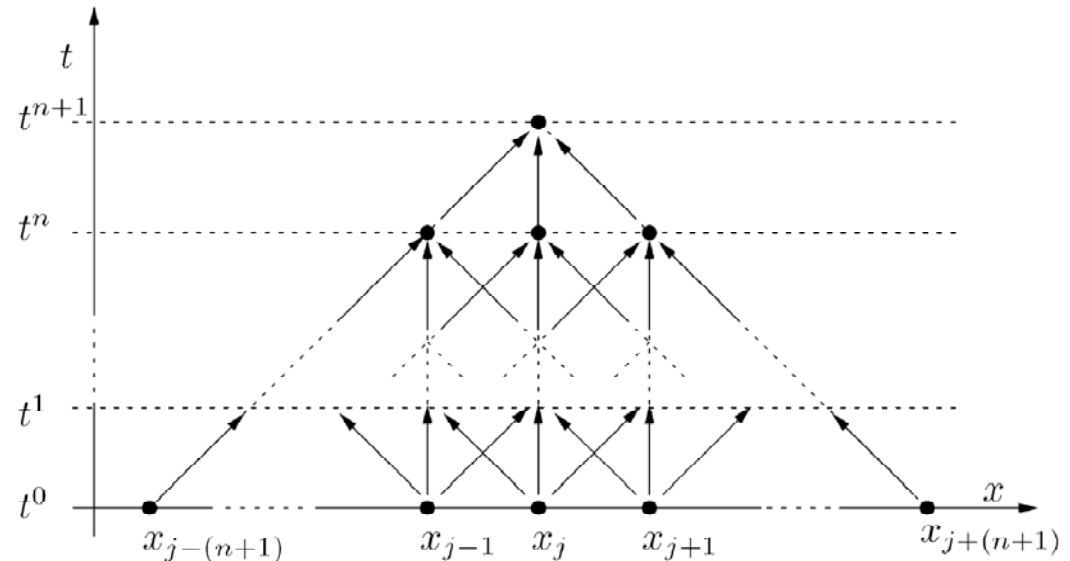
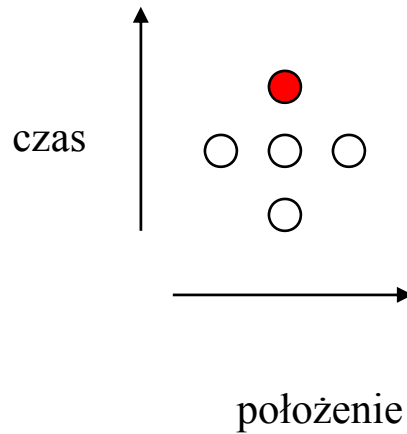
kryterium stabilności CFL  
(Courant-Friedrichs-Lewy)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

schemat Verleta dla przyspieszenia danego przez prawą stronę równania:

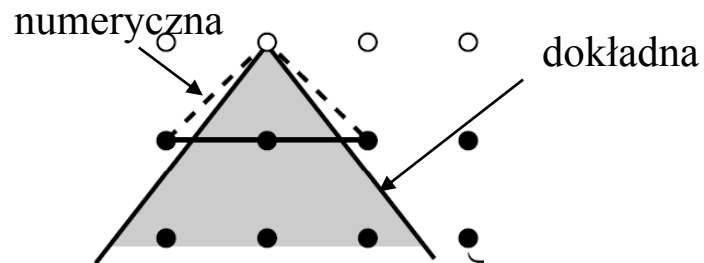
$$\frac{u(j, n+1) + u(j, n-1) - 2u(j, n)}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$u(j, n+1) = c^2 \Delta t^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} - u(j, n-1) + 2u(j, n) + O(\Delta t^4, \Delta x^2)$$



kryterium stabilności CFL  
(Courant-Friedrichs-Lewy)

$$u(j, n+1) = c^2 \Delta t^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} - u(j, n-1) + 2u(j, n) + O(\Delta t^4, \Delta x^2)$$



$$c \Delta t \leq \Delta x$$

warunek: jak dla adwekcji

aby przekroczyć kryterium CFL (prędkość dźwięku): schematy niejawne dla równań mechaniki  
standardowy schemat niejawny = schemat Newmarka  
(dlaczego Crank-Nicolson się nie stosuje?)



algorytm Newmarka (uogólnienie prędkościowego Verleta,  
standardowy chemat niejawny dla równań opisujących układy dynamiczne)

w Verlecie prędkościowym  
używamy  
przepisów:  
z  $\gamma=1/2$

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 a(t)$$

$$v(t+dt) = v(t) + dt [(1-\gamma)a(t) + \gamma a(t+dt)]$$

Czyli: w Verlecie: jawna formuła na położenie, potencjalnie niejawna na prędkość  
ta nie wystarczy dla bezwzględnej stabilności przy kroku czasowym  $cdt > dx$  (zobaczmy analizą v. Neumanna)

dla Newmarka: wprowadzamy niejawność (ważenie przyspieszeń z terażniejszości i przyszłości)  
również do wzoru na położenia:

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

algorytm prędkościowy Newmarka

źródło: WJT DANIEL, computational mechanics **20** (1997) 272

zrobmy z tego formułę położeniową: bez prędkości, za to dwupoziomową (t+dt) względem t, t-dt  
wyliminować prędkości : ↓

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

(\*)

$$v(t+dt) = v(t) + dt [(1-\gamma)a(t) + \gamma a(t+dt)]$$

dla kroku poprzedniego =

$$u(t) = u(t-dt) + v(t-dt)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t-dt) + 2\beta a(t)]$$

dla kroku poprzedniego =

$$v(t) = v(t-dt) + dt [(1-\gamma)a(t-dt) + \gamma a(t)]$$

$$u(t) = u(t-dt) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t-dt) + 2\beta a(t)] - dt^2 [(1-\gamma)a(t-dt) + \gamma a(t)]$$

$$u(t) = u(t-dt) + v(t)dt + dt^2/2 [(2\gamma-2\beta-1)a(t-dt) + (2\beta-2\gamma)a(t)]$$

$$u(t-dt) = u(t) - v(t)dt - dt^2/2 [(2\gamma-2\beta-1)a(t-dt) + (2\beta-2\gamma)a(t)] \quad (*)$$

dodamy stronami gwiazdki aby usunąć prędkość ze schematu

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

+ stronami

$$u(t-dt) = u(t) - v(t)dt + dt^2/2 [(-2\gamma + 2\beta + 1)a(t-dt) + (2\gamma - 2\beta)a(t)]$$



skasujemy prędkość

$$u(t-dt) + u(t+dt) = 2u(t) + dt^2/2 [2\beta a(t+dt) + (1-4\beta + 2\gamma)a(t) + (-2\gamma + 2\beta + 1)a(t-dt)]$$

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma)a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2)a(t-dt)]$$

algorytm Newmark = wersja położeniowa, dwa parametry  $\gamma, \beta$

dla porównania Verlet położeniowy

$$u(t + dt) = dt^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u(t) - u(t - dt)$$

wagi przy przyspieszeniu:  $\beta + 1/2 - 2\beta + \gamma - \gamma + \beta + 1/2 = 1$

(wszystkie wybory dają schemat, który w granicy małego  $dt$  redukuje się do Verleta)

Newmark sprowadza się do Verleta gdy  $\gamma = 1/2$ ,  $\beta = 0$  (maks dokładność

lokalny błąd czwartego rzędu)

rola  $\gamma, \beta$  – zobaczymy jak się sprawdzają w praktyce

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma) a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2) a(t-dt)]$$

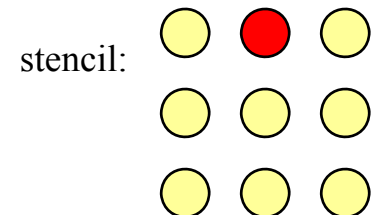
$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + \alpha a(t) + \delta a(t-dt)]$$

jak wykonać krok czasowy?

sposób rozwiązywania zależy od wyrażenie na  $a$   
dla struny:

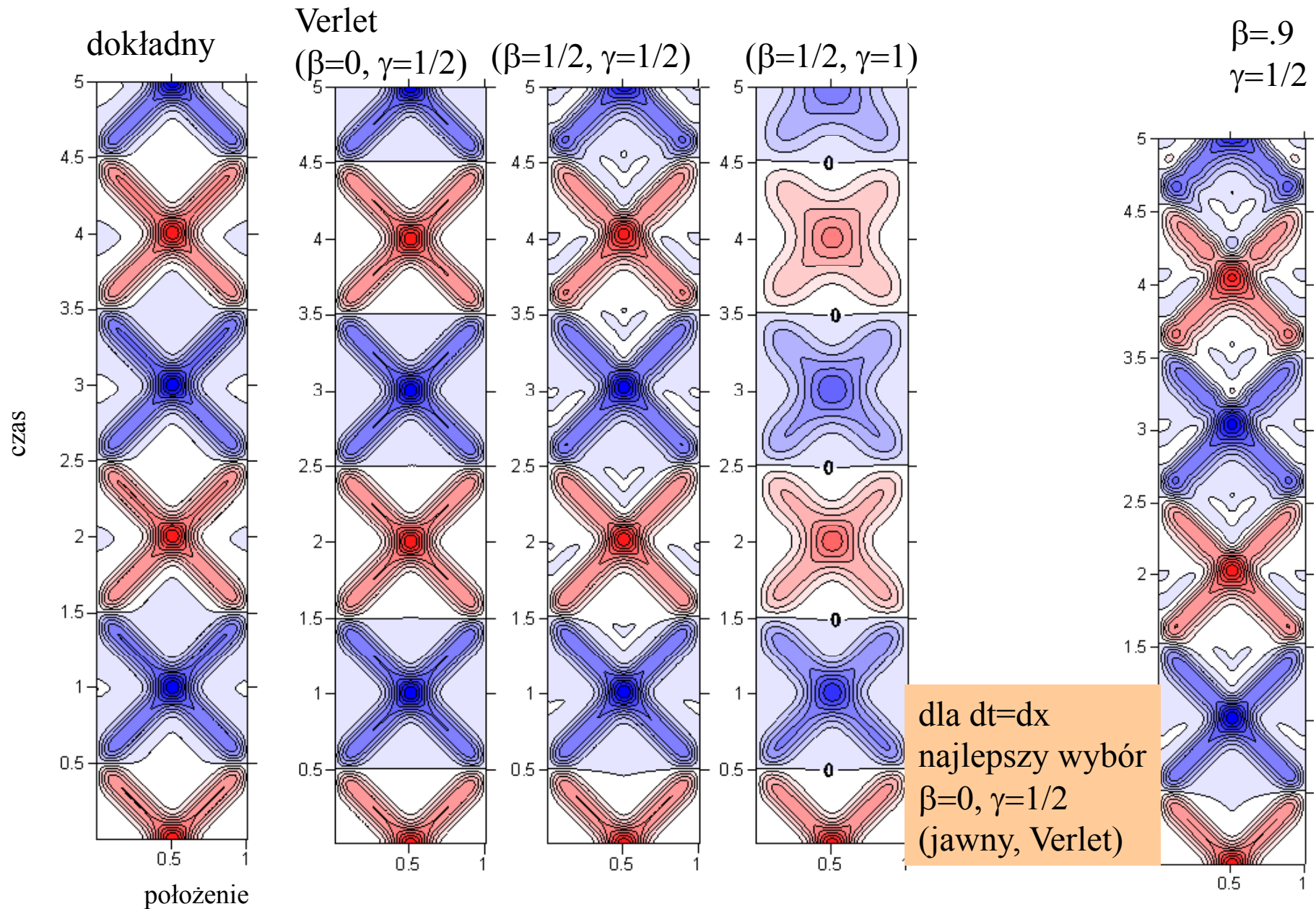
$$U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \frac{dt^2}{dx^2} \left[ \beta \left( U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} \right) + \alpha \left( U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n \right) + \delta \left( U_{j+1}^{n-1} + U_{j-1}^{n-1} - 2U_j^{n-1} \right) \right]$$

Po przegrupowaniu wyrazów:  
układ równań liniowych z macierzą trójprzekątniową



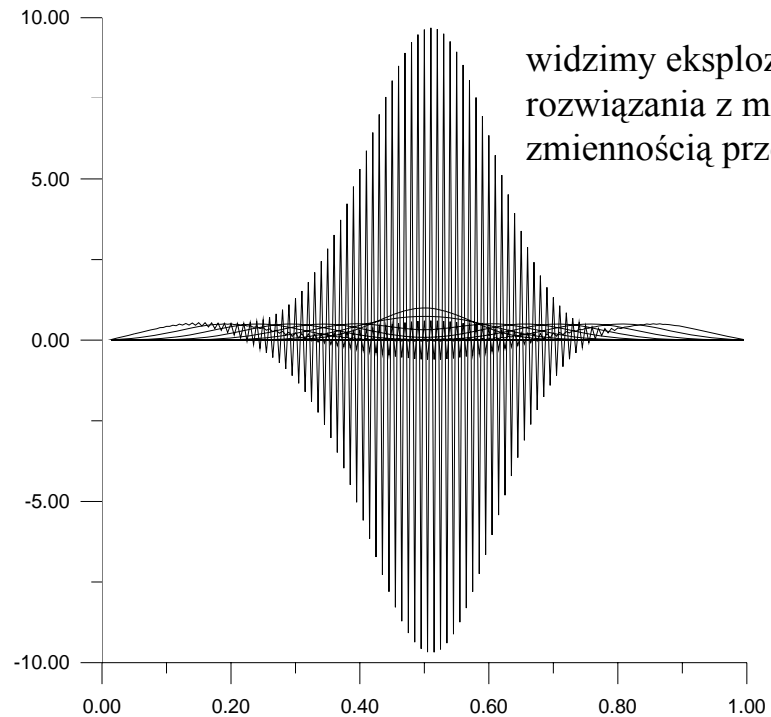
schemat Newmark MRS, struna  
dt=dx

101 węzłów



dla  $dt=dx$   
najlepszy wybór  
 $\beta=0, \gamma=1/2$   
(jawny, Verlet)

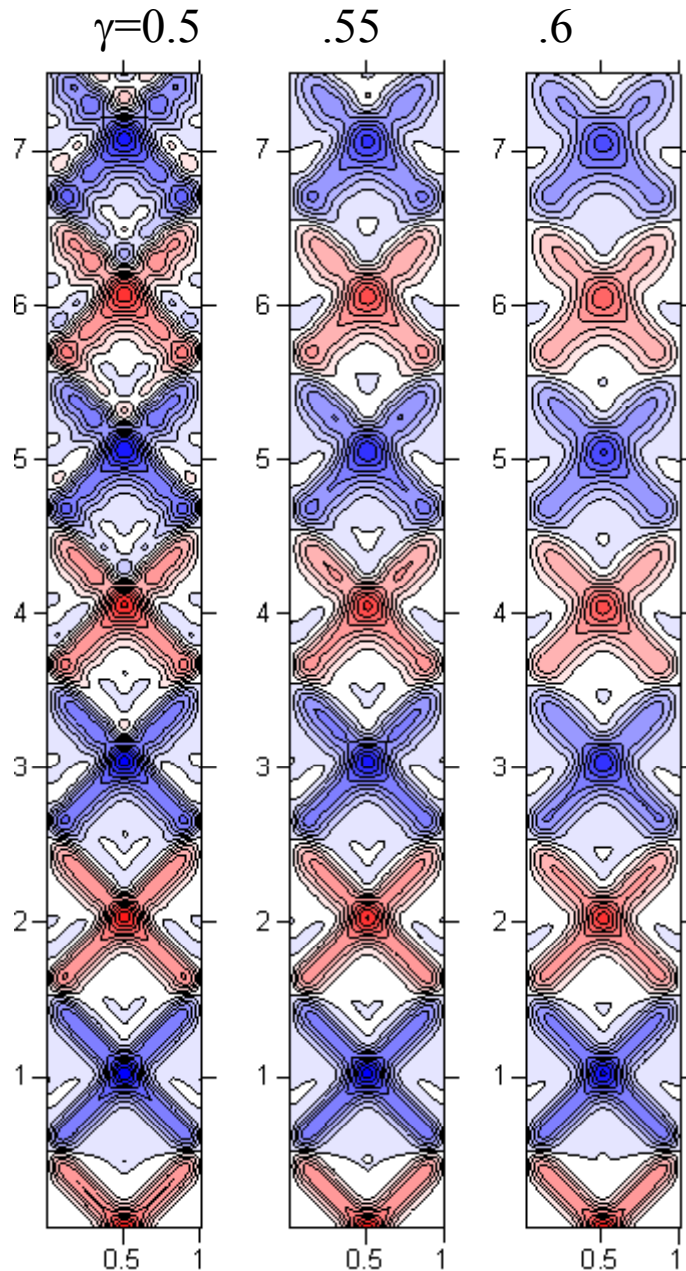
Verlet  
dla  $dt=dx*1.01$



Newmark jest po to aby przekroczyć kryterium CFL

101 węzłów

rola  $\gamma$  ( $dt=1.5dx$ ,  $\beta=0.5$ )



MRS: schemat Newmark  
rola parametrów metody

$\beta > 0$  – wynosi stabilność poza kryterium CFL,  
kosztem generacji wyższych częstotliwości  
przestrzennych

$\gamma > 1/2$  ogranicza  
wzmacnianie  
wyższych częstotliwości  
kosztem dyssypacji  
(zaniku całego pakietu)

$\gamma < 1/2$  – schemat jest niestabilny

zostawmy  $\gamma = 1/2$  (jak dla Verleta)  
i manipulujmy  $\beta$

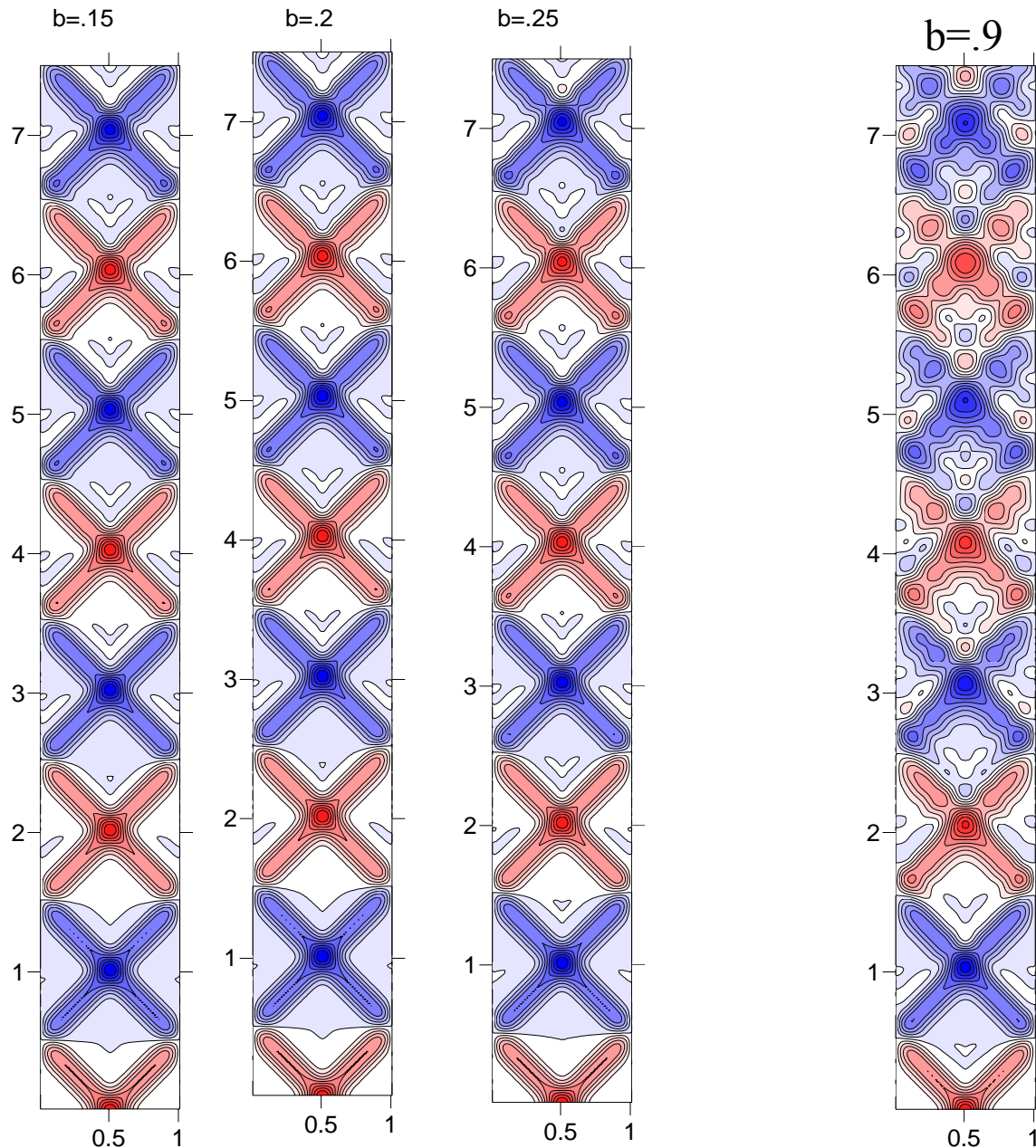


poza CFL:  $dt > cdx$

$dt=1.5dx$ ,

$\gamma=0.5$ , schemat staje się stabilny dla  $\beta > 0.15$

101 węzłów MRS



rosnące beta generuje  
wyższe częstotliwości  
wniosek:  
najlepszy minimalne  
 $\beta$  przy którym  
schemat jeszcze stabilny

czy można je wyznaczyć  
analitycznie?



## Projektowanie schematu Newmarka dla danego kroku czasowego.

dobrac minimalne  $\beta$  aby metoda była stabilna dla danego  $dt$  ?

Będziemy wiedzieli, że po wyższe  $\beta$  nie warto sięgać.

analiza von Neumanna dla  $\gamma=1/2$

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma)a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2)a(t-dt)]$$

$$u(t+dt) - dt^2 \beta a(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [(1 - 2\beta)a(t) + \beta a(t-dt)]$$

Ansatz von Neumanna:

$$A_k^n = \lambda^{n+1} A_k^0$$

$$\lambda^2 \left[ 1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} (\cos(k\Delta x) - 1) \right] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} \left[ \lambda(1 - 2\beta) \underbrace{2(\cos(k\Delta x) - 1)}_{\dots\dots\dots} + \beta 2(\cos(k\Delta x) - 1) \right]$$

$$\lambda^2 \left[ 1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} \left[ \lambda(1 - 2\beta) 2c + \beta 2c \right]$$

$$\lambda^2 \left[ 1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} \left[ \lambda(1 - 2\beta)2c + \beta 2c \right]$$

$$\lambda^2 \left[ 1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right] - 2\lambda \left[ 1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \right] + 1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c = 0$$

$$\Delta = 4 \left[ 1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \right]^2 - 4 \left[ 1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right]^2$$

$$\Delta = 4 \frac{dt^2}{dx^2} c \left( 2 + \frac{dt^2}{dx^2} c - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right)$$

$$\lambda = \frac{1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \pm \frac{dt}{dx} \sqrt{c \left( 2 + c \frac{dt^2}{dx^2} - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right)}}{1 - 2\beta c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

Sytuacja będzie taka: dopóki  $\Delta < 0$  : 2 pierwiastki, o module nie większym od 1  
 gdy  $\Delta > 0$  metoda stanie się niestabilna

$$\lambda = \frac{1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \pm \frac{dt}{dx} \sqrt{c(2 + c \frac{dt^2}{dx^2} - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c)}}{1 - 2\beta c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$-2 < c < 0$  zawsze

żeby pod pierwiastkiem liczba ujemna  
potrzeba aby:

$$2 + \frac{dt^2}{dx^2} c(1 - 4\beta) > 0 \quad \longrightarrow \quad \beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$|\mathcal{N}^2| < 1$  ?

daje ten sam wynik

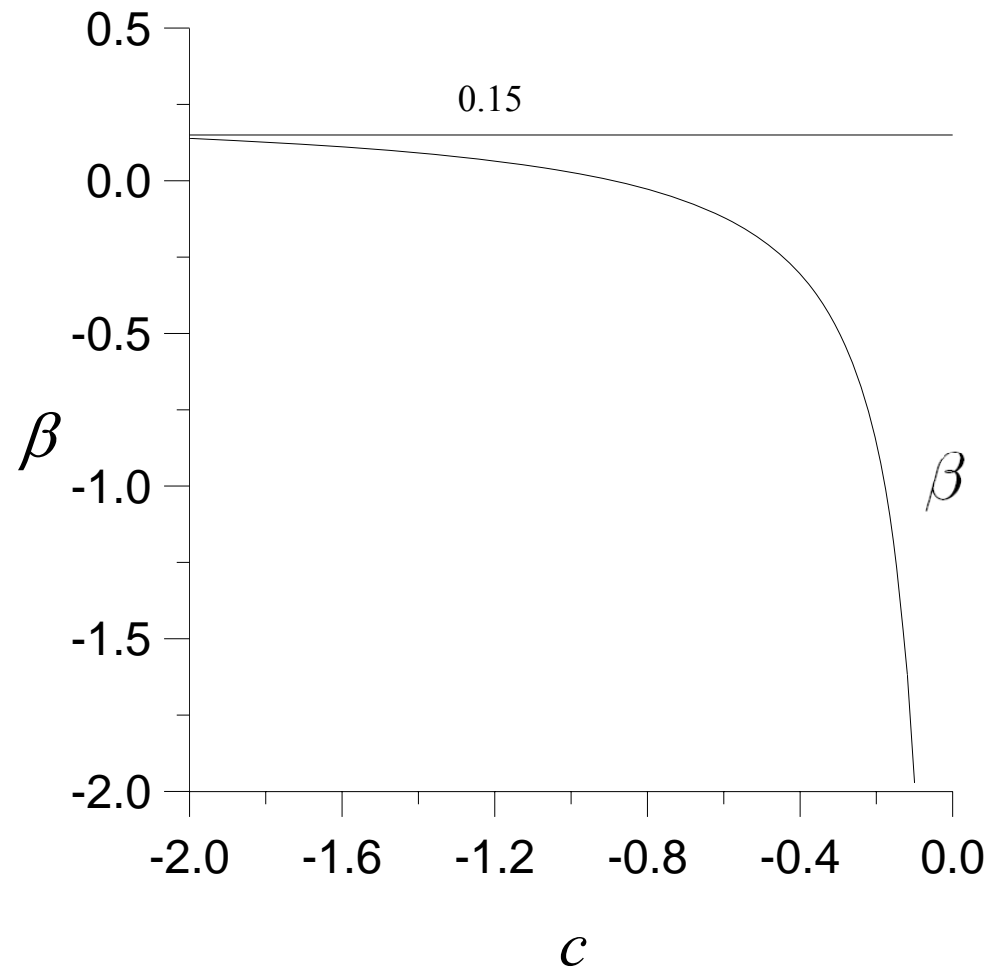
$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$\beta > 1/4$  – metoda stabilna dla dowolnego  $t$  [ ponieważ  $c < 0$  ]

uwaga: możemy sobie teraz  
sprawdzić stabilność Verleta dla  $dt=dx$  oraz  $\beta=0$  ,  $1/4 + 1/(2c) < 0$  [ok.]

dobór beta zapewniającego  
stabilność schematu Newmark  
w MRS dla zadanego kroku czasowego

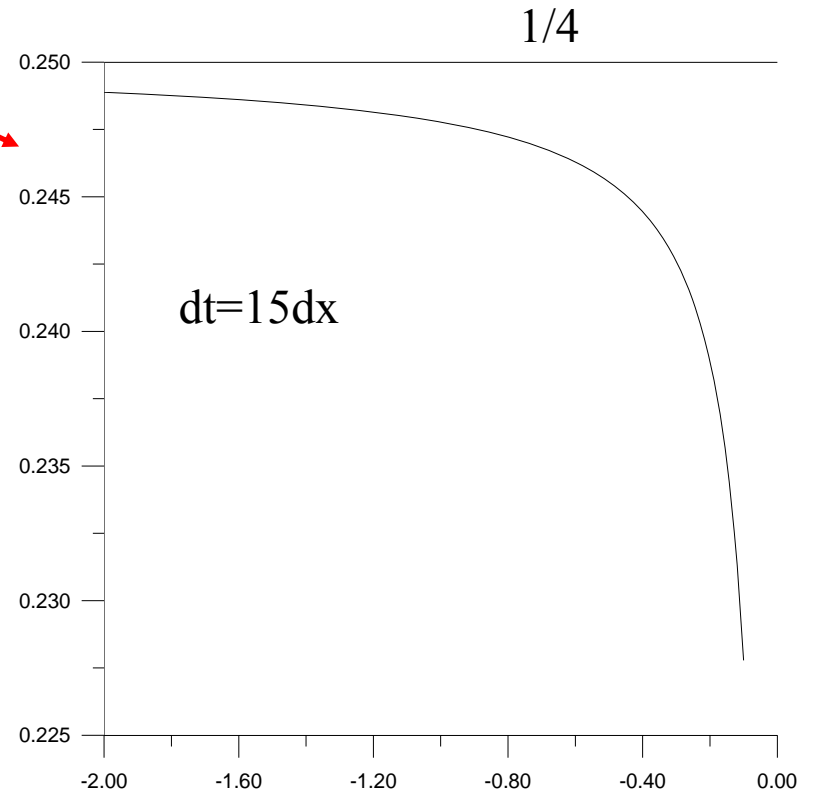
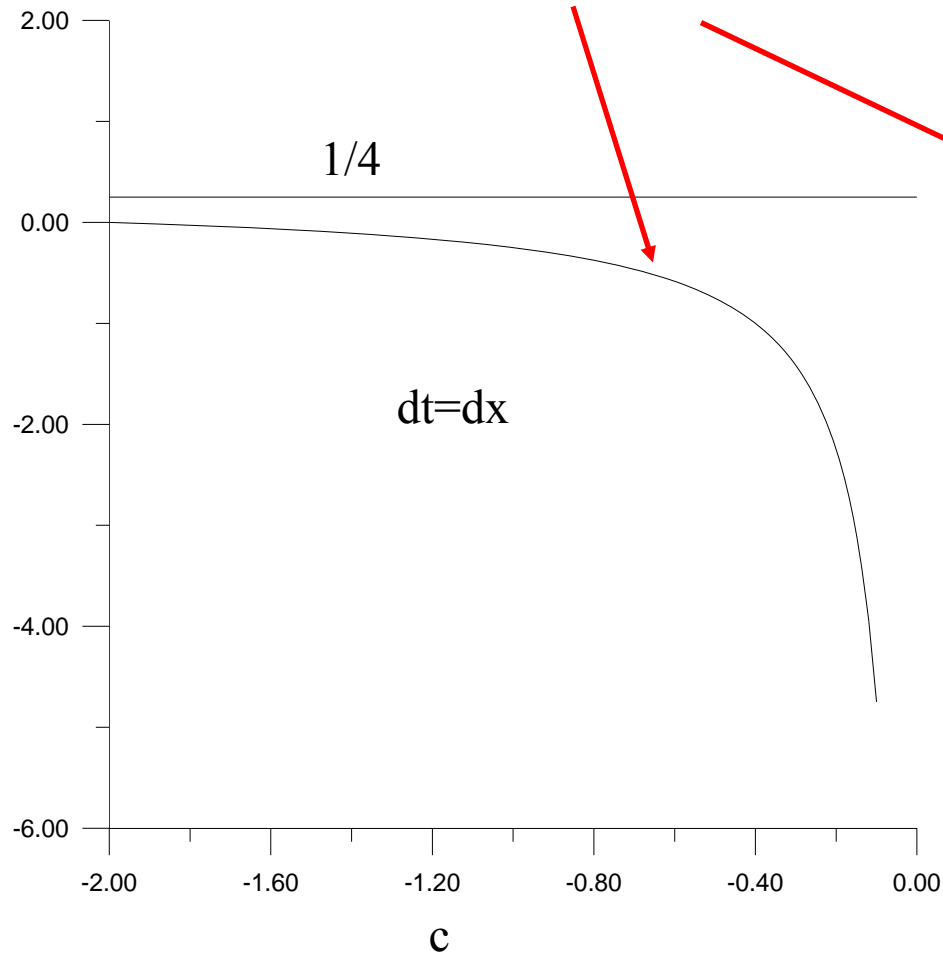
$dt=1.5 dx$



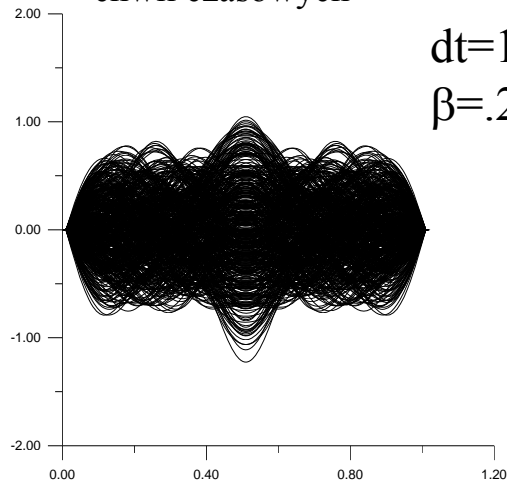
$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

dobór beta zapewniającego  
stabilność schematu Newmark  
w MRS dla zadanego kroku czasowego



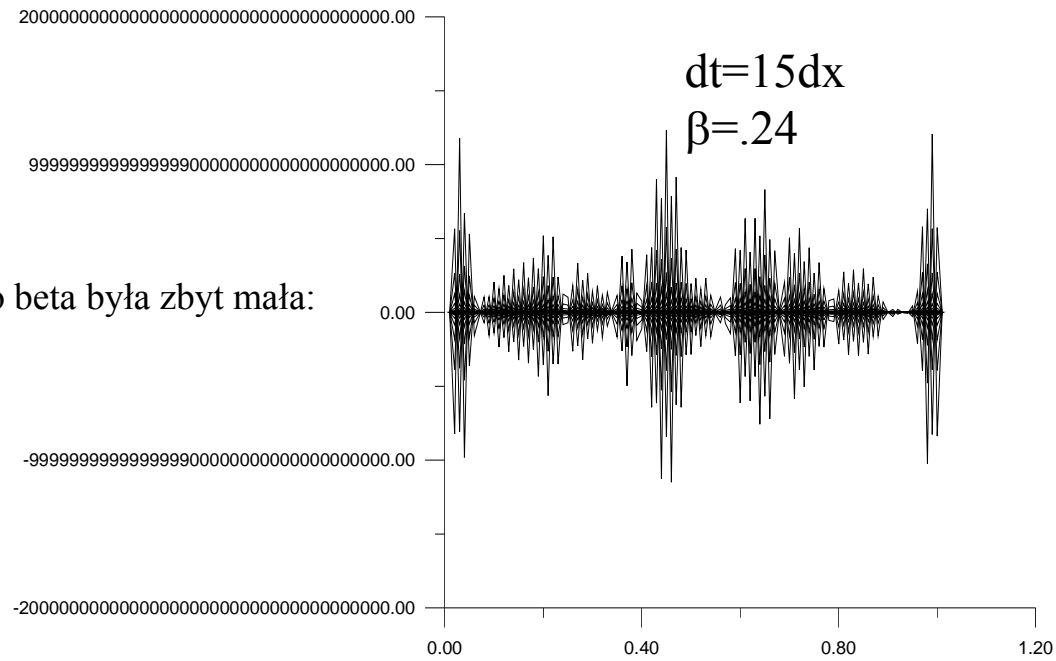
struna, b. wiele  
chwil czasowych



$dt=15dx$   
 $\beta=.25$

MRS, Newmark,  $\gamma=1/2$

bo beta była zbyt mała:



Ze schematem Newmarka spotkamy się ponownie przy omawianiu MES, Pokażemy, że umożliwi on skuteczne prowadzenie Rachunków dla lokalnie zagęszczonej siatki