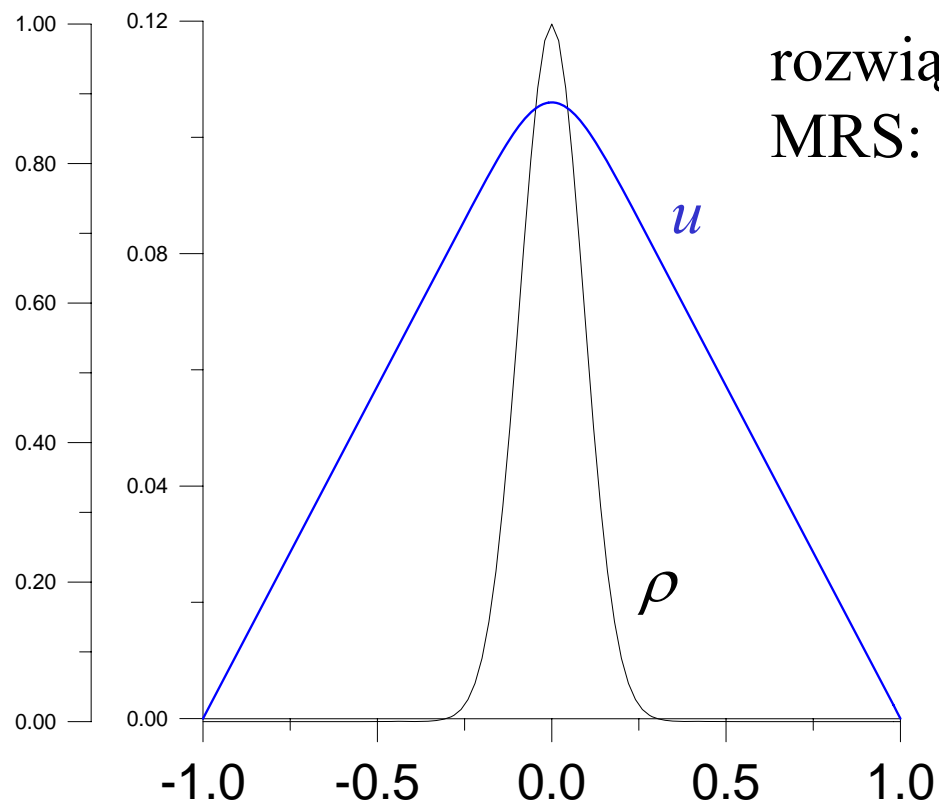


laboratorium

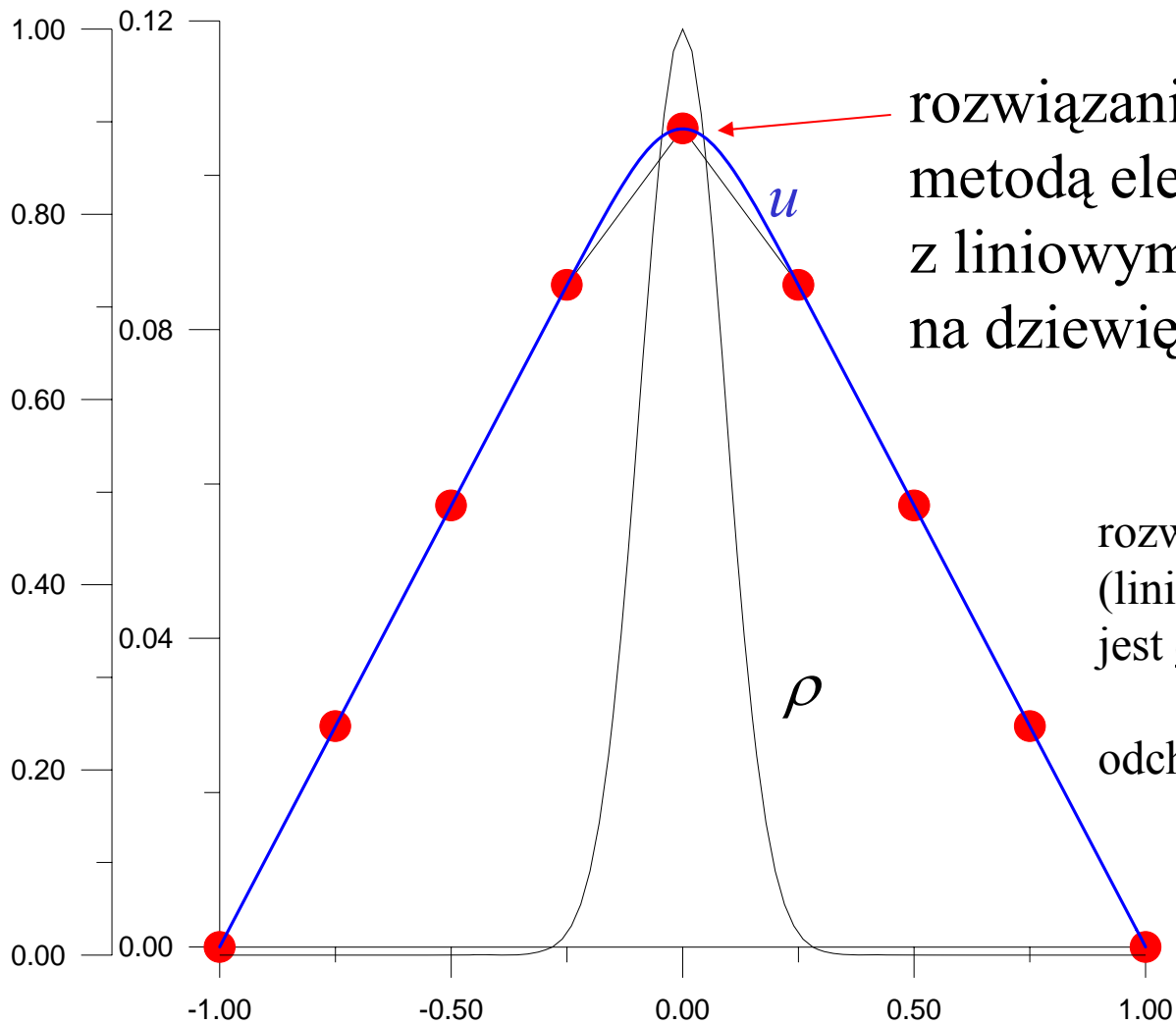
$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\rho(x)$$

$$\rho(x) = \exp(-60x^2)$$

$$u(-1) = u(1) = 0$$



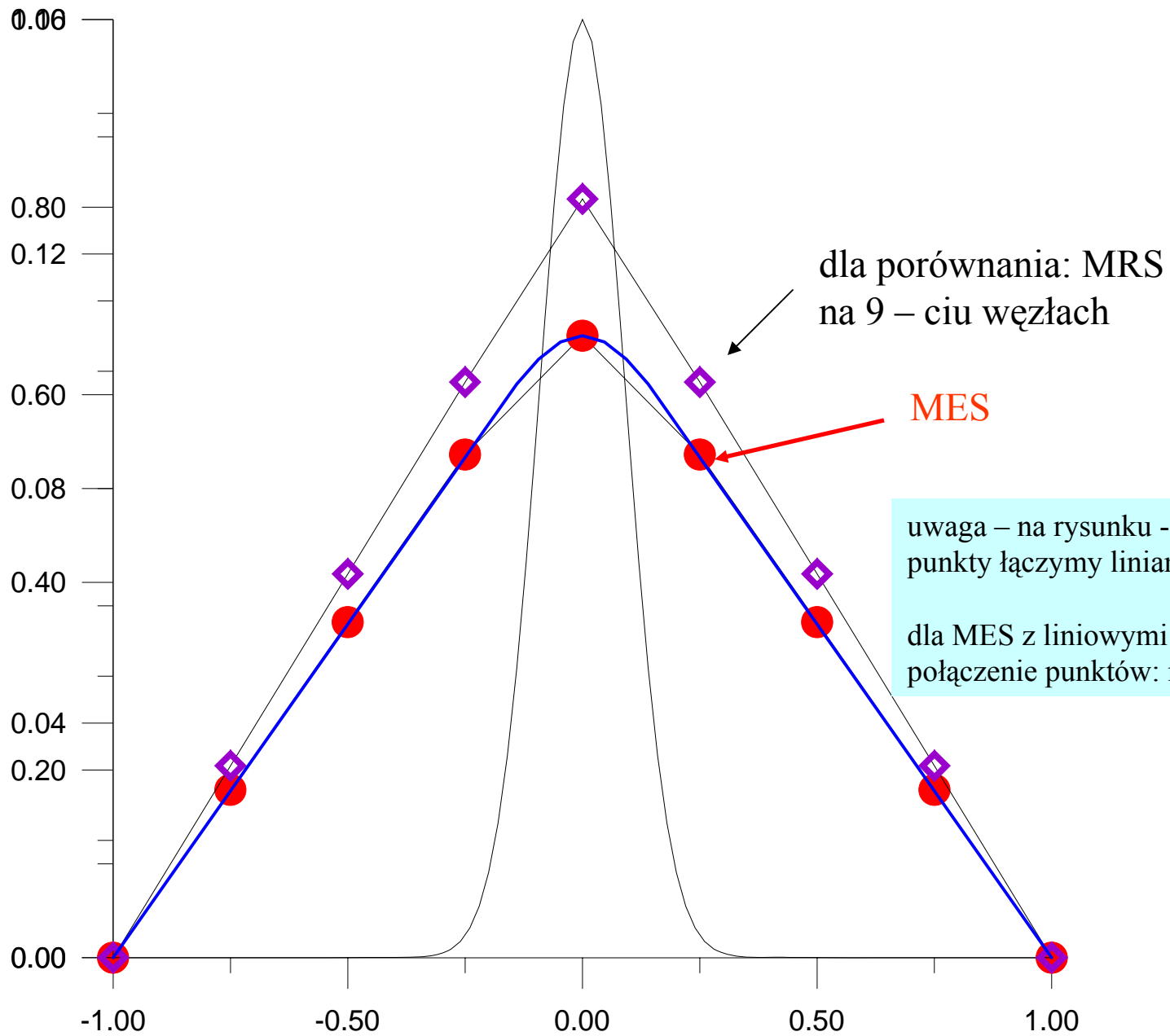
rozwiązanie (bardzo) dokładne
MRS: gęsta siatka



rozwiązanie
metodą elementów skończonych
z liniowymi funkcjami kształtu
na dziewięciu węzłach

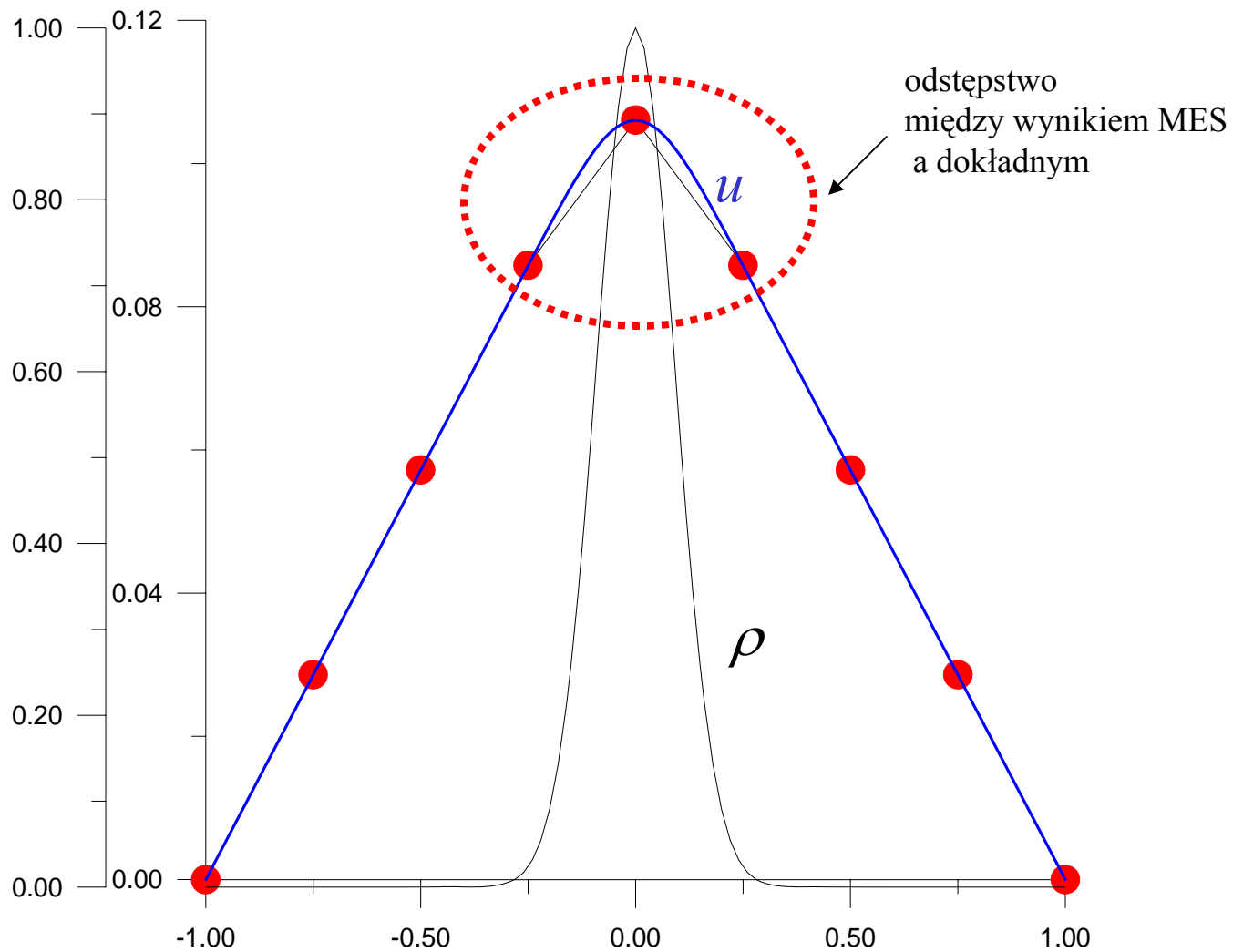
rozwiązanie MES w tej wersji
(liniowe fcje kształtu 1D)
jest dokładne w węzłach

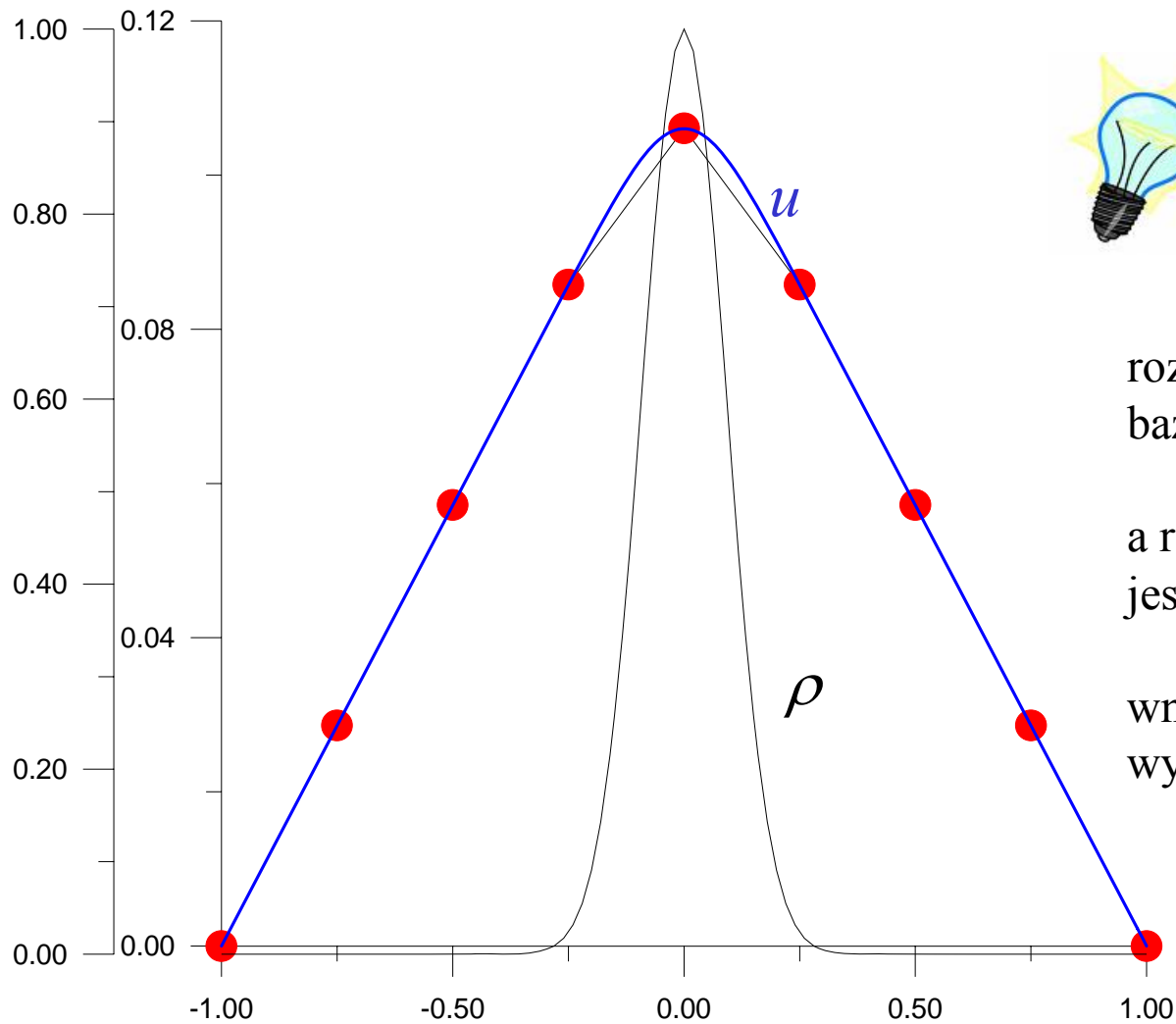
odchylenia: tylko między węzłami



uwaga – na rysunku - dla MRS punkty łączymy liniami tylko dla ilustracji

dla MES z liniowymi funkcjami kształtu połączenie punktów: ma znaczenie dosłowne

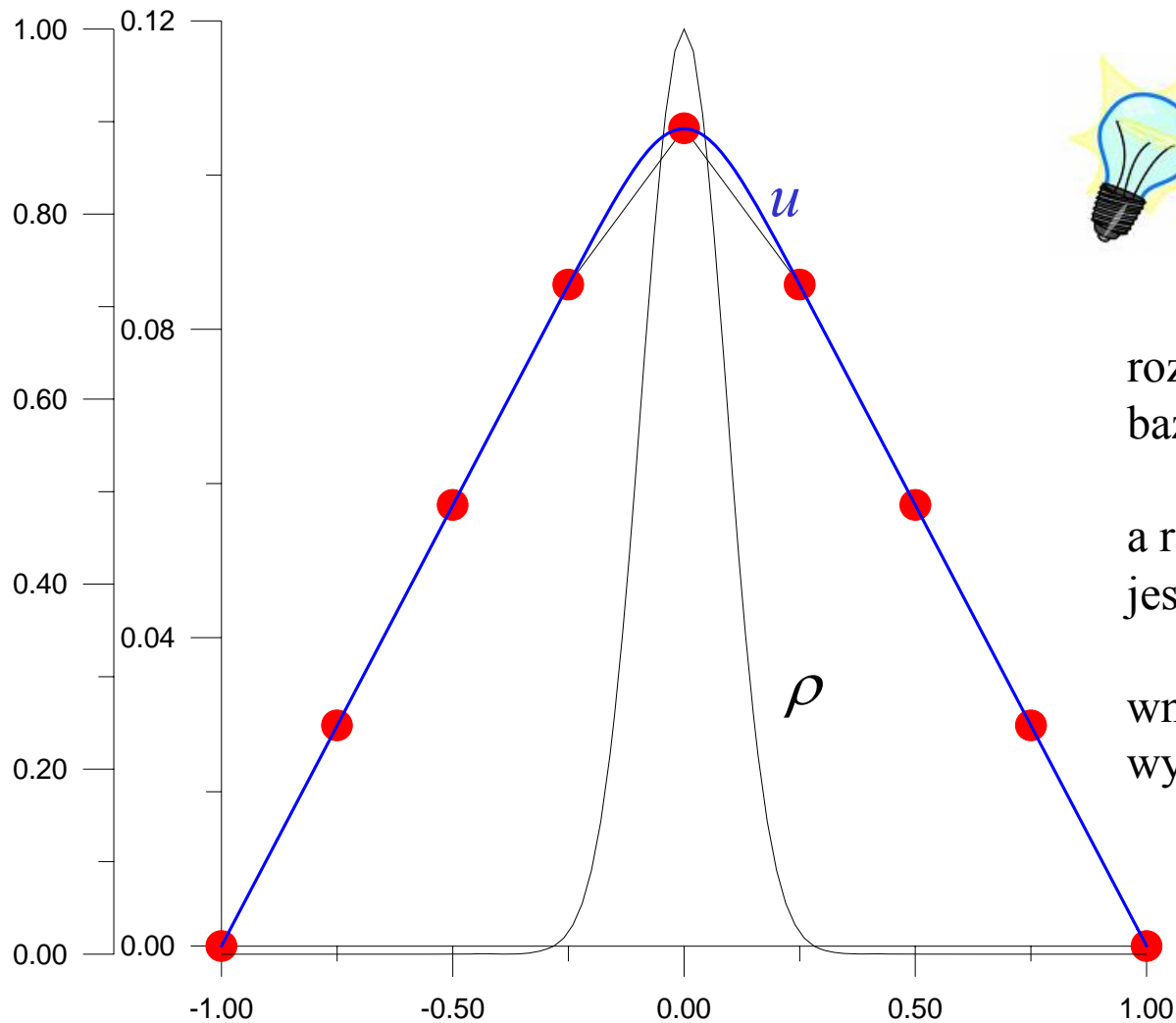




rozwiązanie MES w naszej
bazie jest odcinkami liniowe

a rozwiązanie dokładne
jest liniowe tam gdzie $\rho=0$

wniosek: tam gdzie $\rho=0$
wystarczy jeden element!



rozwiązanie MES w naszej
bazie jest odcinkami liniowe

a rozwiązanie dokładne
jest liniowe tam gdzie $\rho=0$

wniosek: tam gdzie $\rho=0$
wystarczy jeden element!

pomysł: przesunąć wszystkie węzły poza brzegowymi do obszaru gdzie nie znika
gęstość ładunku – tam gdzie u zaokrąglone.

wiemy już, że przesuwanie czerwonych punktów pójdzie po krzywej dokładnej.

$x_1 = -x_9 = -1$ zacieśniamy węzły wokół $x=0$

$$x_i = -b_x + \frac{i-2}{3}b_x \quad i=2,8$$

Kryterium wyboru węzłów? (b_x)

W przypadku ogólnym zawsze można policzyć pozostałość $Lu-f=r$ i badać np. (r,r) .

$x_1 = -x_9 = -1$ zacieśniamy węzły wokół $x=0$

$$x_i = -b_x + \frac{i-2}{3}b_x \quad i=2,8$$

Kryterium wyboru węzłów? (b_x)

W przypadku ogólnym zawsze można policzyć pozostałość $Lu-f=r$ i badać np. (r,r) .

dla równania Poissona mamy znacznie lepsze kryterium:

przy okazji dyskusji metod relaksacyjnych dowiedzieliśmy się, że najbliższe dokładnego jest rozwiązanie, które minimalizuje funkcjonal całki działania

wykorzystajmy działanie jako kryterium jakości rozwiązania w metodzie elementów skończonych

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\rho(x)$$

$$a = \int_{-1}^1 dx \left(\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \rho(x)u(x) \right)$$

$$a = \int_{-1}^1 dx \left(\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \rho(x)u(x) \right) \quad u(x) = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x)$$

$$a = \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} c_i c_j \int_{-1}^1 v_i'(x) v_j'(x) dx \right) - \left(\sum_i c_i \int_{-1}^1 \rho(x) v_i(x) dx \right)$$

rozpoznamy:

$$a = \left(-\frac{1}{2} \sum_{ij} c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) - \left(\sum_i c_i \int_{-1}^1 \rho(x) v_i(x) dx \right)$$

jednorodny warunek brzegowy Dirichleta: $c_1=c_9=0$

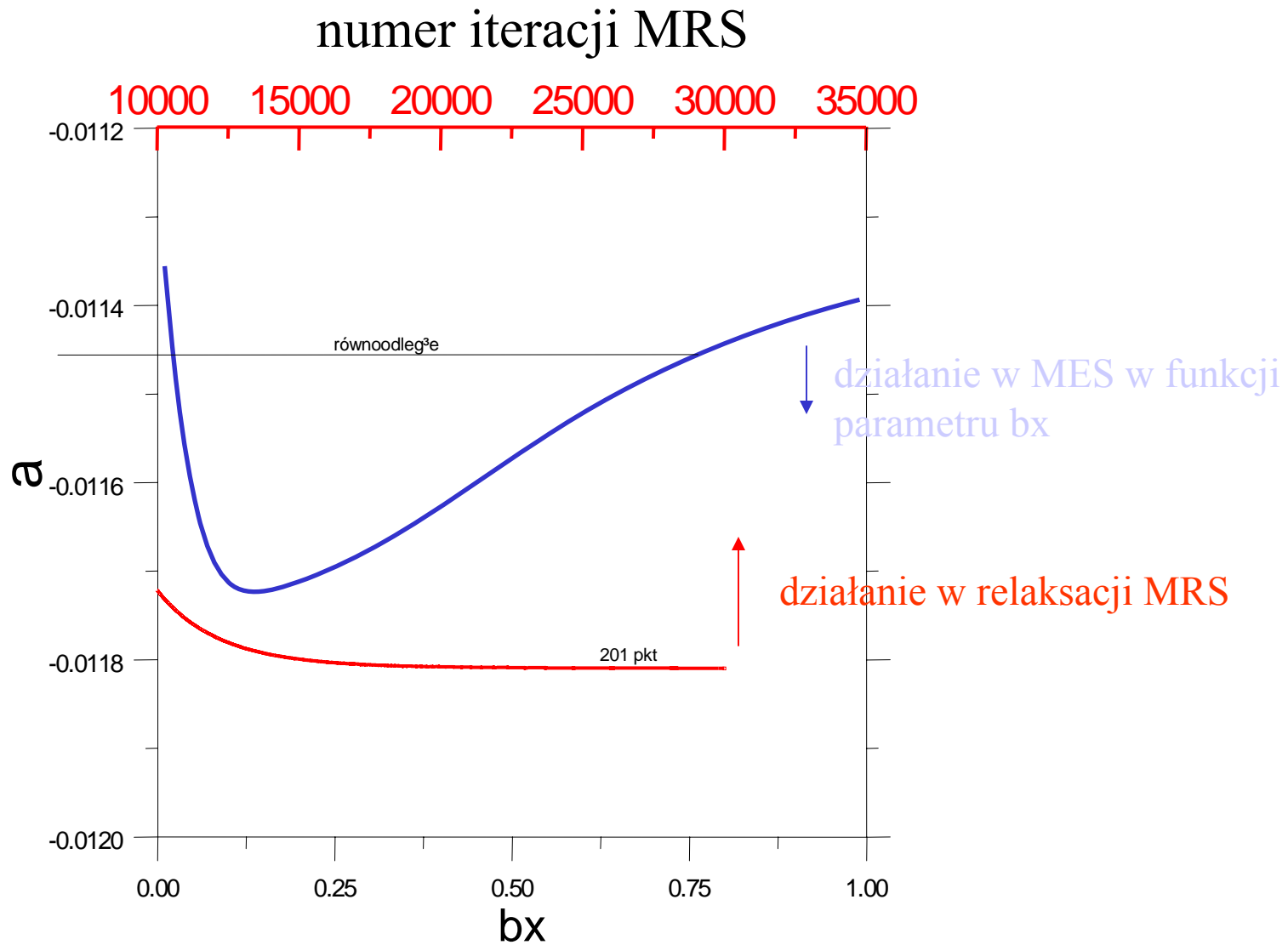
$$a = \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=2, j=2}^8 c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) + \left(\sum_{i=2}^8 c_i \mathbf{F}_i \right)$$

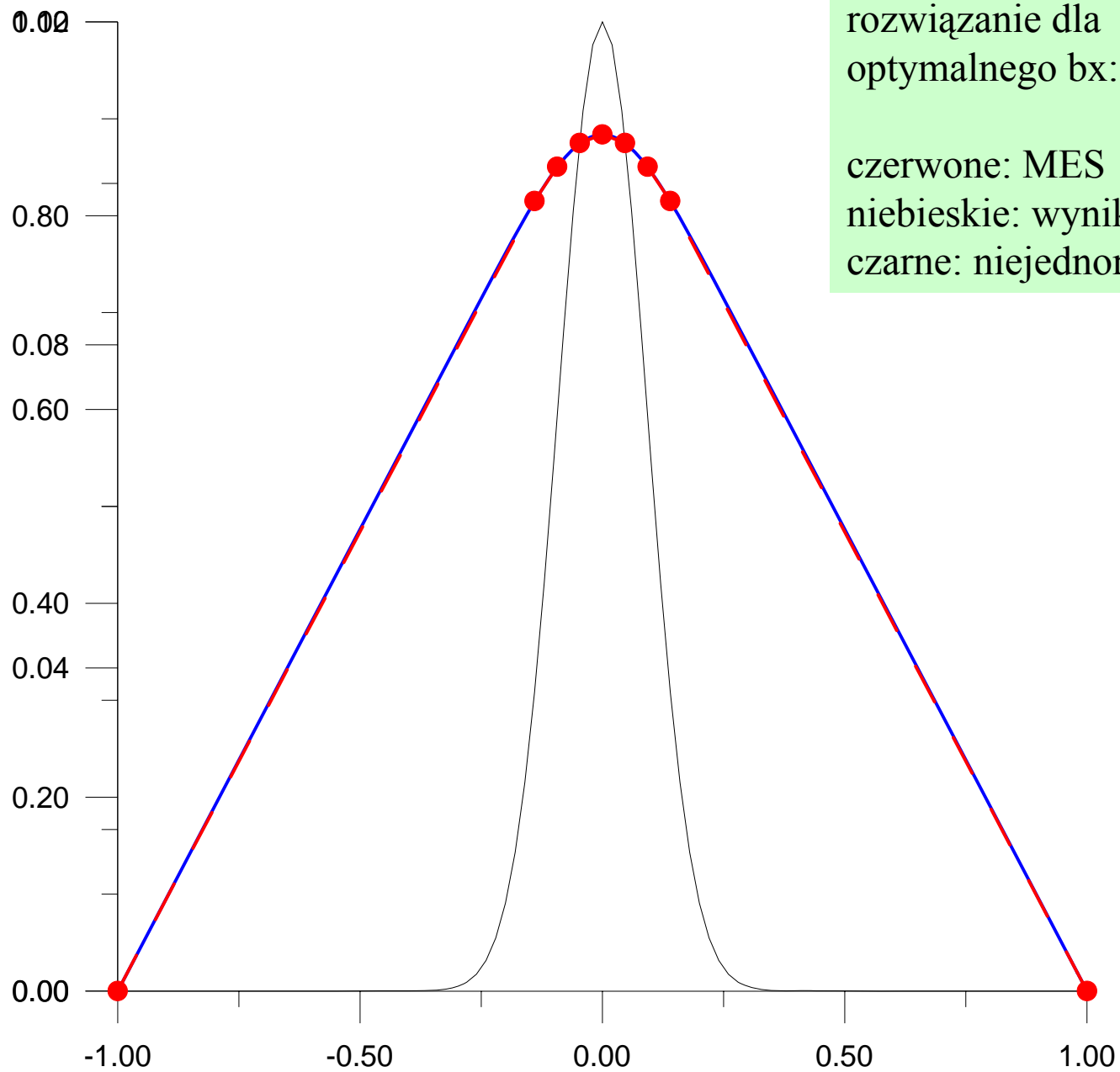
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ji} &= \int_{-1}^1 v_i''(x) v_j(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 v_i'(x) v_j'(x) dx, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_j = - \int_{-1}^1 \rho(x) v_j(x) dx.$$

do oceny jakości wyboru węzłów użyjemy macierzy \mathbf{A} i wektora \mathbf{F} , które uprzednio i tak musimy wyznaczyć aby wyliczyć rozwiązanie \mathbf{c} .

funkcjonał działania a wybór położeń węzłów:





rozwiązanie dla
optymalnego bx:

czerwone: MES
niebieskie: wynik dokładny
czarne: niejednorodność równania

Wybór węzłów: przez optymalizację funkcjonału ...

metoda Galerkina, w tym w wersji elementów skończonych ma charakter wariacyjny

metoda Galerkina dla dowolnej bazy jest równoważna metodzie Reyleigha-Ritza
gdy ta stosowalna

metoda Reyleigha-Ritza:
rozwiązanie w bazie funkcyjnej

$$u(x) = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x)$$

dla ustalonych funkcji bazowych (w naszym przykładzie: dla ustalonych węzłów)
 c wyznaczone przez warunek minimum a .

$$a = \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=2, j=2}^8 c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) + \left(\sum_{i=2}^8 c_i \mathbf{F}_i \right)$$

(pokazać, że warunek min a
produkuje $\mathbf{A}c = \mathbf{F}$)

Wybór węzłów: przez optymalizację funkcjonału ...

metoda elementów skończonych ma charakter wariacyjny

w ogóle: metoda Galerkina dla dowolnej bazy jest równoważna metodzie Reyleigha-Ritza
gdy ta stosowalna

metoda Reyleigha-Ritza:
rozwiązanie w bazie funkcyjnej

$$u(x) = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x)$$

dla ustalonych funkcji bazowych (w naszym przykładzie: dla ustalonych węzłów)
 c wyznaczone przez warunek minimum a .

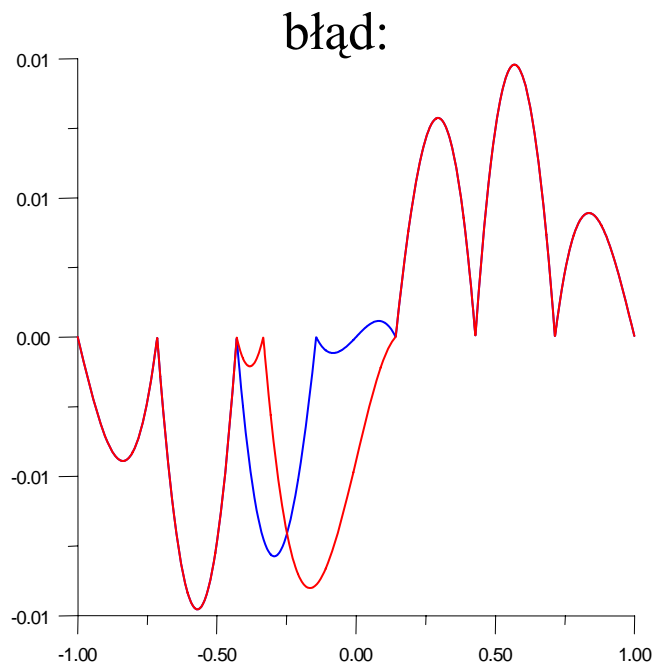
$$a = \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=2, j=2}^8 c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) + \left(\sum_{i=2}^8 c_i \mathbf{F}_i \right)$$

(pokazać, że warunek min a
produkuje $\mathbf{A}\mathbf{c}=\mathbf{F}$)

uwaga: w naszym przykładzie : dodatkowo optymalizowaliśmy funkcje bazowe
(położenie węzłów). Zasada wariacyjna (najmniejszego działania)
wykorzystana została więc dwukrotnie.

jeśli tylko znamy funkcjonał dla równania różniczkowego:
przyda się do optymalizacji kształtu elementów (2D)

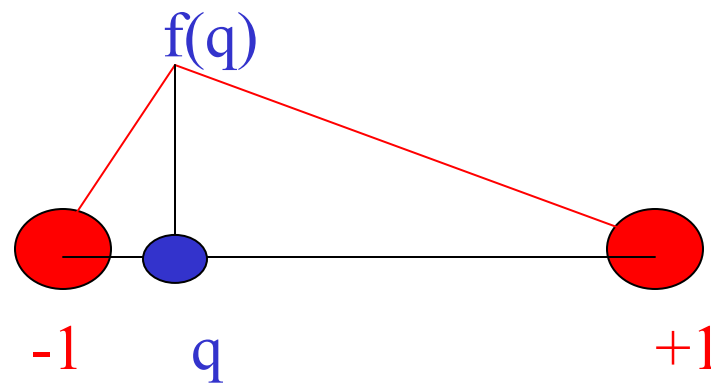
wracamy do zagadnienia ścisłości
rozwiązania MES w węzłach



Równanie Poissona,
funkcje kształtu liniowe
wynik MES **dokładny** w węzłach

w MRS wszystko co możemy
otrzymać, to wartości w węzłach,
które są dokładne **TYLKO**
w granicy $\Delta x \rightarrow 0$!!!

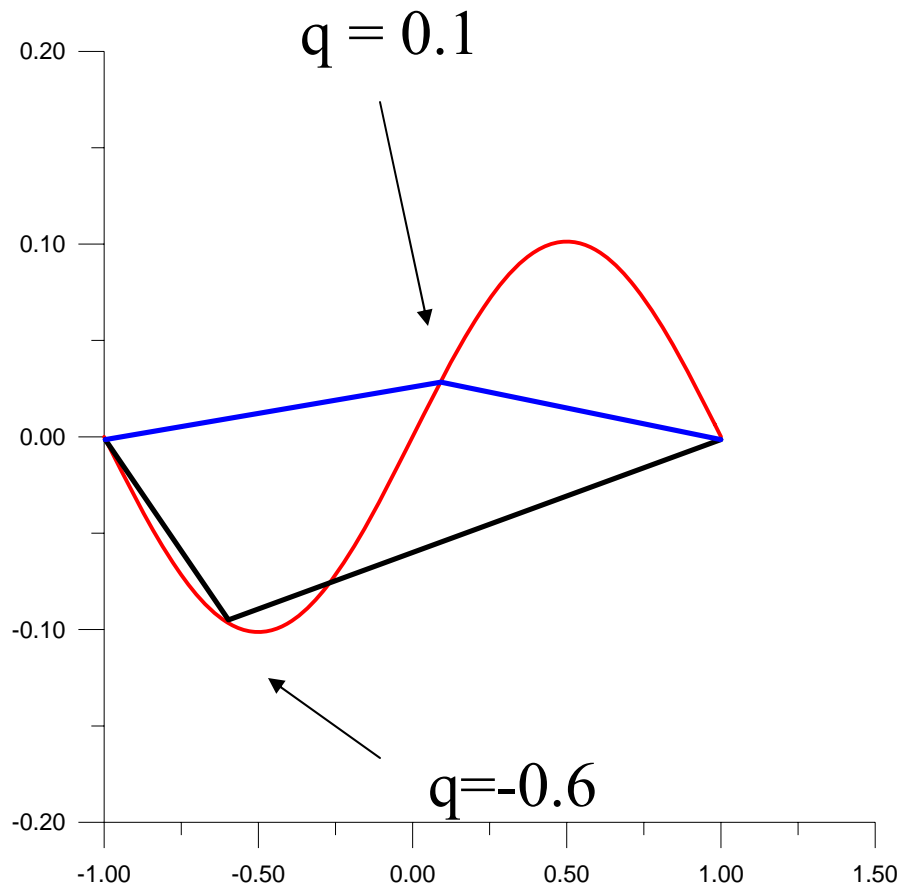
Wniosek:
cały rachunek
na 2 elementach:



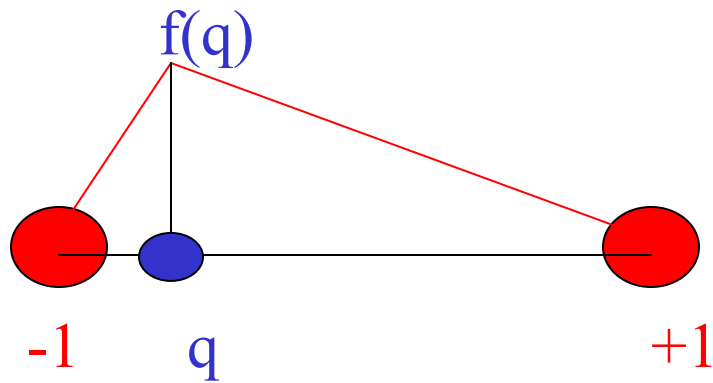
niezależnie od wyboru
 q : $f(q)$ da dokładne
rozwiązanie równania

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x)$$

q możemy ustawić gdziekolwiek, zawsze dostaniemy rozwiązanie dokładne



wniosek:
wystarczy przeskanować
 q przez pudło
aby uzyskać dokładny wynik



jeden węzeł wewnątrz pudła

funkcja kształtu

$$v_I = (x+1)/(q+1) \text{ dla } x < q$$

$$v_I = (1-x)/(1-q) \text{ dla } x > q$$

rozwiązanie przybliżone: $v = f(q)v_I(x)$

$$Lu = \rho$$

funkcjonał:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \rho(x)$$

$$F(v) = \frac{1}{2}(v, Lv) - (\rho, v)$$

wiemy że MES wyprodukuje takie $f(q)$ aby F było minimalne

wyliczymy F jako funkcję $f(q)$

z warunku $\min F(v)$ wyznaczymy $f(q)$

$$v = f(q)v_1(x)$$

$$v_1 = (x+1)/(q+1) \text{ dla } x < q$$

$$v_1 = (1-x)/(1-q) \text{ dla } x > q$$

$$F(v) = \frac{1}{2}(v, Lv) - (\rho, v)$$

v znika na brzegach:

$$(v, Lv) = \left(v, \frac{-d^2v}{dx^2} \right) = \int \left(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx} \right)$$

$$\left(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) = -f(q)^2 \left(\int_{-1}^q \frac{dx}{(q+1)^2} + \int_q^1 \frac{dx}{(1-q)^2} \right)$$

$$v = f(q)v_1(x)$$

$$v_1 = (x+1)/(q+1) \text{ dla } x < q$$

$$v_1 = (1-x)/(1-q) \text{ dla } x > q$$

$$F(v) = \frac{1}{2}(v, Lv) - (\rho, v)$$

v znika na brzegach:

$$(v, Lv) = \left(v, \frac{-d^2v}{dx^2} \right) = + \left(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx} \right)$$

$$\left(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) = -f(q)^2 \left(\int_{-1}^q \frac{dx}{(q+1)^2} + \int_q^1 \frac{dx}{(1-q)^2} \right)$$

$$\left(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) = f(q)^2 \left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(1-q)} \right)$$

$$\left(\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dx} \right) = f(q)^2 \left(\frac{2}{(1-q^2)} \right)$$

$$(\rho, v) = \int_{-1}^q \rho(x) \frac{f(q)(x+1)}{(q+1)} dx + \int_q^1 \rho(x) \frac{f(q)(1-x)}{(1-q)} dx$$

$$F = f(q)^2 \frac{1}{1 - q^2} - f(q) \left(\int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right)$$

$$\frac{dF}{df(q)} = 2f(q) \frac{1}{1 - q^2} - \left(\int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right) = 0$$

$$f(q) = \frac{1}{2}(1 - q) \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2}(1 + q) \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx$$

$$F = f(q)^2 \frac{1}{1 - q^2} - f(q) \left(\int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right)$$

$$\frac{dF}{df(q)} = 2f(q) \frac{1}{1 - q^2} - \left(\int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right) = 0$$

$$f(q) = \frac{1}{2}(1 - q) \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2}(1 + q) \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx$$

policzmy pochodne $f(q)$ po q

$$f'(q) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2} \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx + \frac{1}{2}(1-q)\rho(q)(q+1) - \frac{1}{2}(1+q)\rho(q)(1-q)$$

$$F = f(q)^2 \frac{1}{1-q^2} - f(q) \left(\int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right)$$

$$\frac{dF}{df(q)} = 2f(q) \frac{1}{1-q^2} - \left(\int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right) = 0$$

$$f(q) = \frac{1}{2}(1-q) \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2}(1+q) \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx$$

policzmy pochodne $f(q)$ po q

$$f'(q) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2} \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx + \frac{1}{2}(1-q)\rho(q)(q+1) - \frac{1}{2}(1+q)\rho(q)(1-q)$$

$$f''(q) = -\frac{1}{2}\rho(q)(q+1) - \frac{1}{2}\rho(q)(1-q)$$

$$-f''(q) = \rho(q)$$

$$F = f(q)^2 \frac{1}{1-q^2} - f(q) \left(\int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right)$$

$$\frac{dF}{df(q)} = 2f(q) \frac{1}{1-q^2} - \left(\int_{-1}^q \rho(x) \frac{dx(x+1)}{(q+1)} + \int_q^1 \rho(x) \frac{dx(1-x)}{(1-q)} \right) = 0$$

$$f(q) = \frac{1}{2}(1-q) \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2}(1+q) \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx$$

policzmy pochodne $f(q)$ po q

$$f'(q) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^q \rho(x)(x+1)dx + \frac{1}{2} \int_q^1 \rho(x)(1-x)dx + \frac{1}{2}(1-q)\rho(q)(q+1) - \frac{1}{2}(1+q)\rho(q)(1-q)$$

$$f''(q) = -\frac{1}{2}\rho(q)(q+1) - \frac{1}{2}\rho(q)(1-q)$$

$$-f''(q) = \rho(q) \longrightarrow$$

spełnia silną formę równania !

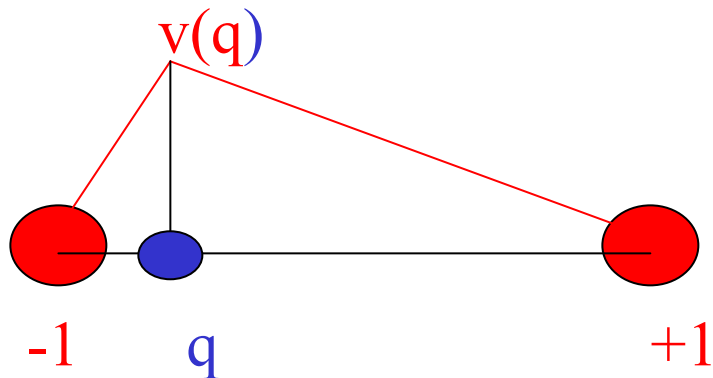
$$u'' = -\rho$$

stąd wynik dokładny dla u w $x=q$

silna a słaba forma równania: różnica

$$u(x)'' = -\rho(x)$$

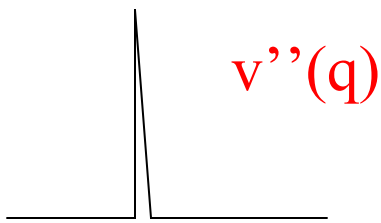
druga pochodna potencjału = ładunek



funkcja v nie spełnia silnej formy równania różniczkowego, tylko słabą:

$$v'(q)$$

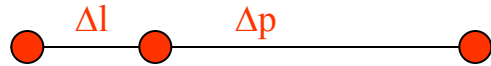
$$(v, v'')f(q) = -(v, \rho)$$



druga pochodna potencjału: delta Diraca, niezależnie od tego jak wygląda niejednorodność równania Poissona

Podobny zabieg dla MRS: 3 węzły. Metoda różnic skończonych, siatka nierównomierna

Iloraz różnicowy drugiej pochodnej dla nierównej siatki:



$$\left. \begin{aligned} u(x + \Delta p) &= u(x) + \Delta p \frac{du}{dx} + \frac{\Delta p^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta p^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta p^4) && \times \Delta l \\ u(x - \Delta l) &= u(x) - \Delta l \frac{du}{dx} + \frac{\Delta l^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta l^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta l^4) && \times \Delta p \end{aligned} \right| +$$

Wzór trójpunktowy

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{u(x - \Delta l)\Delta p + u(x + \Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l\Delta p(\Delta l + \Delta p)} + O(\Delta l - \Delta p)$$

tracimy jeden rząd
dokładności w porównaniu
z siatką równomierną
Problem rozwiązany
w metodzie elementów
skończonych.

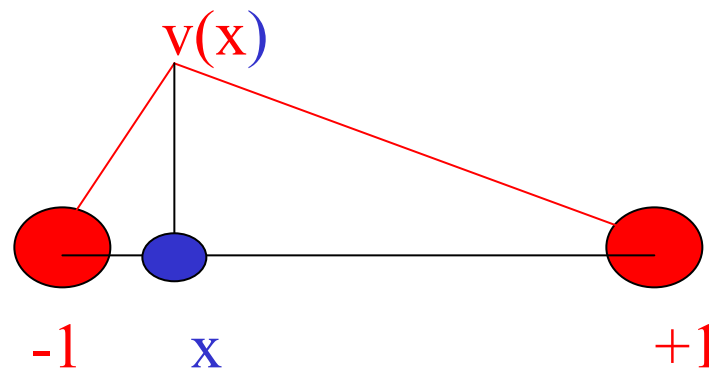
W MES: nie ma problemu
bo pochodne i całki liczymy dokładnie!

Co się stanie jeśli taki zabieg powtórzymy w MRS?

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{u(x - \Delta l)\Delta p + u(x + \Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l\Delta p(\Delta l + \Delta p)}$$

$$\Delta p = 1 - x$$

$$\Delta l = x + 1$$

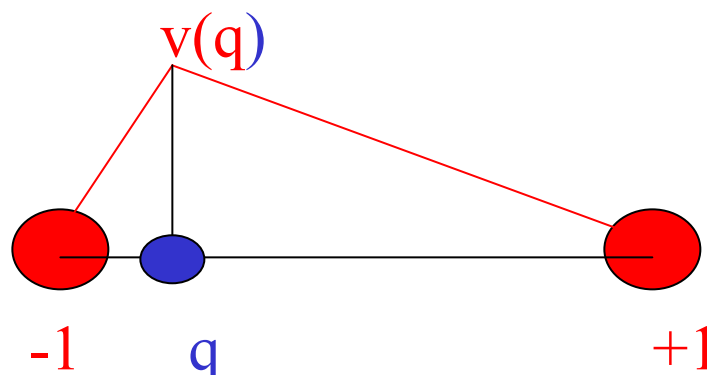


Co się stanie jeśli taki zabieg powtórzymy w MRS?

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{u(x - \Delta l)\Delta p + u(x + \Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l\Delta p(\Delta l + \Delta p)}$$

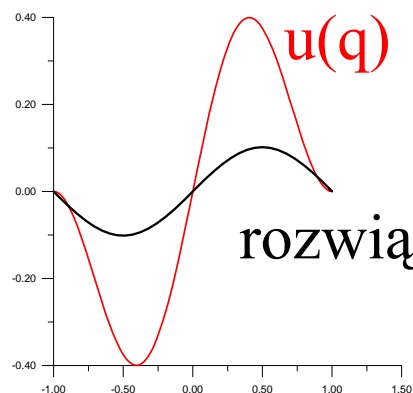
$$\Delta p = 1 - q$$

$$\Delta l = q + 1$$



$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{-2u(q)}{(1 - q^2)2} = 2 \frac{-u(q)}{(1 - q^2)} = -\sin(\pi q)$$

$$u(q) = \sin(\pi q)(1 - q^2)/2$$



rozwiązanie dokładne

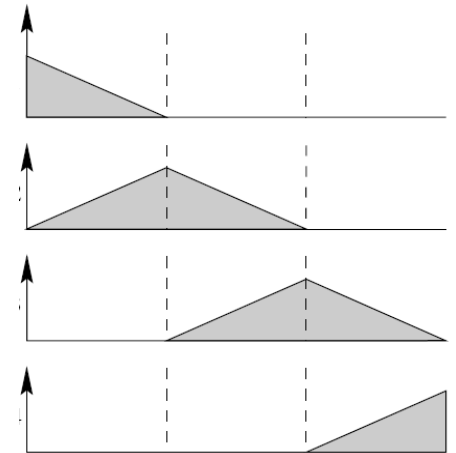
liniowe fcje kształtu a warunki Neumanna

$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i$$

$$v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$u'(x) = \sum_j y_j v'_j(x)$$

$$u'(x = x_1) = C$$



tylko v_1 oraz v_2 wnoszą przyczynek do pochodnej na lewym końcu:

$$u'(x_1) = -y_1 \frac{1}{x_2 - x_1} + y_2 \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

pierwszy wiersz macierzy S

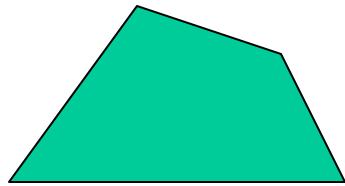
$(-1/h_2 \ 1/h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots)$ prawa strona pierwszy wiersz F : C

warunki mieszane [Robina] $u'(x_1) + Du(x_1) = E$: $(-1/h_2 + D \ 1/h_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots)$

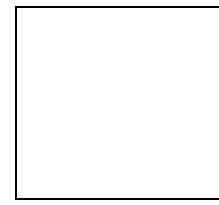
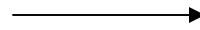
wybrane narzędzia MES umożliwiające
jej automatyzację w więcej niż 1D:

- 1) macierze sztywności pojedynczych elementów
oraz ich
- 2) składanie do globalnej macierzy sztywności
- 3) przestrzeń odniesienia i jej mapowanie do przestrzeni fizycznej

Przestrzeń referencyjna [odniesienia]



element w przestrzeni fizycznej



$x = -1$ 1

$y = 1$

$y = -1$

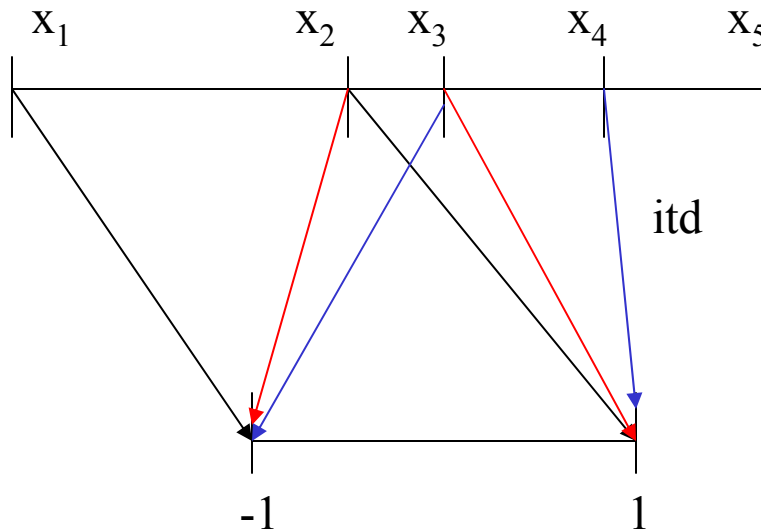
element w przestrzeni odniesienia

w 1D

Problem fizycznie zadany jest na siatce $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$

Rachunki (całkowanie elementów macierzowych)

dla każdego elementu chcemy przenieść do przedziału $(-1, 1)$

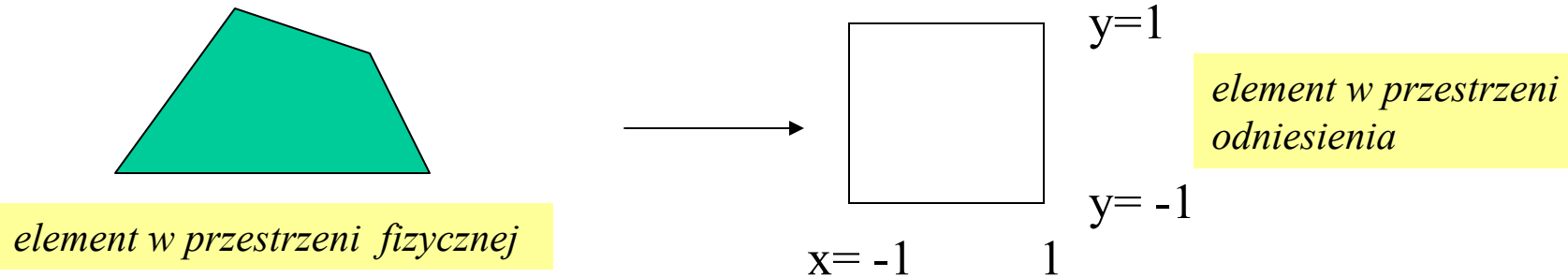


przestrzeń fizyczna

itd

przestrzeń odniesienia

Przestrzeń referencyjna [odniesienia]



w 1D

Problem fizycznie zadany jest na siatce $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$

Rachunki (całkowanie elementów macierzowych)

dla każdego elementu chcemy przenieść do przedziału $(-1, 1)$

Element $K_m = (x_{m-1}, x_m) \rightarrow (-1, 1)$

mapowanie z $(-1, 1)$ do K_m :

$x = (x_m + x_{m-1})/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$, gdzie ξ z przedziału $(-1, 1)$

Modelowy operator

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

będziemy całkować jego elementy macierzowe w przestrzeni odniesienia

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

Całkowanie macierzy sztywności w przestrzeni referencyjnej

element macierzowy całkowany w elemencie [fizycznym]

$$c_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left(-a_2 v'_i(x) v'_j(x) + a_1 v'_i(x) v_j(x) + a_0 v_i(x) v_j(x) \right) dx$$

całkę i pochodne przenosimy do przestrzeni odniesienia:

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$J_m = (x_m - x_{m-1})/2$$

skala transformacji m -tego elementu:
(czynnik skali, jacobian) $J_m = \frac{dx}{d\xi}$

pole elementu fizycznego
/ pole elementu odniesienia

przy transformacji: granice całki
zmieniają się na $-1, 1$, poza tym $dx = J_m d\xi$

transformacja pochodnych:

$$u'(x) = \frac{du(x(\xi))}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J_m}$$

1D: J nie zależy od ξ
w 2D: zobaczymy,
że nie zawsze tak jest
[gdy element zmienia
swoją kształt w mapowaniu.
w 1D: odcinek \rightarrow odcinek]

Całkowanie macierzy sztywności w przestrzeni referencyjnej

$$C_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{-a_2 v'_i(x) v'_j(x) + a_1 v'_i(x) v_j(x) + a_0 v_i(x) v_j(x)}{dx} dx$$

$$u'(x) = \frac{du(x(\xi))}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J_m}$$

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$C_m = \int_{-1}^1 \left(-a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m^2} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) \right) J_m d\xi$$

$$C_m = \int_{-1}^1 \left(-a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) \right) J_m d\xi$$

całkowanie wektora sztywności: całka (f, v_j) transformuje się jak wyraz z a_0 .

odcinkowo liniowe funkcje kształtu w przestrzeni odniesienia

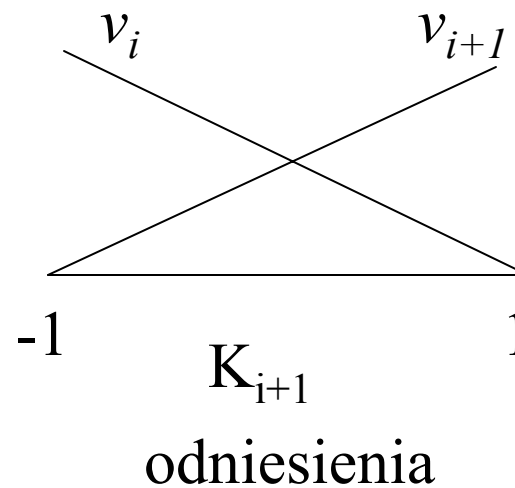
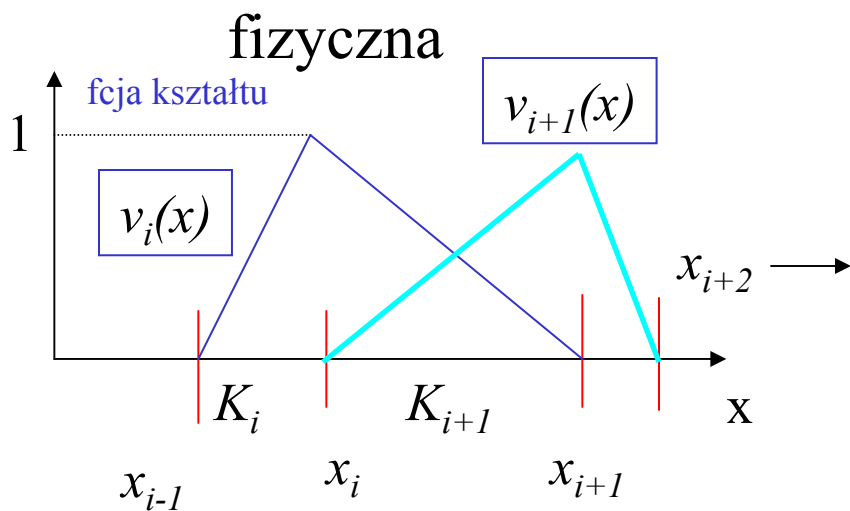
$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$x(\xi) = (x_i + x_{i+1})/2 + (x_{i+1} - x_i)/2 \xi$$

W elemencie $i+1$
dwie funkcje kształtu

$$v_i(x(\xi)) = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$v_{i+1}(x(\xi)) = 1/2 \xi + 1/2$$



Przykład całkowanie w przestrzeni odniesienia dla bazy odcinkami liniowej

(całka po elemencie K_{i+1})

$$S_{i,i+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx v'_i(x) v'_{i+1}$$

$$J_m = \frac{dx}{d\xi}$$

$$J_{i+1} = (x_{i+1} - x_i) / 2$$

pole elementu fizycznego
/ pole elementu odniesienia

$$C_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \overset{\text{tu prim to pochodna po } x}{-a_2 v'_i(x) v'_j(x) + a_1 v'_i(x) v_j(x) + a_0 v_i(x) v_j(x)} dx$$

$$C_m = \int_{-1}^1 \overset{\text{a tu po } \xi}{-a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi)} J_m d\xi$$

$$v_i(x(\xi)) = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$v_{i+1}(x(\xi)) = 1/2 \xi + 1/2$$

$$S_{i,i+1} = \int_{-1}^1 d\xi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{x_{i+1} - x_i} = \frac{1}{h_{i+1}}$$

ten wynik już znamy
z całkowania w przestrzeni
fizycznej

Macierz sztywności pojedynczego elementu składanie macierzy globalnej

Zmieniamy punkt widzenia:
(z funkcji kształtu na elementy)

$$v_i(x(\xi)) = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$v_{i+1}(x(\xi)) = 1/2 \xi + 1/2$$

$$\begin{array}{ccc} u_1 & & u_2 \text{ (parametry węzłowe)} \\ x_{m-1} & & x_m \text{ niewiadome} \\ \hline -1 & \text{element} & 1 \\ & & J_m = h_m/2 \end{array}$$

$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

$$\phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$\phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi$$

[funkcje bazowe :
ważone
parametrami
węzłowymi]

Zmieniamy punkt widzenia:
(z funkcji kształtu na elementy)

$$\begin{array}{ccc} u_1 & & u_2 \text{ (parametry węzłowe)} \\ x_{m-1} & & x_m \text{ niewiadome} \\ \hline -1 & \text{element} & 1 \\ & & J_m = h_m/2 \end{array}$$

$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

macierz sztywności
elementu m
[wymiar taki jak liczba funkcji
kształtu na element]

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1/2 - 1/2 \xi \\ \phi_2 &= 1/2 + 1/2 \xi \end{aligned}$$

$$E^m = \begin{bmatrix} E_{11}^m & E_{12}^m \\ E_{21}^m & E_{22}^m \end{bmatrix}$$

$$E_{ij}^m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \phi_i(x) L \phi_j(x) dx$$

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

zależność od m w J_m :

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

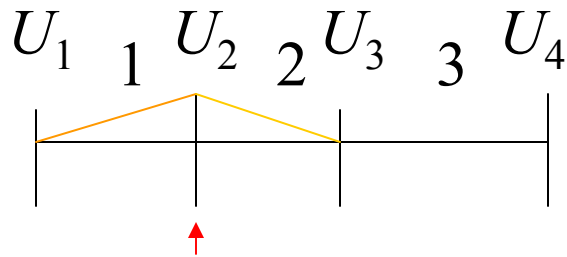
$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 -a_2 v_i'(\xi) v_j'(\xi) \frac{1}{J_m} + a_1 v_i'(\xi) v_j(\xi) + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) J_m d\xi$$

Składanie (assembly) globalnej macierzy sztywności

$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

globalna $[U]$ i lokalna $[u]$ numeracja węzłów

węzły na granicy elementów obsługują więcej niż jeden element

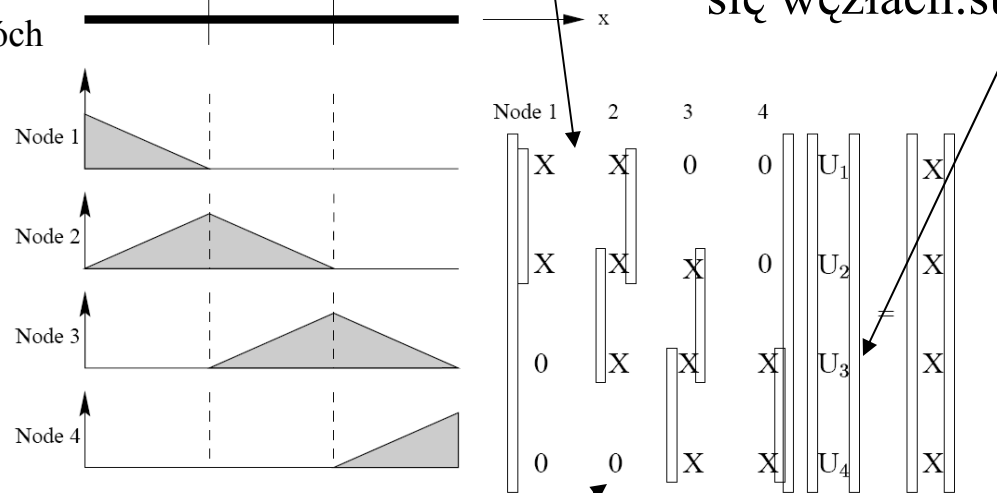


$$E^m = \begin{bmatrix} E_{11}^m & E_{12}^m \\ E_{21}^m & E_{22}^m \end{bmatrix}$$

$$u_2^1 = u_1^2$$

na U_2 opiera się rozwiązanie w dwóch sąsiednich elementach

na przekrywających się węzłach: suma



do macierzy S wchodzi całki po sąsiednich elementach z funkcją kształtu wspólną dla sąsiadów

macierz globalna S (rozmiar = liczbie węzłów)

case study

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \begin{array}{l} u(x=-1)=0 \\ u(x=1)=0 \end{array}$$

Przedział $(-1,1)$
Podzielony na 7 elementów
(8 węzłów)

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \underline{x_{m-1}} & x_m \\ -1 & 1 \end{array} \quad J_m = h_m/2$$

$$\begin{array}{l} \phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi \\ \phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi \end{array}$$

$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi)$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[-\frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{d\phi_j}{d\xi} \right] d\xi$$

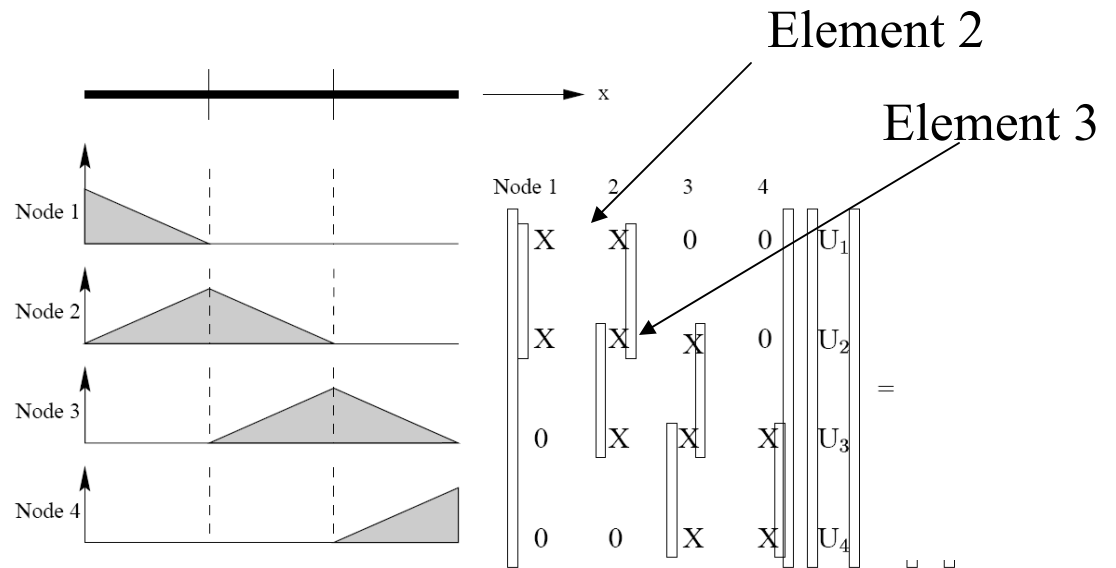
$$E_{ij}^m = \frac{2}{h_m} 2 \frac{1}{4} (-1)^{i+j+1} = \frac{(-1)^{i+j+1}}{h_m}$$

$$E_{ij}^m = \frac{1}{h_m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Składanie (assembly) macierzy sztywności z całek po elementach

$$E_{ij}^m = \frac{1}{h_m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

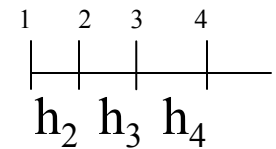
dodajemy elementy
 z różnych macierzy lokalnych
 które odpowiadają temu samemu węzłowi



$$S_{mm} = E_{22}^m + E_{11}^{m+1}$$

$$S_{m,m+1} = E_{12}^{m+1}$$

$$S_{m,m-1} = E_{21}^m$$



$$S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -(\frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4}) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h_n} & -\frac{1}{h_n} \end{pmatrix}$$

Forma już znana

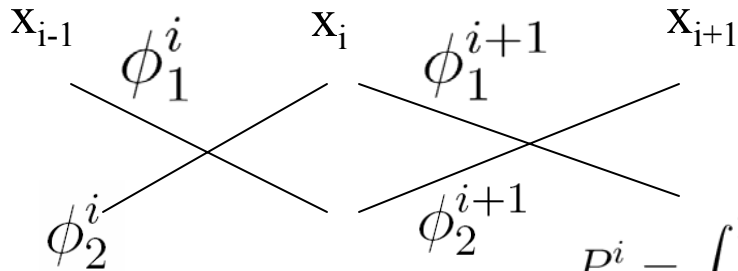
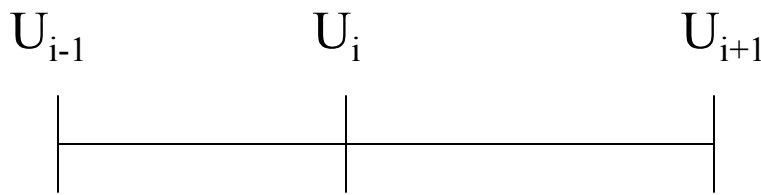
Wektor obciążeń pojedynczego elementu/składanie globalnego

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

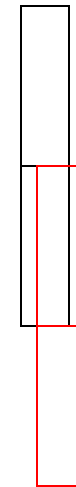
po elemencie K_i

po K_{i+1}



$$P^i = \begin{pmatrix} P_1^i \\ P_2^i \end{pmatrix}$$

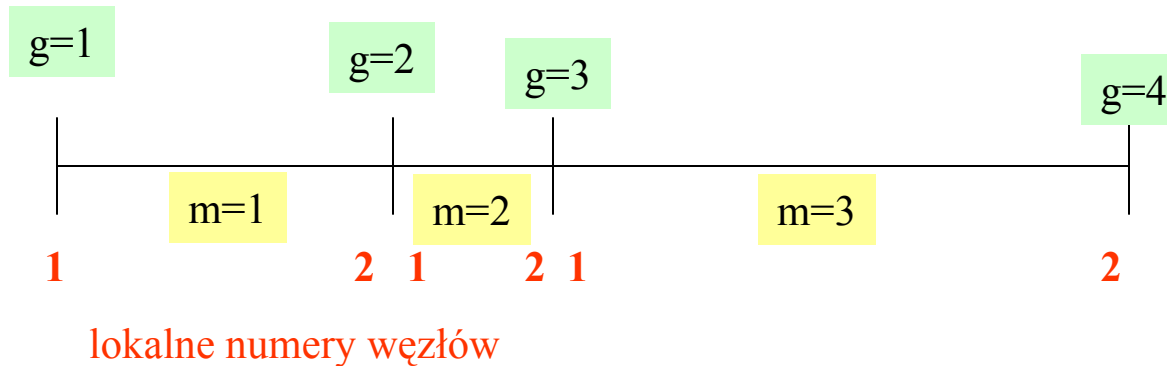
$$P_k^i = \int_{-1}^1 f(\xi) \phi_k^i(\xi) J_i d\xi$$



$$F_i = P_2^i + P_1^{i+1}$$

druga funkcja elementu i
oraz pierwsza elementu $i+1$ = to ta sama funkcja $v_i(x)$

Składanie globalnej macierzy sztywności – buchalteria węzłów



m -numeruje elementy

g – globalna numeracja węzłów

$nr(k,m)$ – przyporządkowanie numeru globalnego węzłowi o lokalnym numerze k w elemencie m

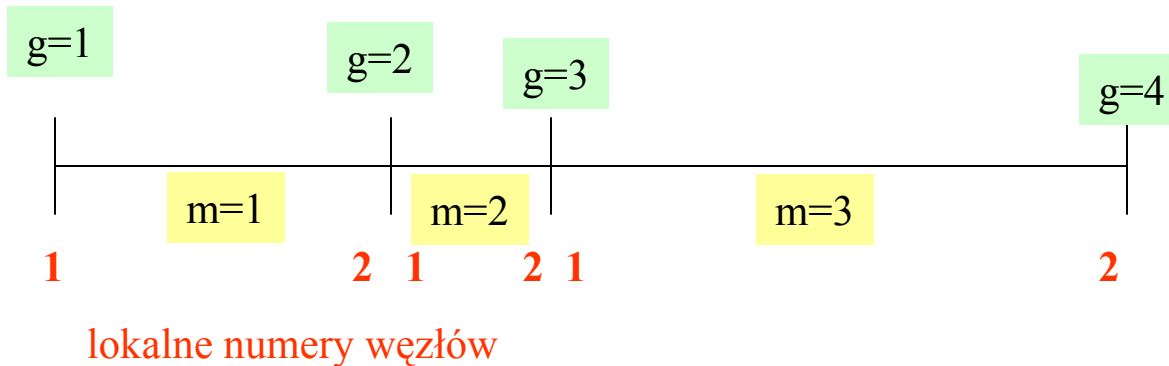
$$1 = nr(1,1)$$

$$2 = nr(2,1) = nr(1,2)$$

$$3 = nr(2,2) = nr(1,3)$$

$$4 = nr(2,3)$$

Składanie globalnej macierzy sztywności – buchalteria węzłów



lokalne numery węzłów

m-numeruje elementy

g – globalna numeracja węzłów

$nr(k,m)$ – przyporządkowanie numeru globalnego węzłowi o lokalnym numerze k w elemencie m

$$\begin{aligned} 1 &= nr(1,1) \\ 2 &= nr(2,1) = nr(1,2) \\ 3 &= nr(2,2) = nr(1,3) \\ 4 &= nr(2,3) \end{aligned}$$

pętla po elementach $m=1, M$

pętla po węzłach lokalnych $k=1, N$

pętla po węzłach lokalnych $l=1, N$

identyfikacja numeru globalnego węzła

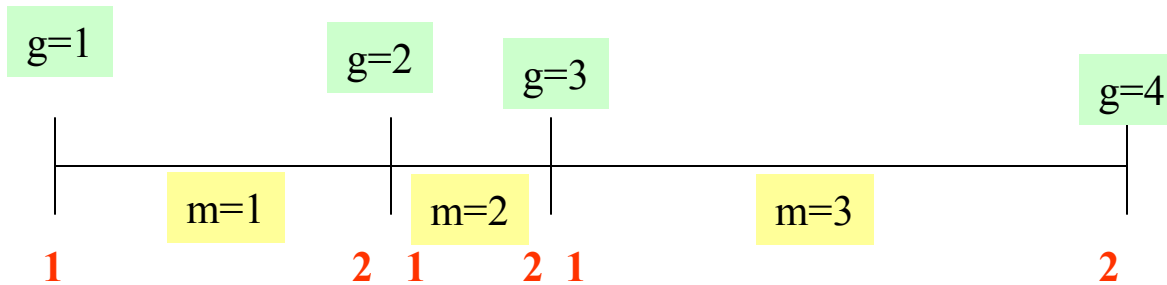
$$i = nr(k, m)$$

$$j = nr(l, m)$$

$$S(i, j) = S(i, j) + E(m, k, l)$$

identycznie składa się macierze dla wyższych funkcji kształtu i w więcej niż 1D

Składanie globalnej macierzy sztywności – buchalteria węzłów



- 1 = nr (1,1)
- 2 = nr (2,1) = nr (1,2)
- 3 = nr (2,2) = nr (1,3)
- 4 = nr (2,3)

$$E_{ij}^m = \frac{1}{h_m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

pętla po elementach $m=1, M$
 pętla po węzłach lokalnych $k=1, N$
 pętla po węzłach lokalnych $l=1, N$
 identyfikacja numeru globalnego węzła
 $i = nr(k, m)$
 $j = nr(l, m)$
 $S(i, j) = S(i, j) + E(m, k, l)$

$$\begin{matrix}
 \cdot & \begin{bmatrix} X & X \\ X & X \\ 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X & X \\ X & X \\ X & X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ X & X \\ X & X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} X \\ X \\ X \\ X \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

składanie globalnego wektora obciążeń z lokalnych:

pętla po elementach $m=1,M$

pętla po węzłach lokalnych $k=1,N$

identyfikacja numeru globalnego węzła

$$i = nr(k, m)$$

$$F(i) = F(i) + P(k, m)$$

o potrzebie używania wyższych funkcji kształtu (i o laboratorium):

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\rho(x) \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$u(1)=u(-1)=0$$

równanie Poissona z odcinkowo
stałą prawą stroną równania

rozwiązanie dokładne:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}(x+1) & \text{dla } x \in (-1, -0.2] \\ 10x^2 + 3.6x & \text{dla } x \in (-0.2, 0] \\ -10x^2 + 3.6x & \text{dla } x \in (0, 0.2] \\ -\frac{2}{5}(x-1) & \text{dla } x \in (0.2, 1) \end{cases}$$

Odpowiada mu działanie $a = -0.9666(6)$

o potrzebie używania wyższych funkcji kształtu (i o laboratorium):

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x) \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$u(1)=u(-1)=0$$

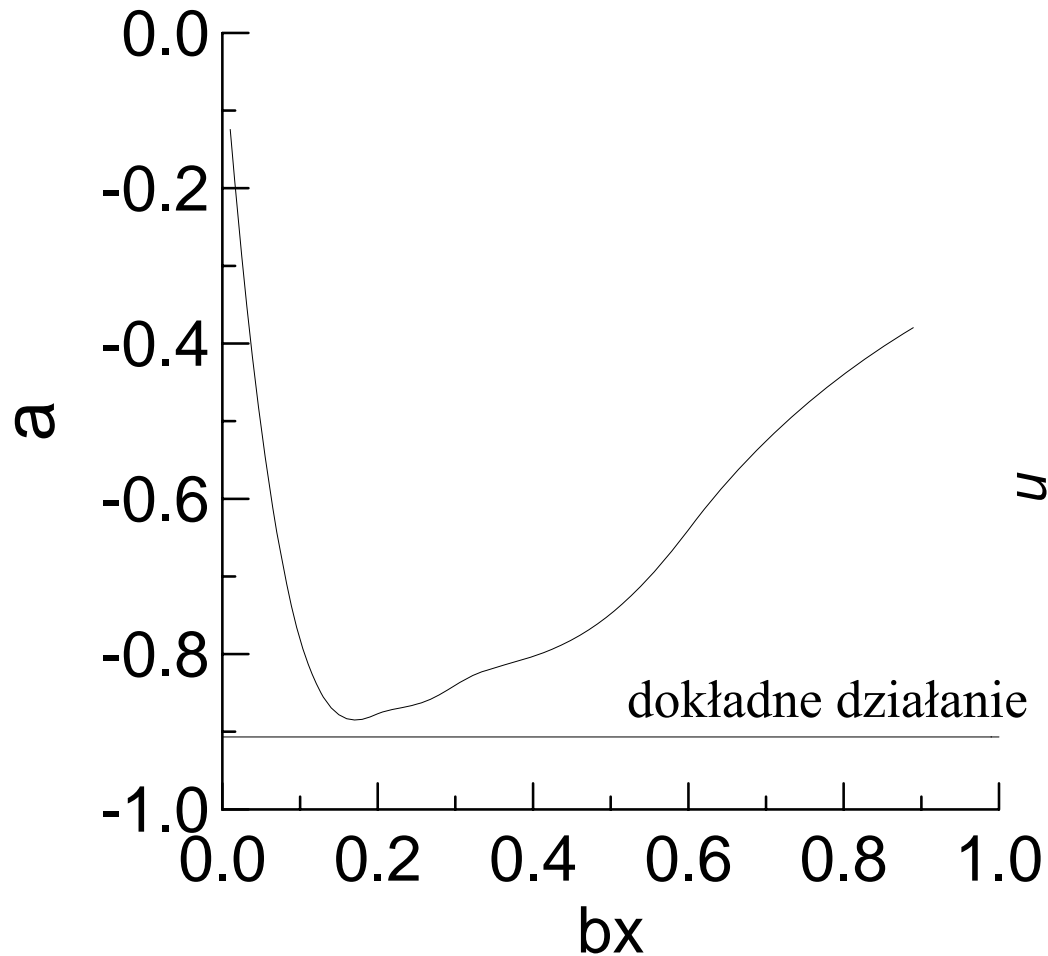
równanie Poissona z odcinkowo stałą prawą stroną równania

rozwiązanie dokładne:

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}(x+1) & \text{dla } x \in (-1, -0.2] \\ 10x^2 + 3.6x & \text{dla } x \in (-0.2, 0] \\ -10x^2 + 3.6x & \text{dla } x \in (0, 0.2] \\ -\frac{2}{5}(x-1) & \text{dla } x \in (0.2, 1) \end{cases}$$

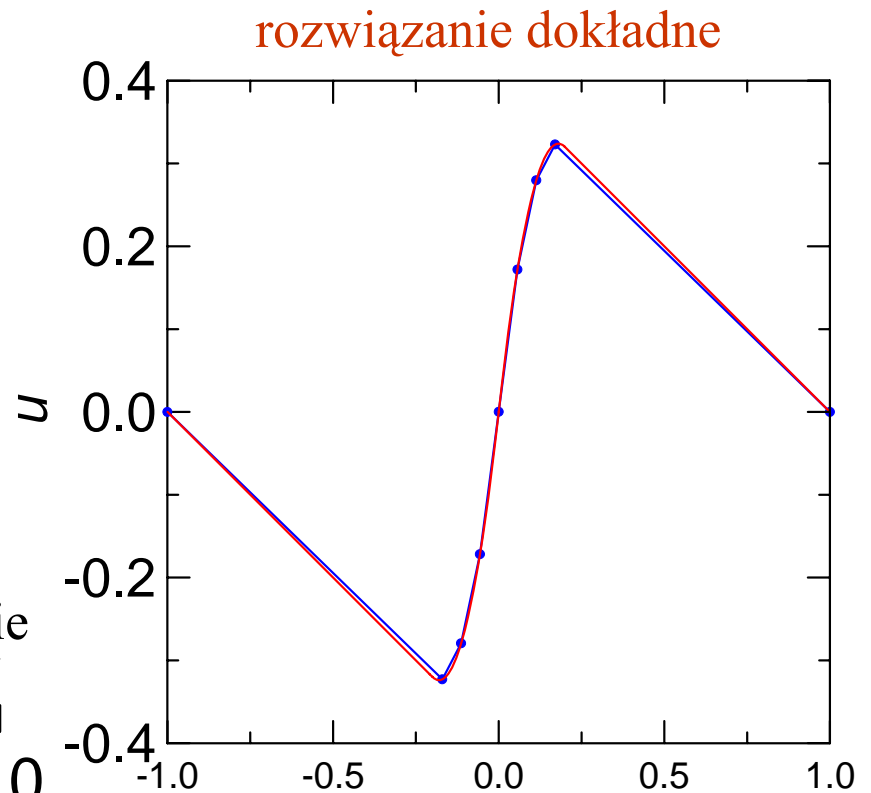
z liniowymi funkcjami kształtu: poza węzłami nie uzyskamy dokładnego rozwiązania tego równania (nigdy nie uzyskamy rozwiązania silnej postaci równania, druga pochodna wewnątrz elementów jest zawsze równa zero a ma być równa niejednorodności dla równań Poissona niejednorodność to źródło potencjału, dla równania przew. ciepl. – źródło ciepła)

całka działania a rozkład elementów
dla funkcji odcinkowo liniowych:

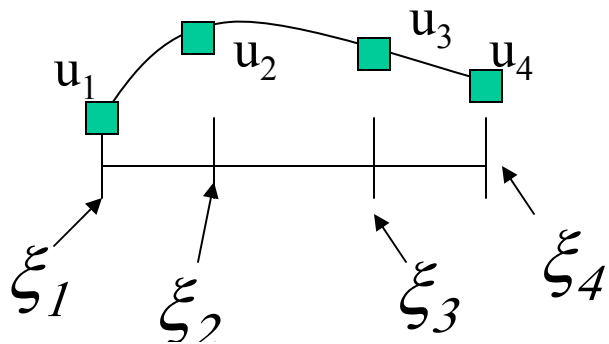


$$x_i = -b_x + \frac{i-2}{3}b_x \quad i=2,8$$

optymalne rozwiązanie
odcinkami liniowe



Funkcje kształtu Lagrange'a wyższych rzędów:



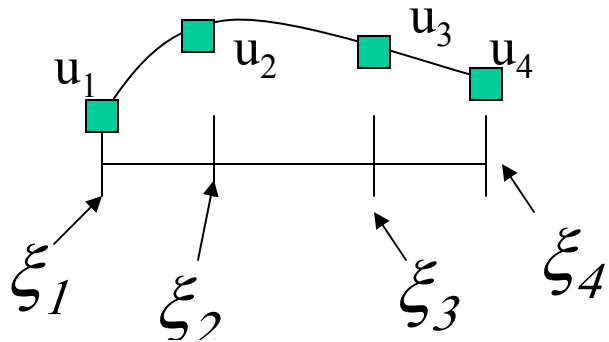
jeden element, cztery (n) węzły

$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi) + u_4\phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

$$\phi_i(\xi) \quad \text{wielomian stopnia } n-1, \text{ taki, że } \phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

Funkcje kształtu Lagrange'a wyższych rzędów:



jeden element, cztery (n) węzły

$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi) + u_3 \phi_3(\xi) + u_4 \phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

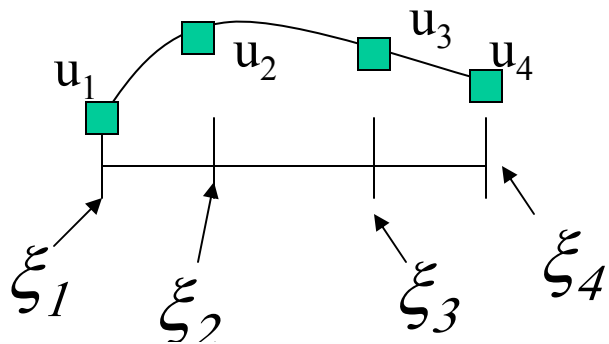
$$\phi_i(\xi) \quad \text{wielomian stopnia } n-1, \text{ taki, że } \phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

wiemy jak go wskazać:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} = l_i(\xi)$$

wielomian węzłowy
Lagrange'a

Funkcje kształtu wyższych rzędów:



jeden element, cztery (n) węzły

$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi) + u_3 \phi_3(\xi) + u_4 \phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

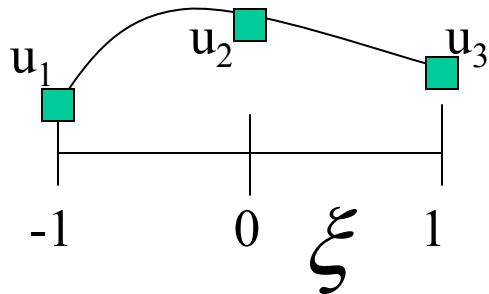
$$\phi_i(\xi) \quad \text{wielomian stopnia } n-1, \text{ taki, że } \phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

wiemy jak go wskazać:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} = l_i(\xi) \quad \text{wielomian węzłowy Lagrange'a}$$

funkcje kształtu Lagrange'a: rozwiązanie interpolowane wielomianowo w każdym z elementów. jedynie ciągłość rozwiązania między elementami. w przeciwieństwie do problemów z KSN: wartości funkcji w węzłach **nie są znane**. należy je wyliczyć. istota FEM.

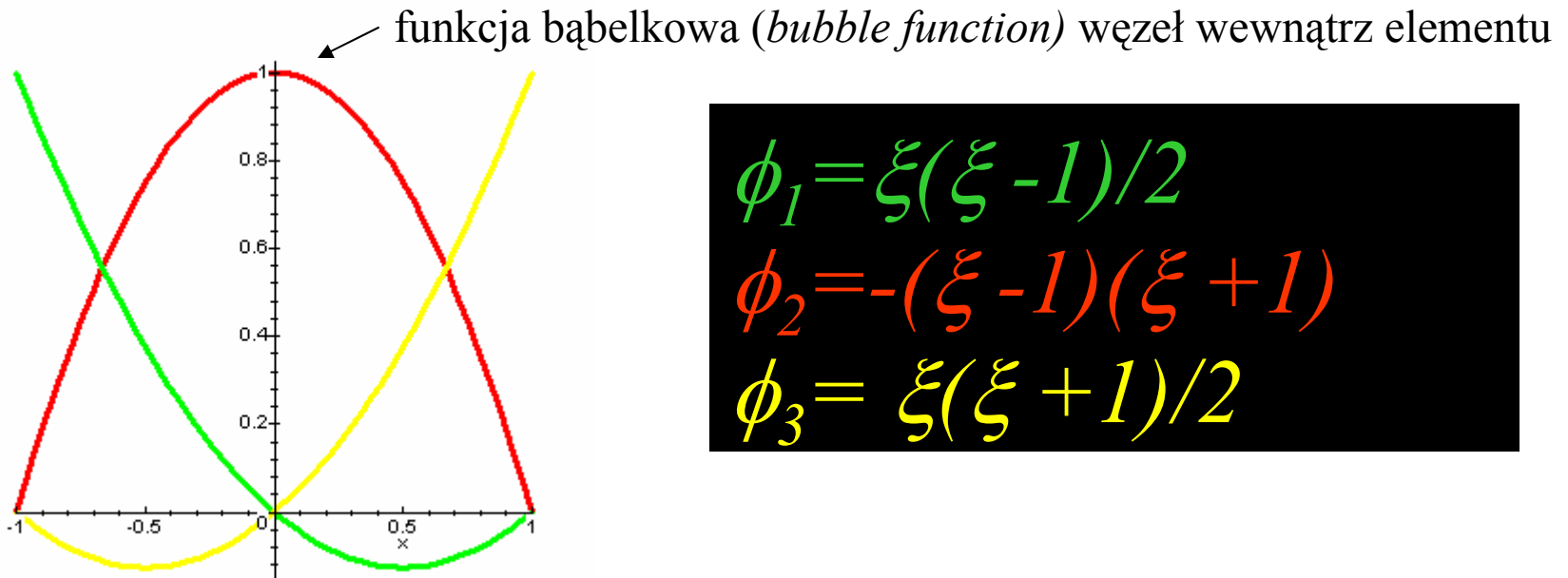
Elementy wyższych rzędów:



$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi)$$

Jeden element, trzy funkcje bazowe, 3 parametry węzłowe

Funkcje bazowe : w danym węźle tylko jedna z nich niezerowa
(co min. gwarantuje liniową niezależność funkcji bazowych)



$$\phi_1 = \xi(\xi - 1)/2$$

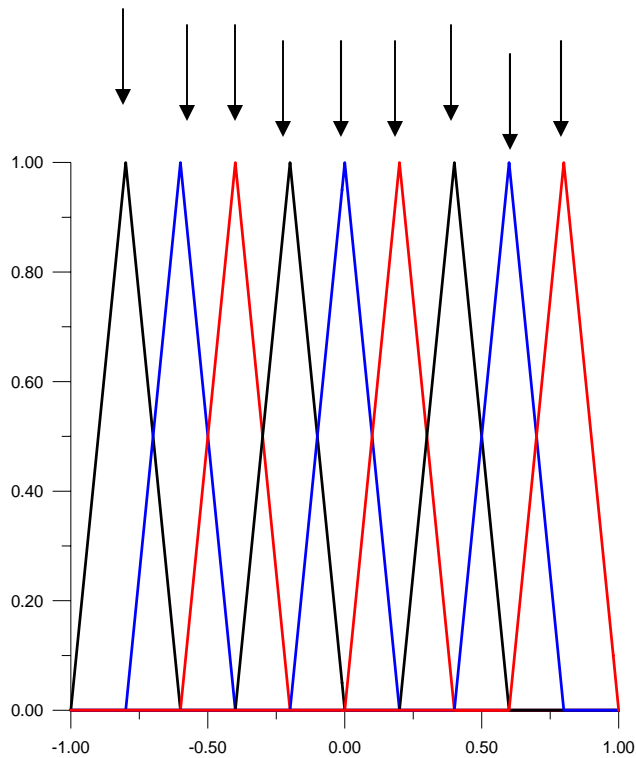
$$\phi_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1)$$

$$\phi_3 = \xi(\xi + 1)/2$$

funkcje wierzchołkowe (vertex functions) 1 na krawędziach elementu

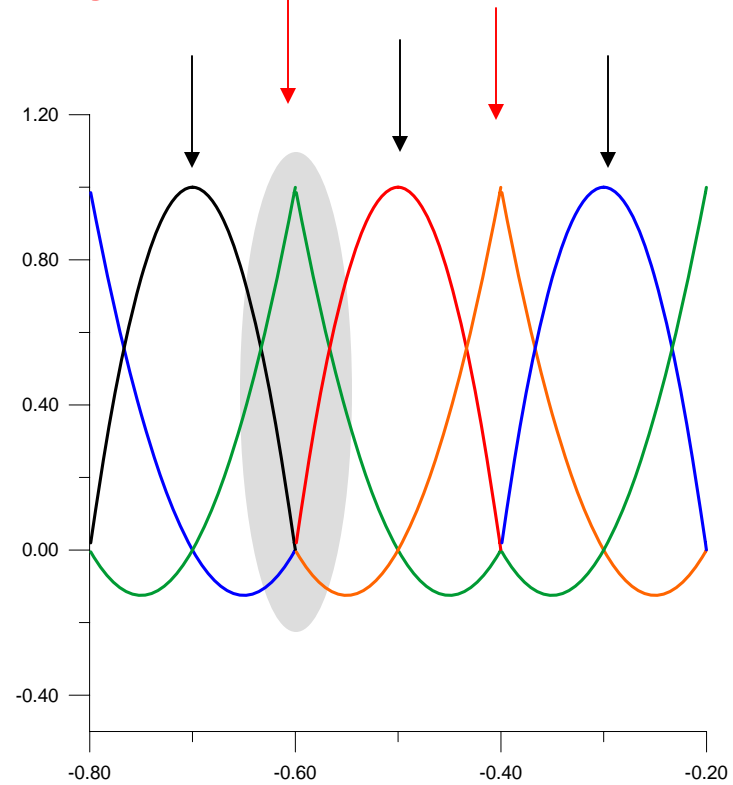
Funkcje kształtu Lagrange'a: odcinkowo liniowe i kwadratowe

węzły= granice elementów



liniowa baza Lagrange'a

każda strzałka to węzeł
granice elementów czerwone



kwadratowa baza Lagrange'a

Macierz sztywności dla kwadratowych f. Lagrange'a

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[-\frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{d\phi_j}{d\xi} \right] d\xi$$

$$E^m = \frac{1}{3h_m} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

↑ przy równym podziale
przedziału E takie samo
dla każdego elementu

lecz P **nie!** [inny zakres $x(\xi)$]

$$x(\xi) = (x_m + x_{m+1})/2 + (x_{m+1} - x_m)/2 \xi$$

$$\phi_1 = \xi(\xi - 1)/2$$

$$\phi_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1)$$

$$\phi_3 = \xi(\xi + 1)/2$$

całki wyliczone analitycznie:
ilu punktowego Gaussa
należałoby użyć aby dokładnie
scałkować m.sztywności numerycznie?

$$P_k^i = \int_{-1}^1 f(\xi) \phi_k^i(\xi) J_i d\xi$$

liczone numerycznie

$$P^m = \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{pmatrix}$$

Składanie globalnej macierzy sztywności i wektora obciążeń dla kwadratowych funkcji Lagrange'a

$$E^m = \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m \\ d_m & e_m & f_m \\ g_m & i_m & j_m \end{pmatrix}$$

lokalne

$$P^m = \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & e_2 & f_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & i_2 & j_2 + a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & e_3 & f_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & i_3 & j_3 + a_4 & b_4 & c_4 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_n & e_n & f_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

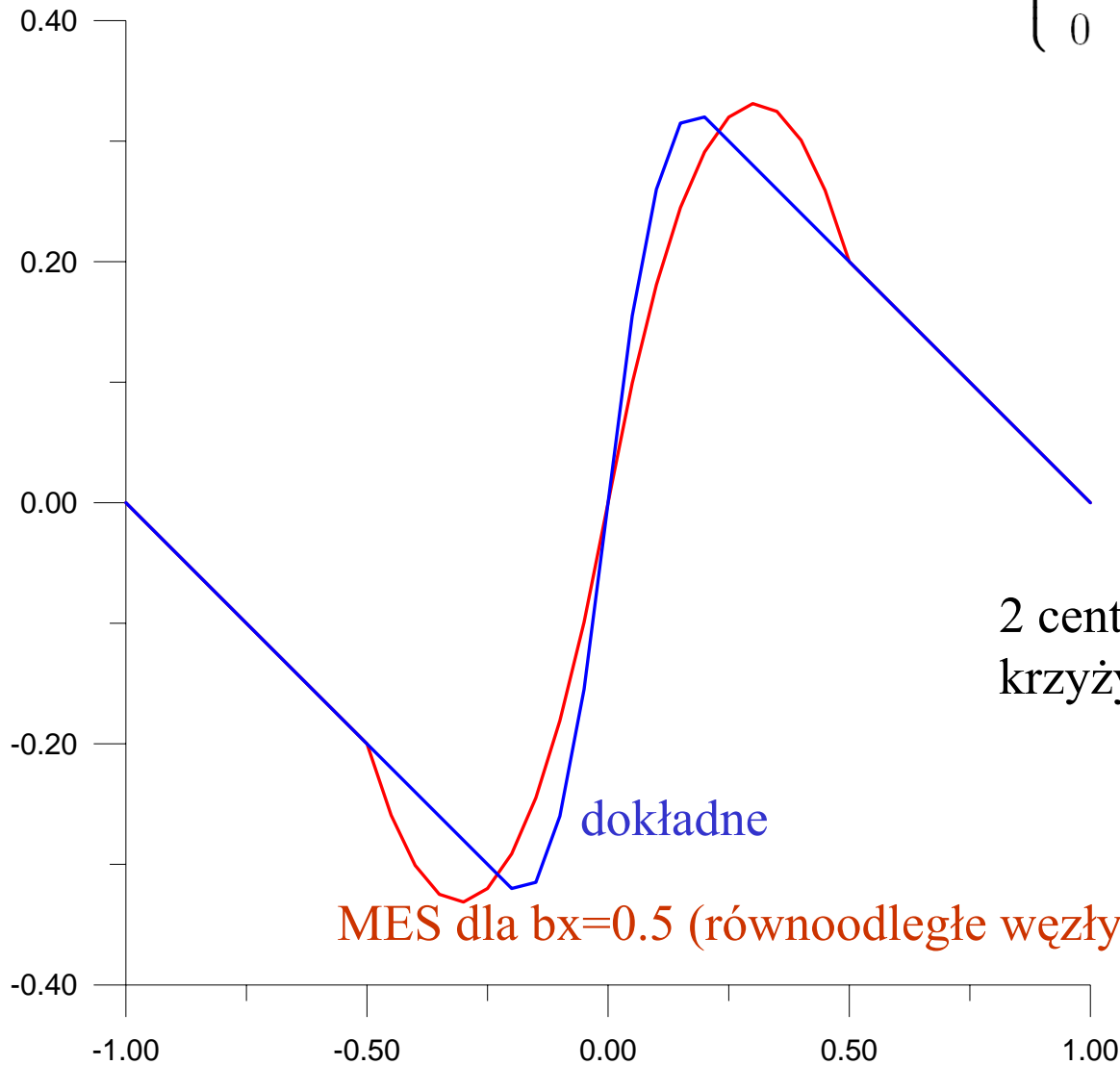
globalne

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \\ C_2 + A_3 \\ B_3 \\ C_3 + A_4 \\ \dots \\ B_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

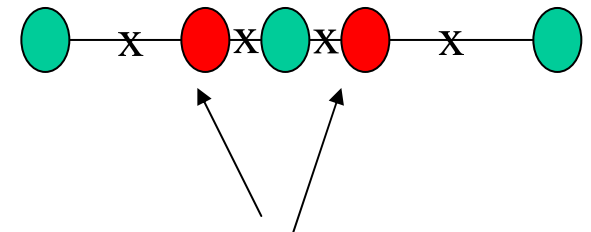
Liczba wierszy: $2n+1$ (n-liczba elementów)

Laboratorium:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x) \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$



4 elementy:

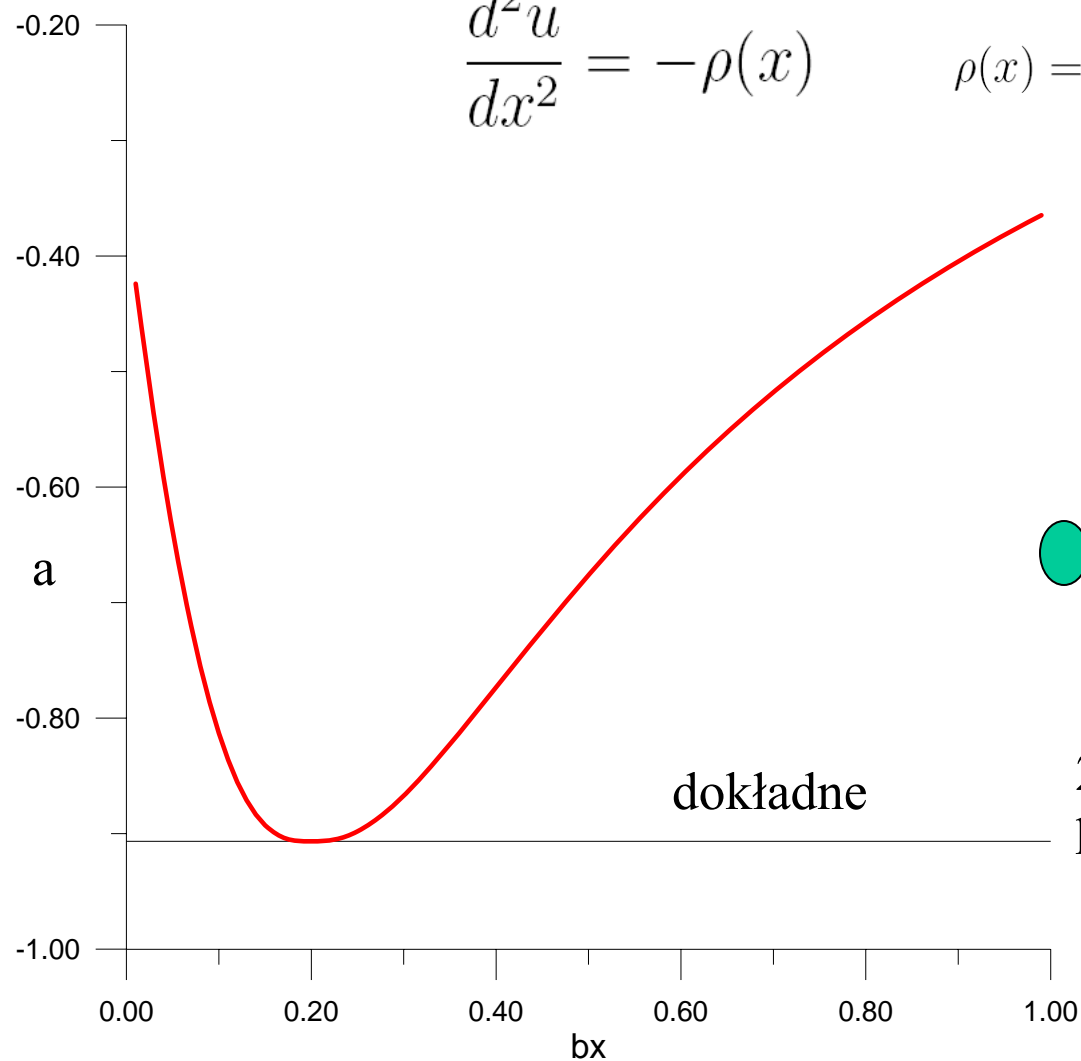


2 centralne elementy o długości b_x
krzyżyki: węzły bąbelkowe

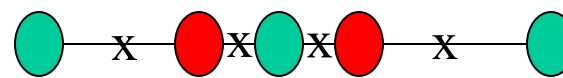
MES dla $b_x=0.5$ (równoodległe węzły) widzimy: dokładne
dla węzłów granicznych

Laboratorium:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x) \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$



4 elementy:

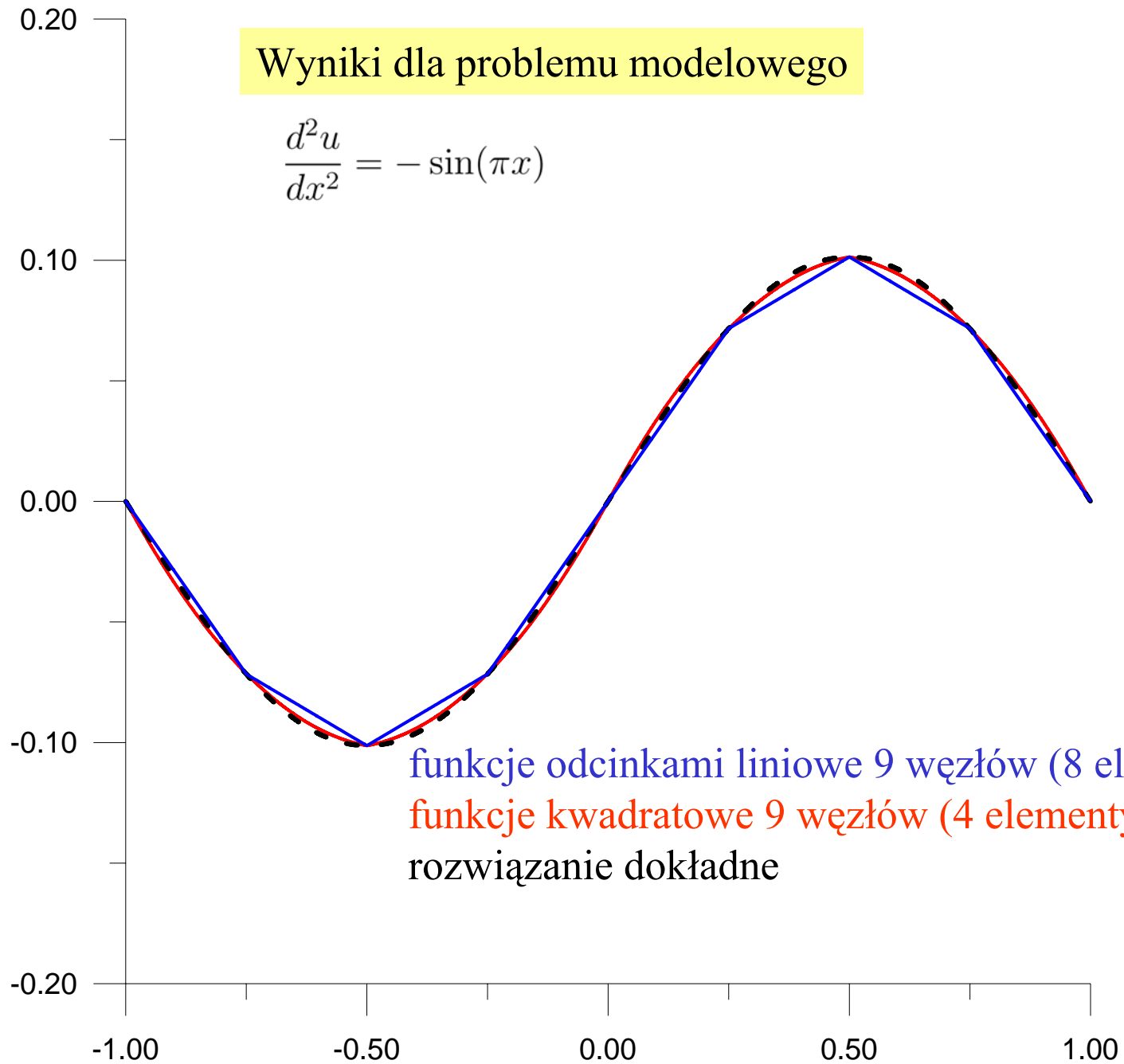


2 centralne elementy o długości bx
krzyżyki: węzły bąbelkowe

na laboratorium zobaczymy, że potencjał dokładny odtworzony

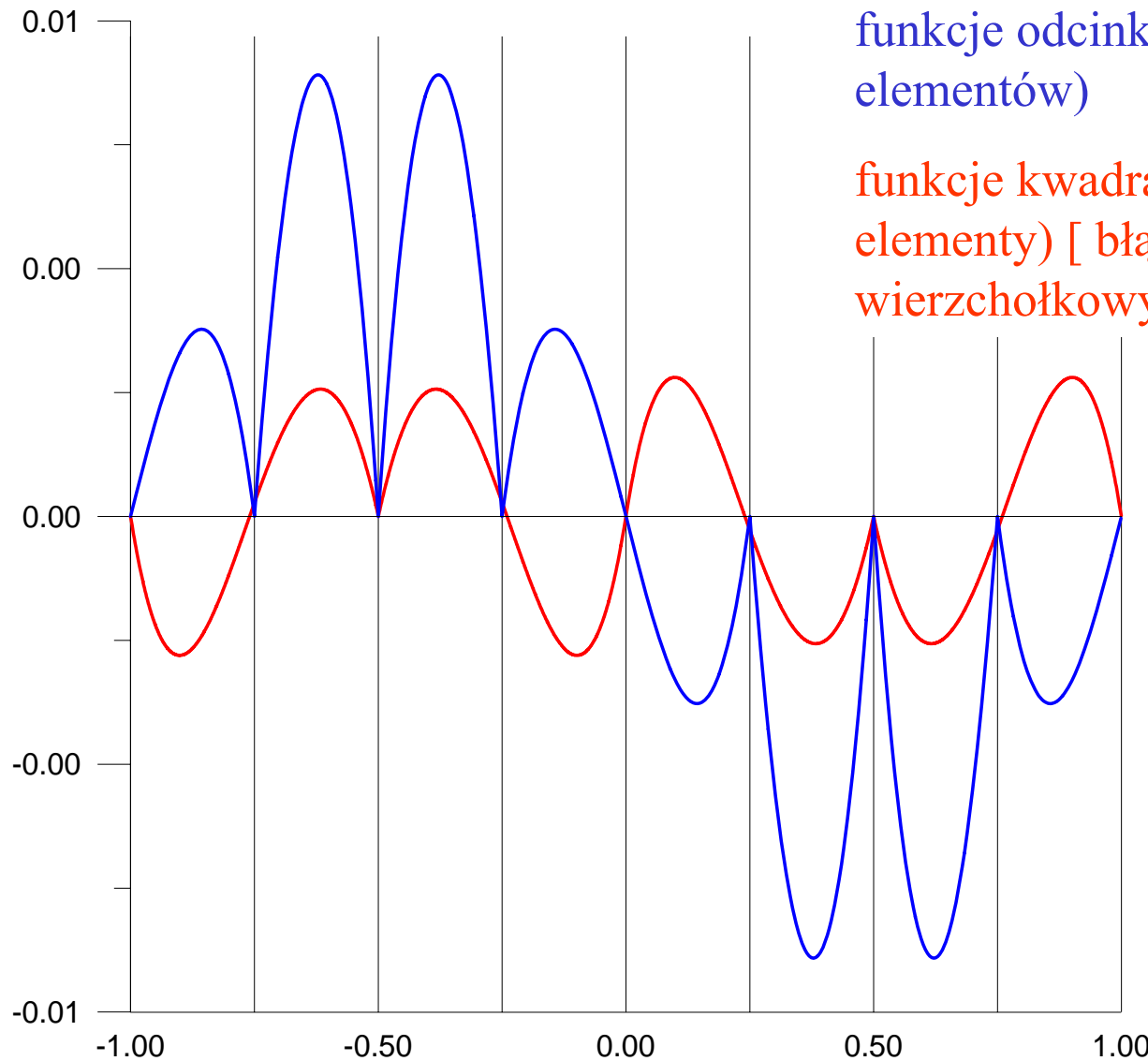
Wyniki dla problemu modelowego

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$



$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

Funkcje liniowe i kwadratowe



funkcje odcinkami liniowe 9 węzłów (8 elementów)

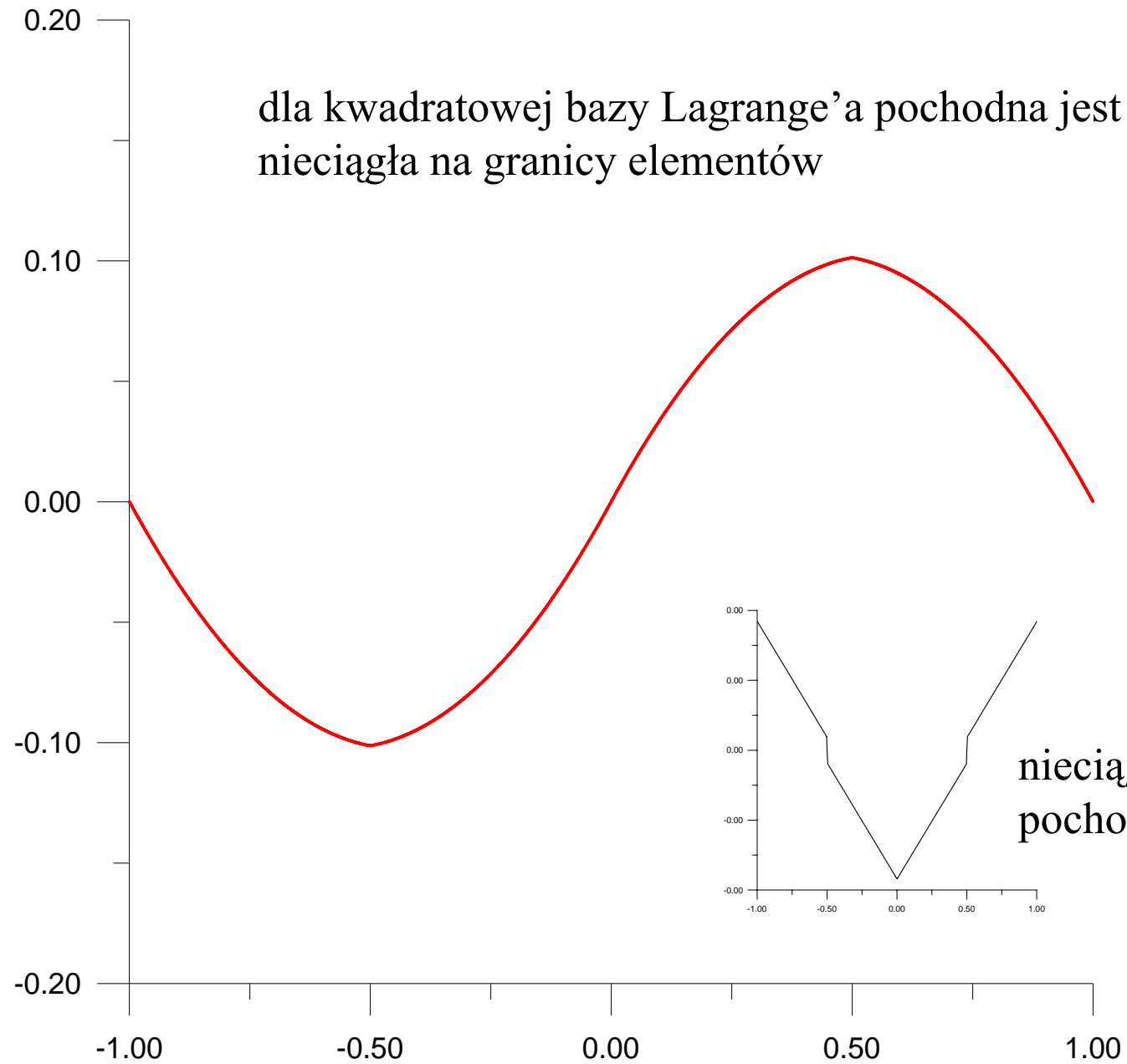
funkcje kwadratowe 9 węzłów (4 elementy) [błąd = 0 tylko na węzłach wierzchołkowych]

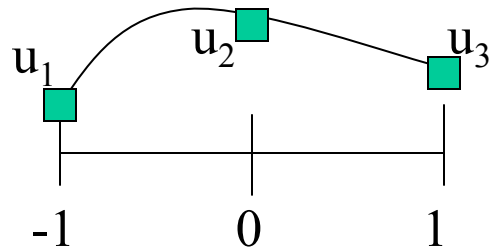
jeden rząd funkcji kształtu więcej:
maksymalny błąd
zmniejszony trzykrotnie

rozmiar problemu liniowego bez zmian, ale **S** ma więcej niezerowych elementów

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

dla kwadratowej bazy Lagrange'a pochodna jest
nieciągła na granicy elementów





$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi)$$

Co zrobiliśmy : poprowadziliśmy przez każdy element wielomian interpolacyjny Lagrange'a.

Zabieg zakończył się sukcesem. Lepsza dokładność prawie tej samej złożoności obliczeniowej w porównaniu z liniowymi funkcjami kształtu. Rozmiar URL bez zmian, ale macierz układu – więcej niezerowych elementów.

Chcemy podnieść rząd wielomianu interpolacyjnego. Czy równomiernie rozłożenie większej ilości węzłów na elemencie jest dobrym pomysłem ? **NIE**

Błąd interpolacji Lagrange'a (przypomnienie):

$x_0, x_1, \dots, x_n - n+1$ różnych węzłów

$f(x)$ – gładka funkcja interpolowana (klasy co najmniej $n+1$)

x w przedziale interpolacji

$$\Pi_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x) \qquad l_i(x) = \prod_{j=0; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

odchylenie funkcji interpolowanej od wielomianu Lagrange'a

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

ξ należy do (najmniejszego) przedziału, w którym mieszczą się punkty x_i

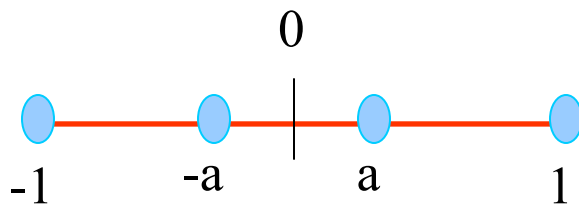
norma nieskończoność: $\|g(x)\|_{\infty} = \max |g(x)|$ w przedziale (a,b)

$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

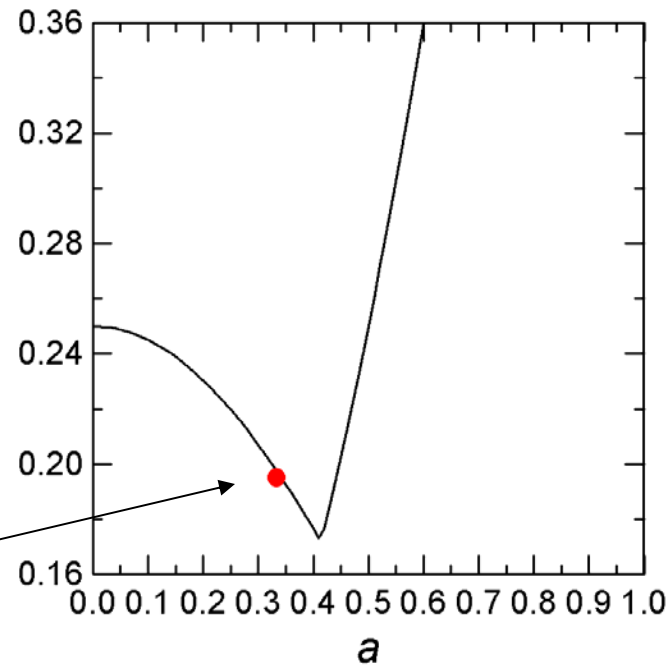
$$\|E_n(x)\|_\infty = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \times \left\| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right\|_\infty$$



4 punkty



norma nieskończoność
wielomianu węzłowego

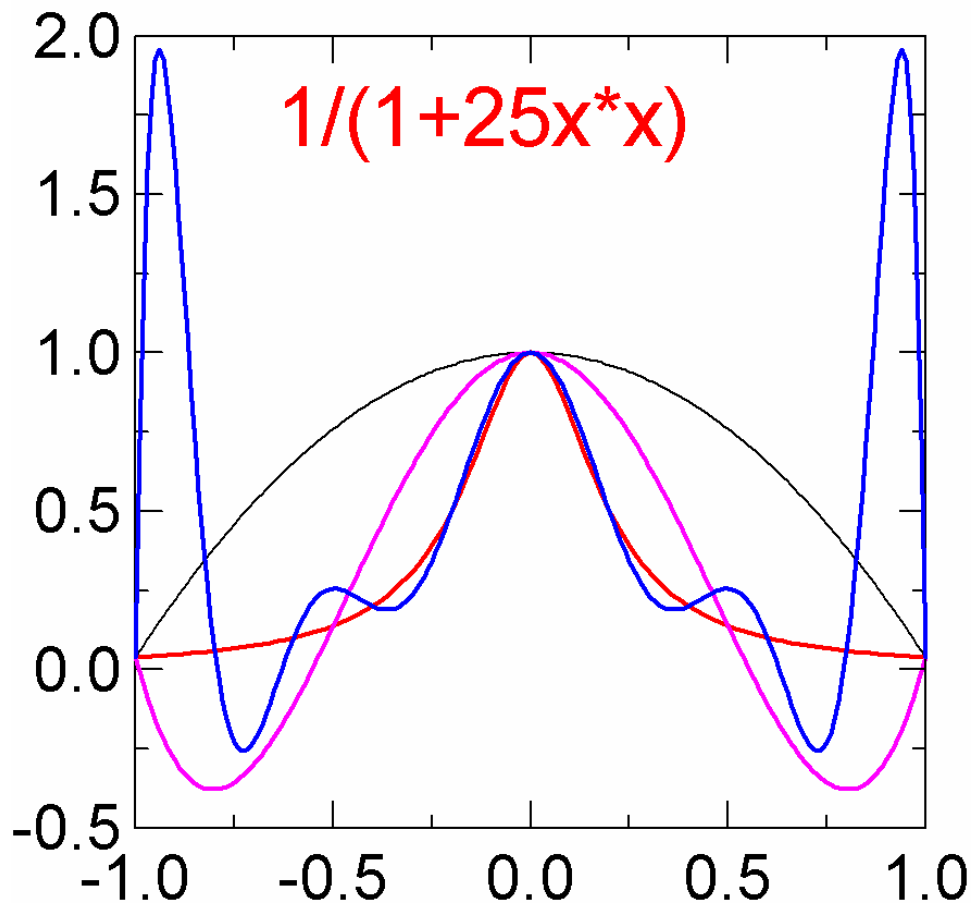


punkty rozłożone równomiernie

równomierne rozłożenie nie jest optymalne
dla celów aproksymacyjnych

Efekt Rungego

nieoptymalność interpolacji na równoodległych węzłach
robi się drastyczna dla wysokiego rzędu wielomianu interpolacyjnego



3 punkty
5 punktów
11 punktów

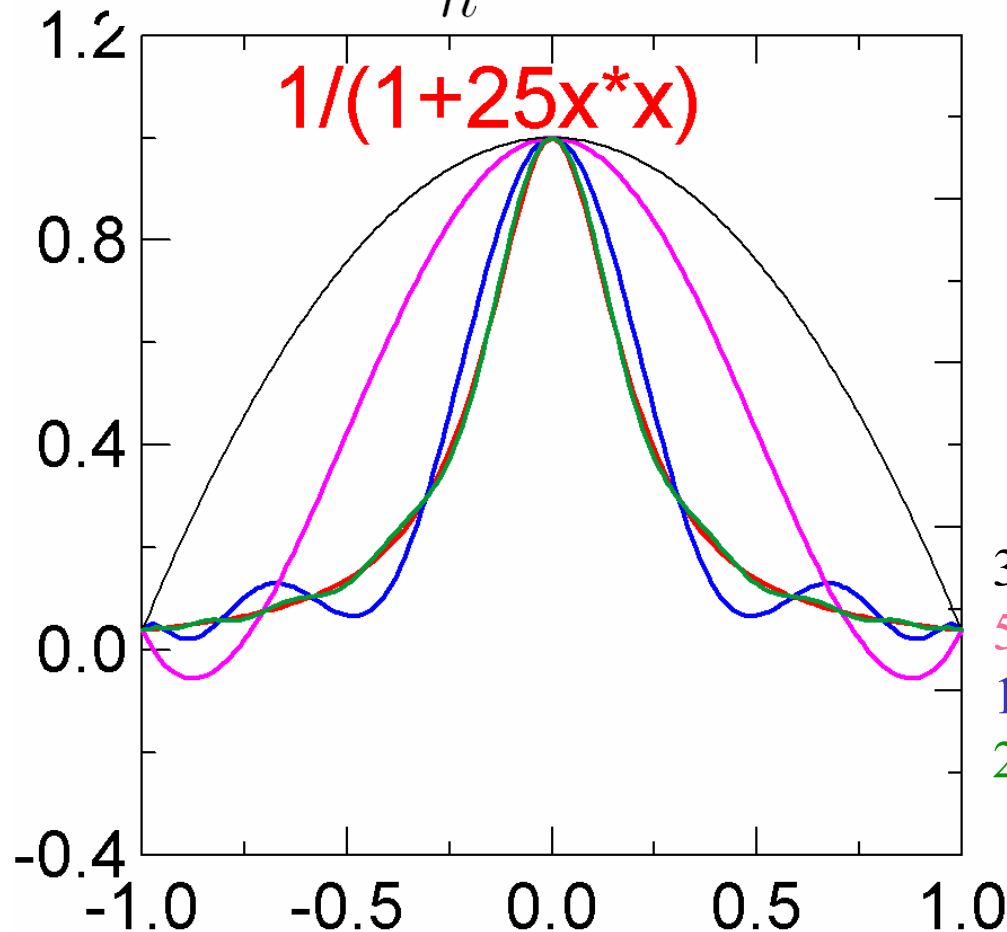
im wyższy stopień wielomianu
interpolacyjnego
tym gorsze przybliżenie
[większa norma nieskończoność
błędu]

- szczególnie przy
brzegach przedziału

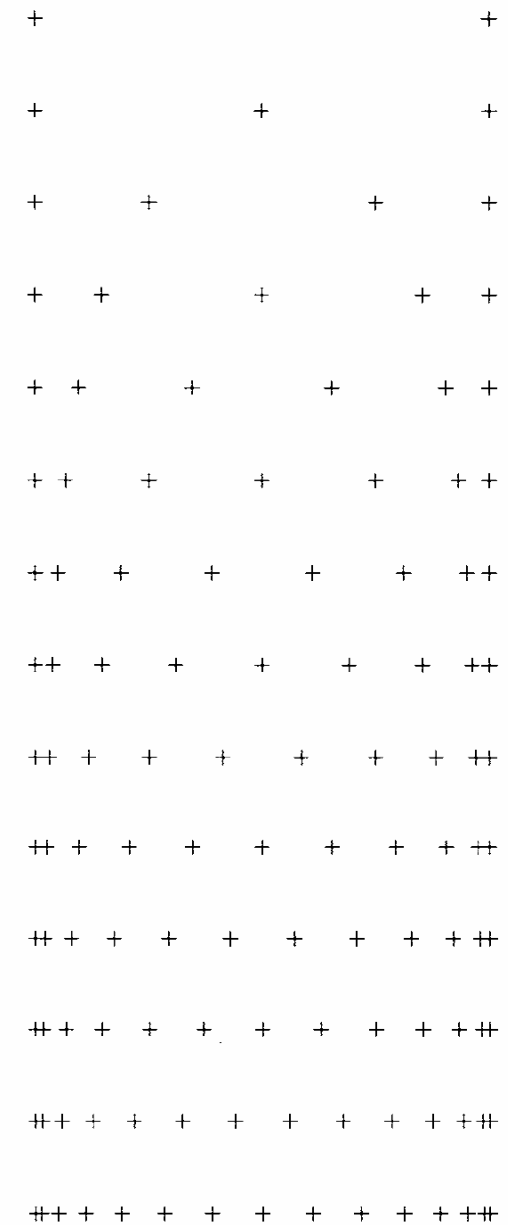
$$E_n(x) = f(x) - \Pi_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$$

Węzły Czebyszewa: bliskie optymalnym

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{n}\right), j = 0, 1, \dots, n$$



3 punkty
 5 punktów
 11 punktów
 21 punktów



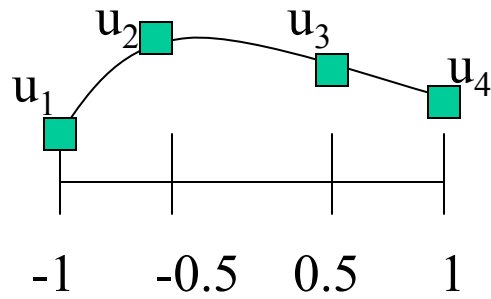
[w.czebyszewa: węzły wielomianów ortogonalnych na przedziale $(-1,1)$ z wagą $1/\sqrt{1-x^{**2}}$

[! waga gęsto punkty przy brzegu, błąd nie urośnie]

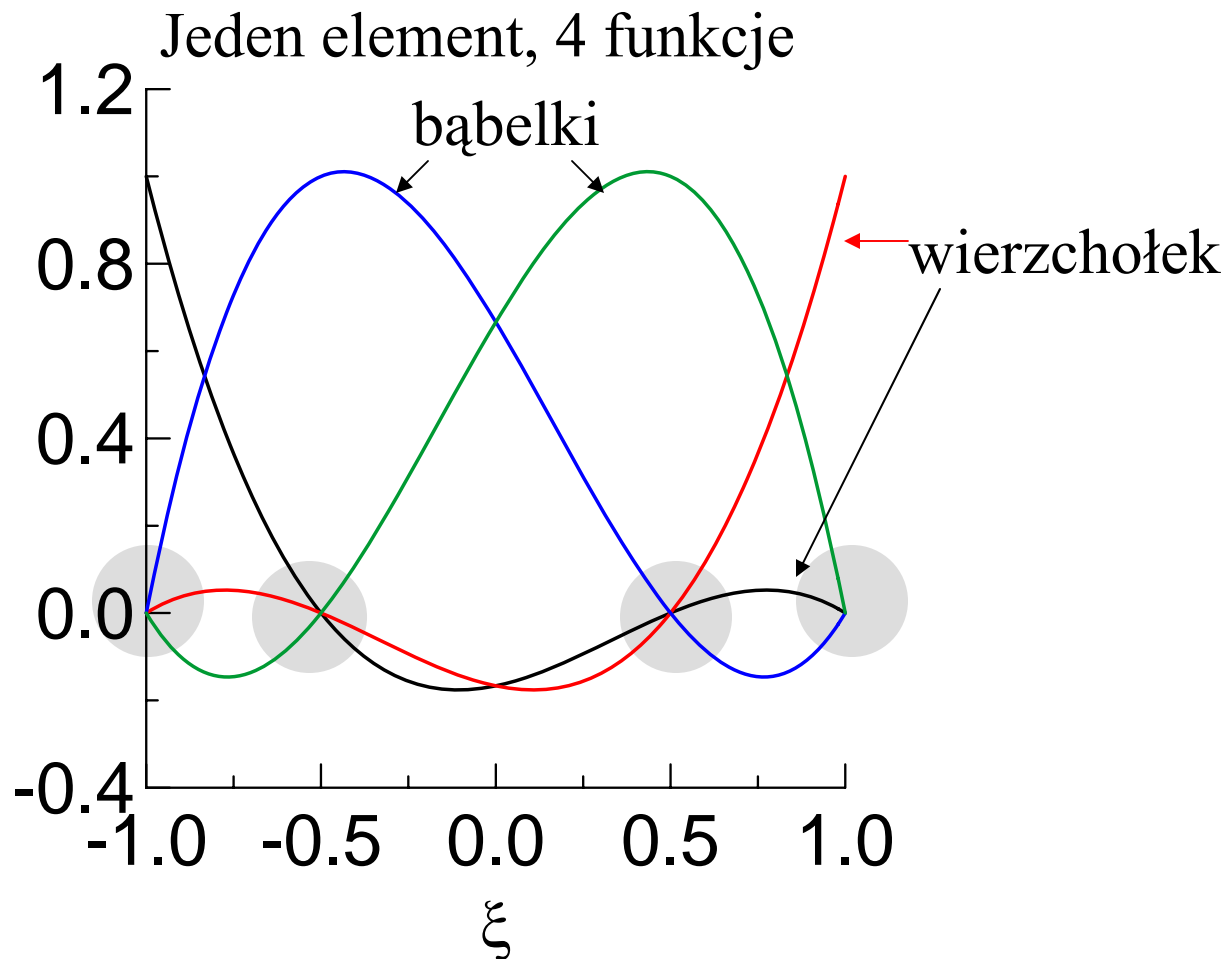
więcej węzłów przy brzegach

Kubiczne funkcje kształtu Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$\cos(\pi j/3), j=0,1,2,3, : -1, -0.5, 0.5, 1$$



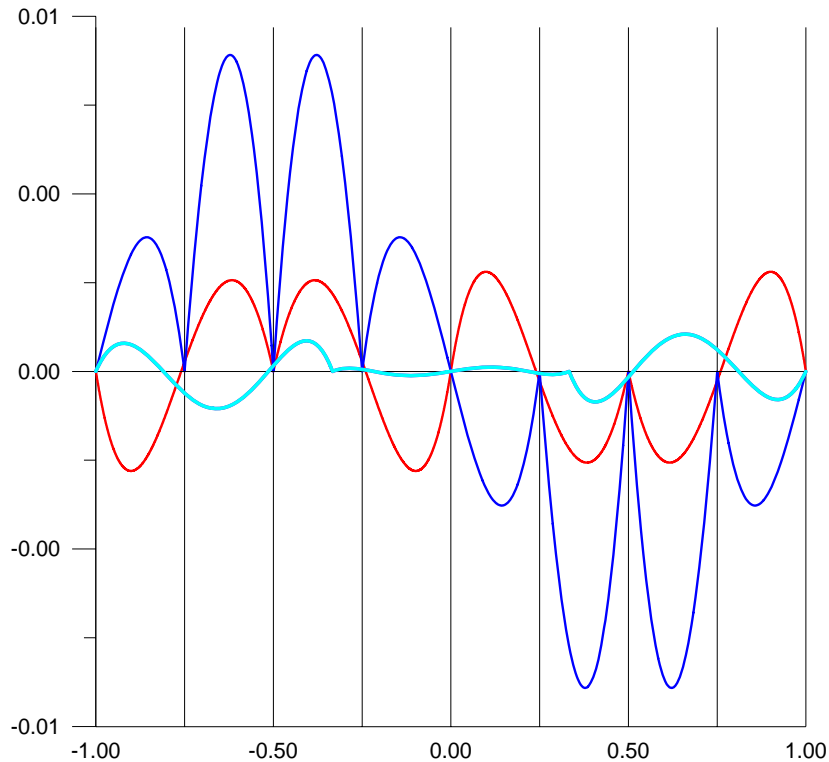
$$u(\xi) = \underline{u_1 f_1(\xi)} + \underline{u_2 f_2(\xi)} + \underline{u_3 f_3(\xi)} + \underline{u_4 f_4(\xi)}$$



$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

Wyniki dla problemu modelowego

błąd:



funkcje odcinkami liniowe 9 węzłów (8 elementów)

funkcje kwadratowe 9 węzłów (4 elementy)

funkcje kubiczne 10 węzłów (3 elementy)

zwiększenie stopnia wielomianów kształtu
o jeden: max. odchylenie
wyniku od dokładnego zmniejsza się 3 krotnie

MES używa jako funkcji bazowych określonych na elemencie wielomianów potrafimy je numerycznie różniczkować i całkować dokładnie

różniczkowanie:

$u(x)$	$u'(x)$	$C=1/2$ $\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$	$C=-1/6$ $\frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$	$(8u(x + \Delta x) - 8u(x - \Delta x) + u(x - 2\Delta x) - u(x + 2\Delta x))/(12\Delta x) + O(\Delta x^4)$
x	1	1	1	1
x^2	$2x$	$2x + \Delta x$	$2x$	$2x$
x^3	$3x^2$	$3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2$	$3x^2 + \Delta x^2$	$3x^2$
x^4	$4x^3$	$4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x\Delta x^2 + \Delta x^3$	$4x^3 + 4x\Delta x^2$	$4x^3$
x^5	$5x^4$	$5x^4 + 10x^3\Delta x + 10x^2\Delta x^2 + 5x\Delta x^3 + \Delta x^4$	$5x^4 + 10x^2\Delta x^2 + \Delta x^4$	$5x^4 - 4\Delta x^4$

a całkowanie ... Gaussa

kwadratury Gaussa-Legendra do całkowania elementów macierzowych

Gauss= najbardziej efektywna metoda dla MES
funkcje kształtu są wielomianami(!), a Gauss całkuje je dokładnie

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

wazona suma funkcji podcałkowej
w wybranych punktach x_i

Chcemy wybrać tak wagi i punkty aby kwadratura była dokładna dla wielomianu jak najwyższego stopnia (funkcje kształtu będą wielomianami)

Na pewno uda nam się skonstruować kwadraturę dokładną dla wielomianu stopnia $n-1$

kwadratury Gaussa-Legendra

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

Wybieramy wagi i punkty Gaussa, tak aby dokładnie scałkować wielomian stopnia $2n-1$

[$2n$ współczynników, $2n$ wag i punktów]

Przykład: $n=2$ – dokładnie scałkujemy wielomian stopnia 3

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = w_1 \times f(x_1) + w_2 \times f(x_2)$$

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = a \int_{-1}^1 dx + b \int_{-1}^1 x dx + c \int_{-1}^1 x^2 dx + d \int_{-1}^1 x^3 dx$$

kwadratury Gaussa-Legendra

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = a \int_{-1}^1 dx + b \int_{-1}^1 x dx + c \int_{-1}^1 x^2 dx + d \int_{-1}^1 x^3 dx$$

a, b, c, d – dowolne. Każda z powyższych całek musi zostać policzona dokładnie. wstawiamy po kolei 1 za jeden z a, b, c, d = reszta 0.

$$\int_{-1}^1 dx = 2 = w_1 \times 1 + w_2 \times 1$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$\int_{-1}^1 x dx = 0 = w_1 \times x_1 + w_2 \times x_2 \longrightarrow$$

[kwadratura ma działać również dla $f(-x)$]
 x_1 oraz x_2 będą rozłożone

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} = w_1 \times x_1^2 + w_2 \times x_2^2$$

symetrycznie względem 0 ($x_1 = -x_2$)
wtedy z (2) $w_1 = w_2 = 1$ (z 1)

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = 0 = w_1 \times x_1^3 + w_2 \times x_2^3$$

(4) - zawsze spełnione

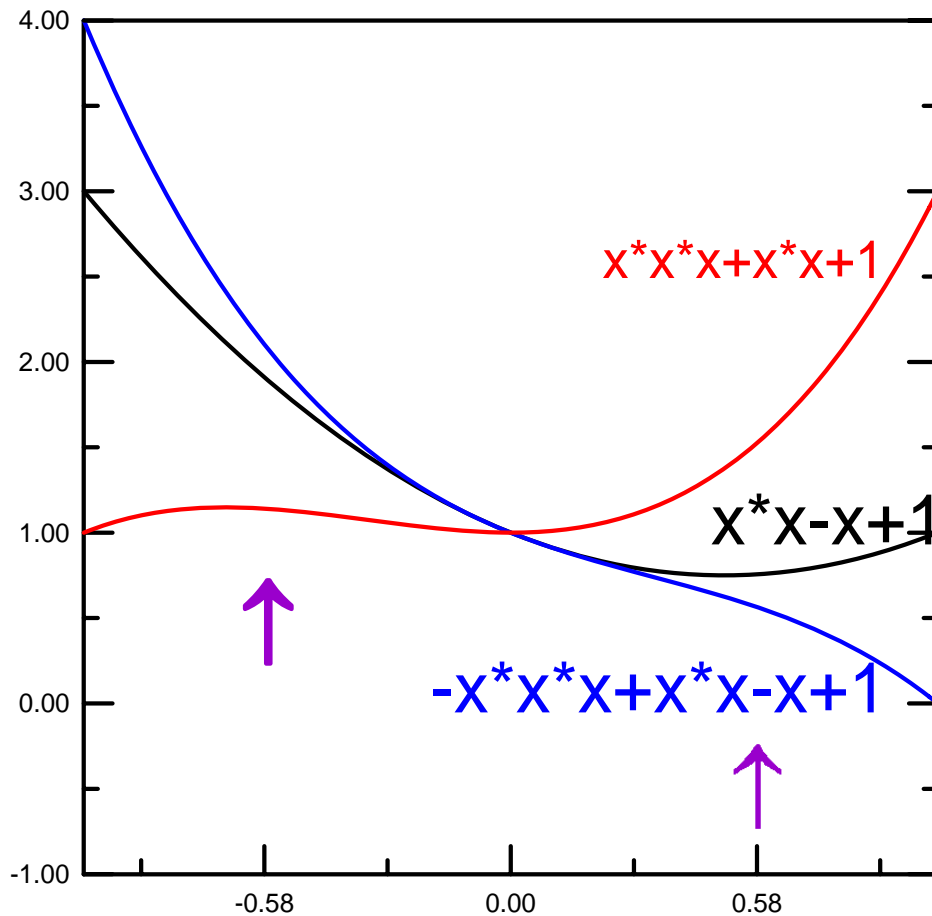
$$\frac{2}{3} = x_1^2 + x_2^2 \text{ z (3)}$$

$$x_2 = \pm (1/3)^{1/2}$$

$$x_1 = -x_2$$

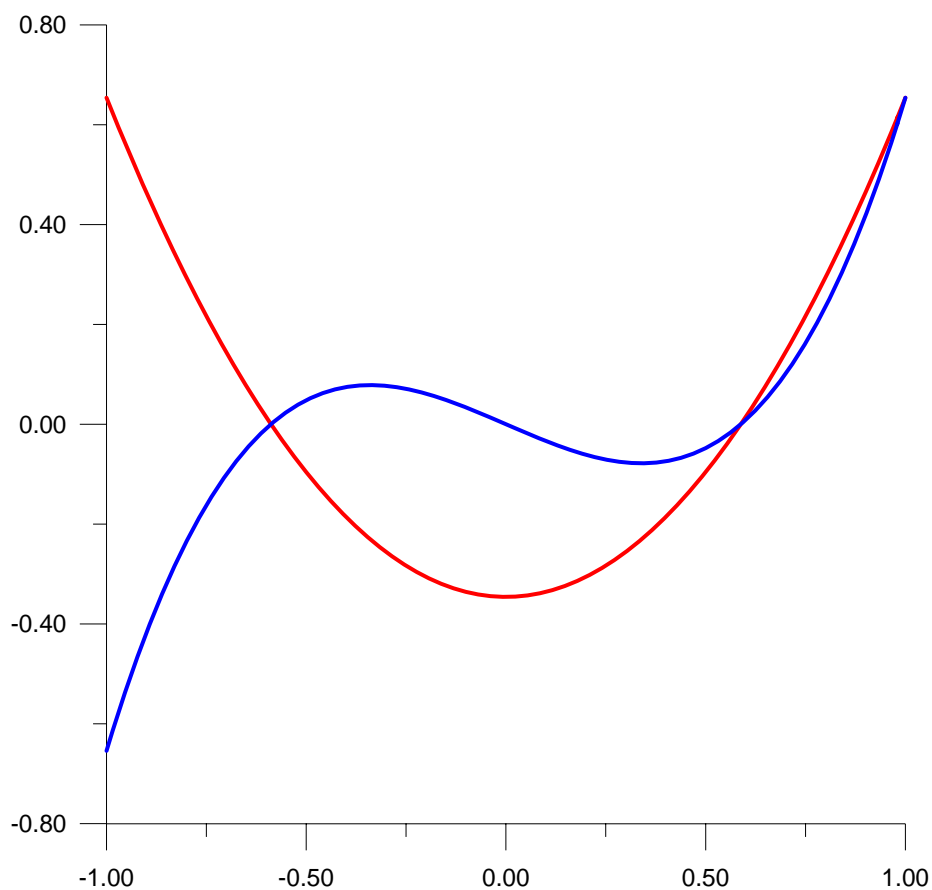
kwadratura Gaussa dokładna
dla wielomianów stopnia 3:

$$w_1=w_2=1, \quad x_1=(1/3)^{1/2} \quad x_2=- (1/3)^{1/2}$$



wystarczy
dodać wartości
funkcji w dwóch
punktach aby uzyskać
dokładną całkę
dla wszystkich wielomianów
stopnia 3

w konsekwencji: jeśli dwa wielomiany stopnia <4 przyjmują te same wartości w punktach Gaussa to ich całki po przedziale $-1,1$ są również identyczne: np

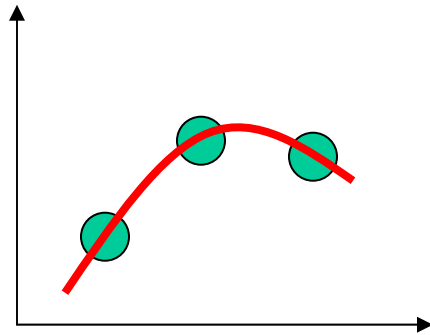


$$x_g = (1/3)^{1/2}$$

$$x(x-x_g)(x+x_g)$$

$$(x-x_g)(x+x_g)$$

Próbkując funkcję w n dowolnych punktach: na pewno uda się skonstruować kwadraturę dokładną dla wielomianu stopnia $n-1$



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

Na przedziale $-1,1$ wybieramy (dowolnie) n – punktów i prowadzimy przez nie wielomian interpolacyjny Lagrange’a funkcji $f(x)$

$$y(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) \quad l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Jeśli $f(x)$ – wielomian stopnia nie większego niż $n-1$

$f(x)=y(x)$ (interpolując wielomian dostaniemy ten sam wielomian)

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

na wyborze punktów x_i można zyskać dokładność dla n stopni więcej

kwadratury Gaussa-Legendra

Dalej o wyborze punktów Gaussa: Tw. Jakobiego:

kwadratura
$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

oparta na wielomianie interpolacyjnym Lagrange'a

$$y(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) l_i(x) \quad l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

jest dokładna dla wielomianów stopnia $2n-1$, jeśli punkty x_i wybrane tak, że wielomian stopnia n

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad \text{jest ortogonalny do wszystkich wielomianów stopnia } (n-1)$$

zobaczmy, że tak jest:

$$\int_{-1}^1 z(x) p_{n-1}(x) dx = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{-1}^1 f_{2n-1}(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f_{2n-1}(x_i)$$

kwadratury Gaussa-Legendra

dla dowolnego wielomianu stopnia n i dowolnej liczby r
istnieje taki wielomian o stopniu o jeden niższym i taka liczba R , że:

$$P_n(x) = (x-r) P_{n-1}(x) + R$$

przykład:

$$1+x+x^2 = (x-2)(ax+b)+c = c-2b+(b-2a)x+ax^2 - \text{wyliczymy sobie } a, b, \text{ oraz } c$$

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

$$f_{2n-1}(x) = (x-x_1) f_{2n-2}(x) + r_0$$

$$f_{2n-1}(x) = (x-x_1) [(x-x_2) f_{2n-3}(x) + r_1] + r_0 = (x-x_1)(x-x_2) f_{2n-3}(x) + \underline{r_0 + r_1(x-x_1)}$$

$$q_1(x)$$

$$\underline{f_{2n-1}(x) = z_n(x) f_{n-1}(x) + q_{n-1}(x)}$$

$$f_{2n-1}(x) = z_n(x)f_{n-1}(x) + q_{n-1}(x)$$

$$\int_{-1}^1 f_{2n-1}(x) dx = \int_{-1}^1 q_{n-1}(x) dx + \int_{-1}^1 z_n(x) f_{n-1}(x) dx$$

całka oparta o przepis interpolacyjny na n punktach
będzie dokładna dla każdego wielomianu stopnia $n-1$

Problem: jak wybrać wielomian stopnia n $z(x)$
tak aby ortogonalny dla każdego wiel. stopnia $n-1$

Problem: jak wybrać $z(x)$ aby ortogonalny dla każdego wiel. stopnia $n-1$

$$z(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$$

wybrać zera znaczy wybrać wielomian (co do stałej multiplikatywnej)

każdy wielomian można zapisać w postaci sfaktoryzowanej

$$P_n(x) = a \prod_{i=1}^n (x - x_i) = az_n(x)$$

wielomian Legendre'a stopnia n

-ortogonalny na przedziale $[-1,1]$ do wszystkich wielomianów stopnia $n-1$.

-zera tego wielomianu wyznaczają optymalne punkty Gaussa

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Przedział $[-1,1]$.

Mamy zbiór niezależnych liniowo funkcji $h_0=1, h_1=x, h_2=x^2, h_3=x^3, \dots$ które nie są ortogonalne [iloczyn skalarny określony z funkcją wagową $w(x)$].

Chcemy skonstruować bazę wielomianów ortogonalnych.

funkcje bazowe dla tego przedziału, z wagą $w(x)=1$ są to wielomiany Legendre'a.

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = a + x$$

Jakie a aby $(u_0, u_1) = 0$?: odp.: $a=0$

$$u_1 = x$$

$$u_2 = x^2 + bx + c$$

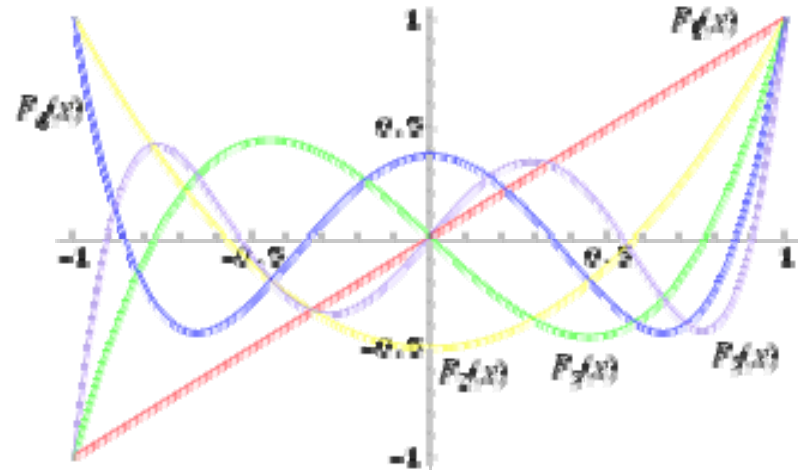
$$(u_2, u_0) = 2/3 + 2c = 0$$

$$(u_2, u_1) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$u_2 = (x^2 - 1/3)$$

W literaturze wielomiany Legendre'a normalizowane tak aby $P_k(1)=1$: $1, x, 3/2(x^2 - 1/3)$

itd.



kwadratury Gaussa-Legendra

W bazie P_0, P_1, \dots, P_{n-1} można opisać wszystkie wielomiany stopnia $n-1$,

P_n ortogonalny do wszystkich wektorów bazy, więc i do wszystkich wielomianów stopnia $n-1$

Punkty Gaussa zapewniające maksymalną dokładność (do wielomianu stopnia $2n-1$):
zera n -tego wielomianu Legendra

$$P_2 = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \rightarrow \text{Dla } 2n-1=3 \quad [\text{punkty Gaussa tam gdzie wcześniej wyliczyliśmy}]$$

$$l_1 = (x + 1/\sqrt{3}) / (2/\sqrt{3}). \quad \text{całka z niego od } -1 \text{ do } 1 = 1$$

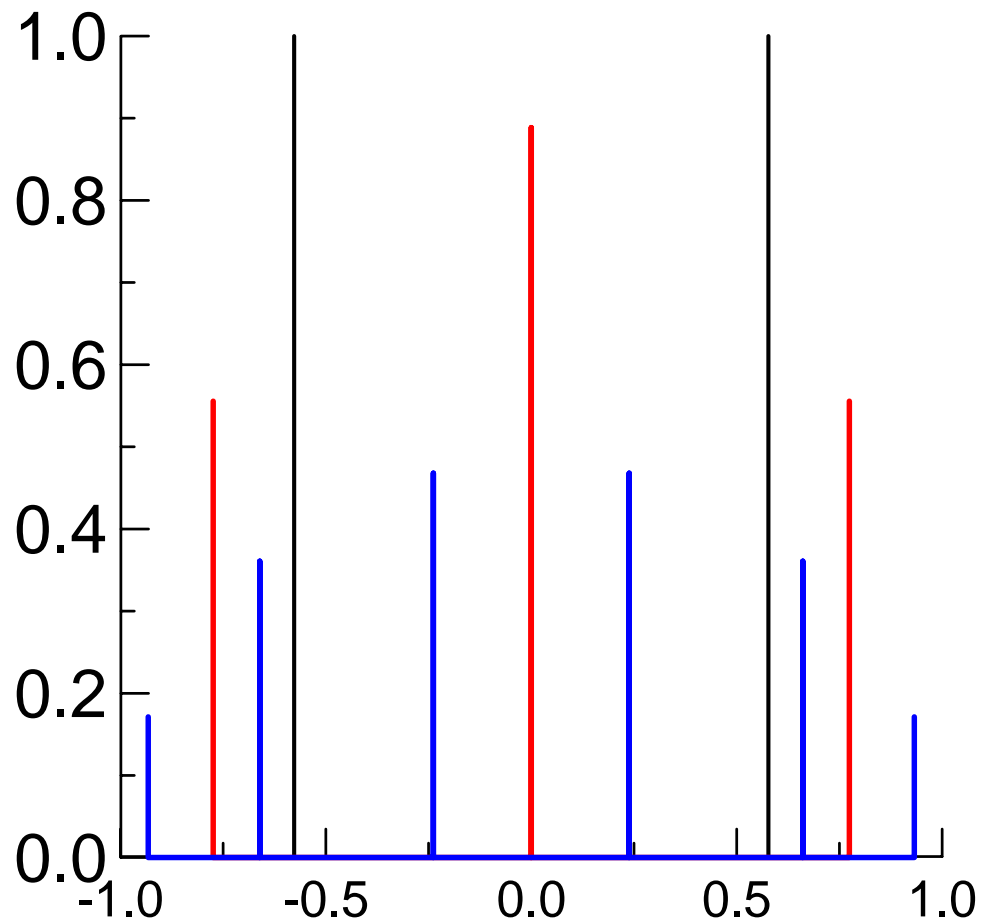
$$l_i(x) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$$

Wagi i punkty Gaussa

Dokładne do wielomianów stopnia 3

stopnia 5

stopnia 11



$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + E$$

MES z liniowymi funkcjami kształtu:
przykład zastosowania nr. 2:
równanie oscylatora harmonicznego

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 u_n(x) = E_n u_n(x)$$

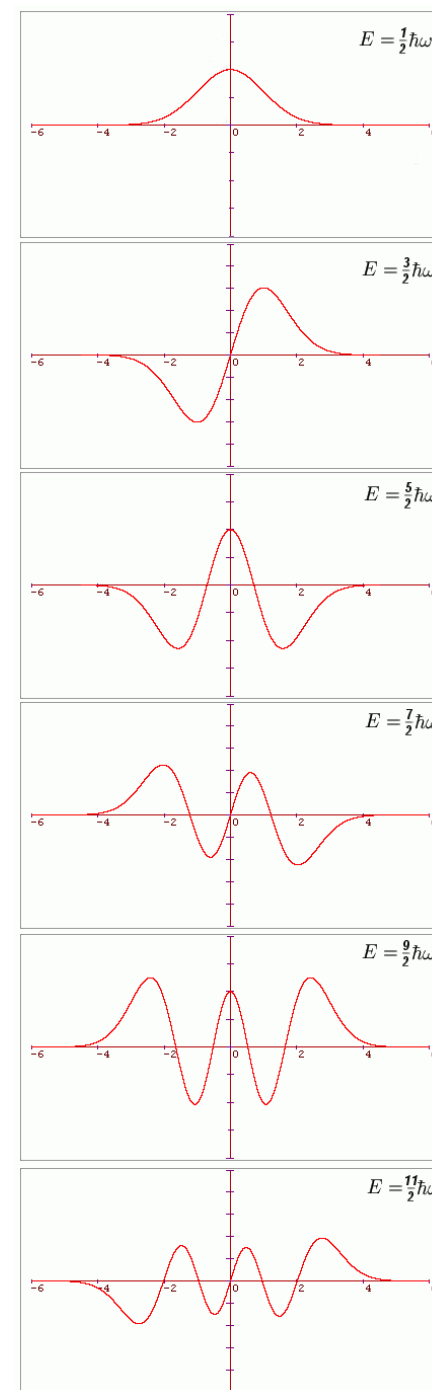
niewiadome: funkcja własna $u_n(x)$
oraz wartość własna E_n

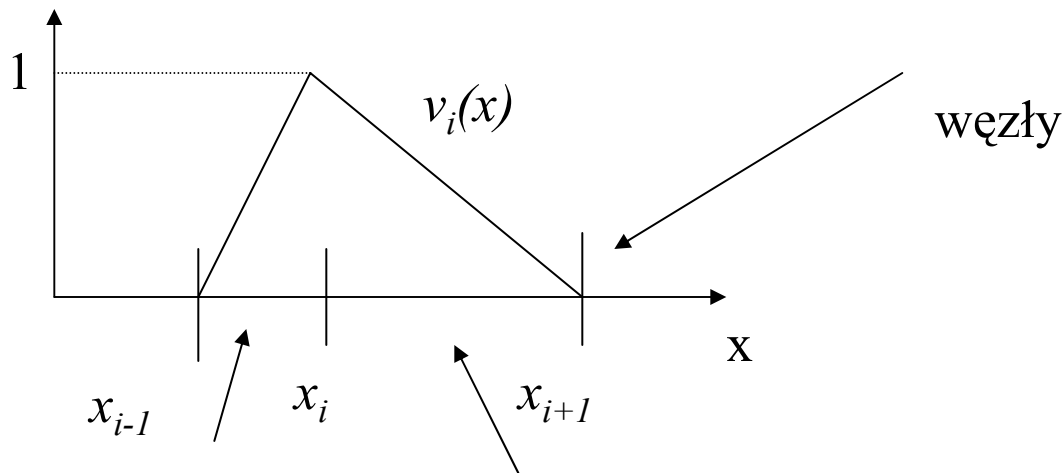
$$E_n = 1/2 + n$$

$$u_n = \exp(-x^2/2) H_n(x)$$

$$H_n = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$$

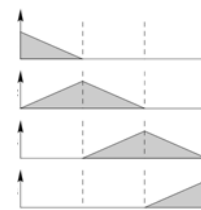
rysunek z Wikipedii





element K_i długości
 $\delta_i = x_i - x_{i-1}$

element K_{i+1} długości
 $\delta_{i+1} = x_{i+1} - x_i$



$$u_n = \sum_i c_i v_i(x) \quad \text{baza funkcyjna}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 u_n(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 u_n(x) = E_n u_n(x) \quad \Big| \quad \times v_j(x) \int dx$$

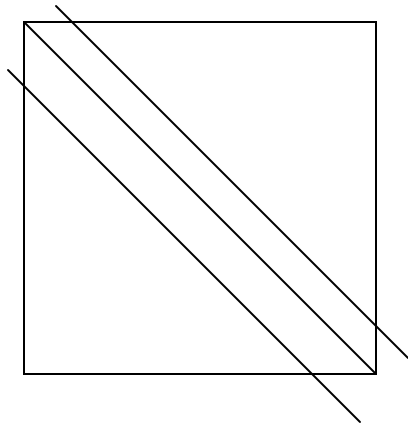
$$\sum_i \frac{1}{2} \left(\int dx \frac{dv_j(x)}{dx} \frac{dv_i(x)}{dx} + x^2 v_i(x) v_j(x) \right) c_i = E \sum_i \int dx v_j(x) v_i(x) c_i$$

$$\sum_i \frac{1}{2} \left(\int dx \frac{dv_j(x)}{dx} \frac{dv_i(x)}{dx} + x^2 v_i(x) v_j(x) \right) c_i = E \sum_i \int dx v_j(x) v_i(x) c_i$$

$$\sum_i H_{ji} c_i = E \sum_i O_{ji} c_i$$

całki się liczy analitycznie
[wielomiany stopnia najwyżej 4]

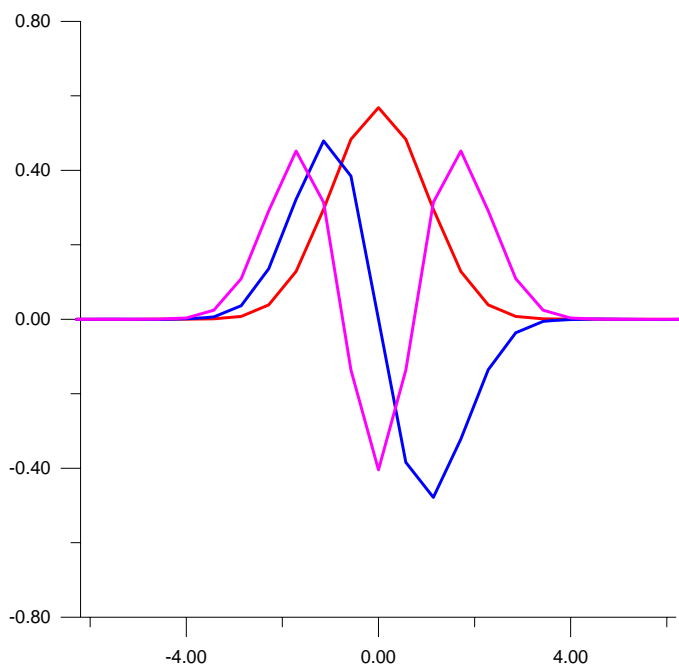
$$\mathbf{Hc} = E\mathbf{O}c$$



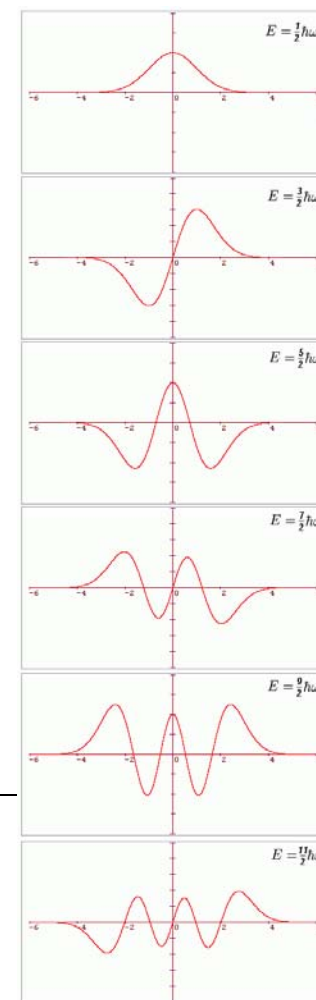
tzw. uogólnione macierzowe
równanie własne
[„zwykle” równanie własne
gdy : $\mathbf{O}=1$]

macierze \mathbf{H}, \mathbf{O} – trójprzekątniowa, symetryczna
nasz operator = samosprężony (hermitowski)

równomierny rozkład 21 węzłów (elementy równej długości) siatka od -6.2 do 6.2



E dok	E num	błąd
5.5	6.048	0.548
4.5	4.878	0.378
3.5	3.736	0.235
2.5	2.625	0.125
1.5	1.549	0.049
0.5	0.510	0.01



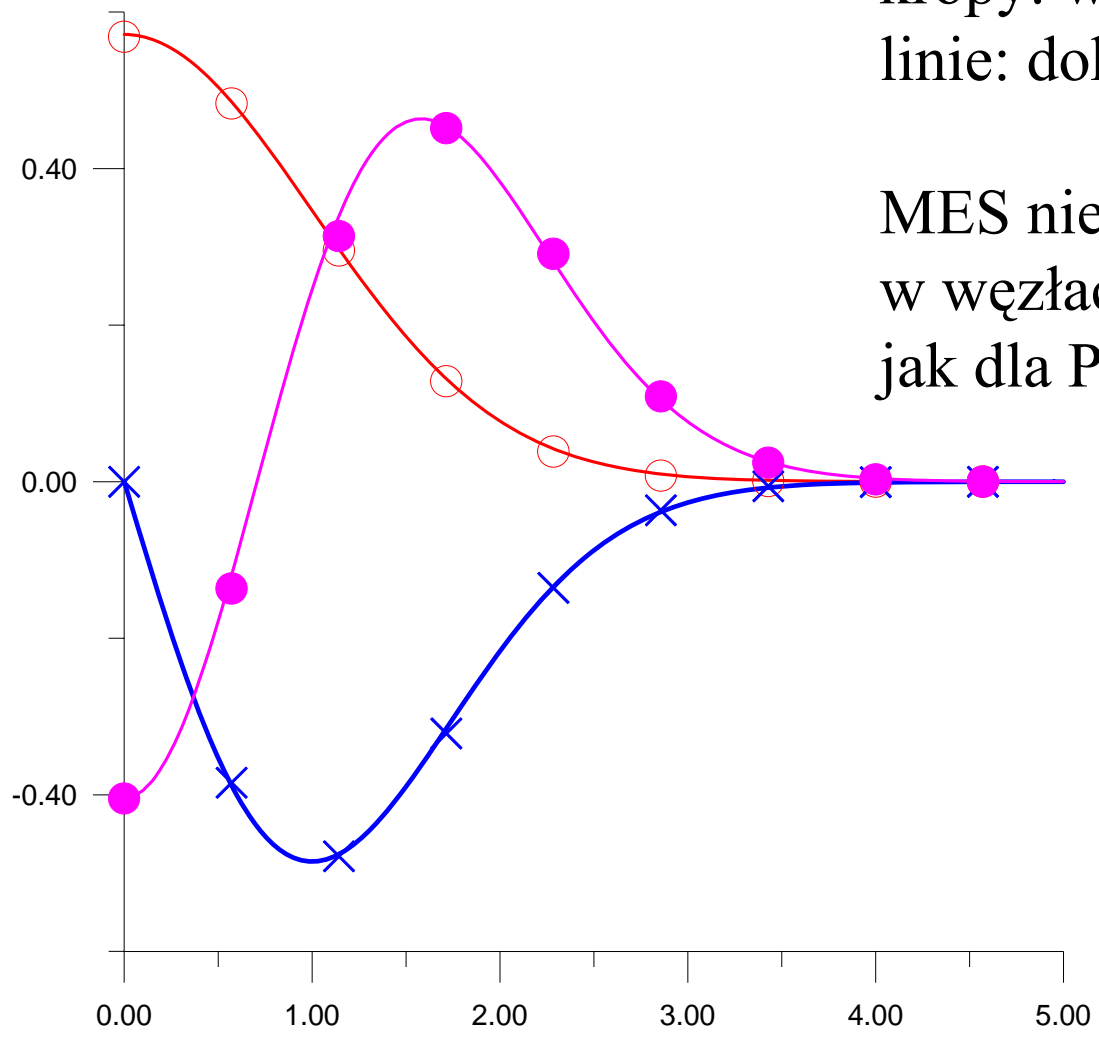
MRS: przy tej samej liczbie węzłów

względna przewaga MES rośnie
dla stanów o wyższej energii

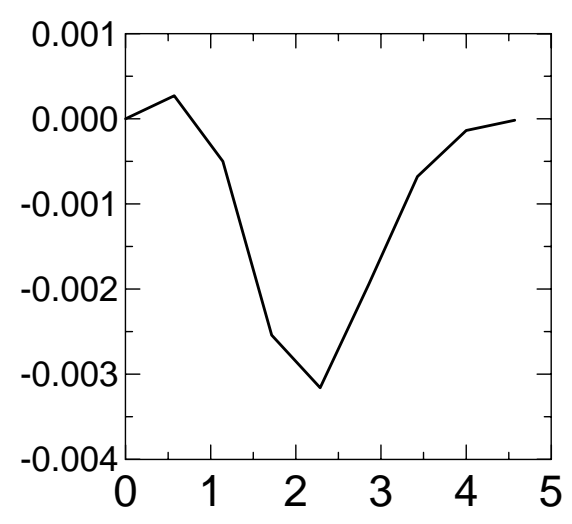
E num	błąd
4.772	-0.728
4.027	-0.473
3.220	-0.280
2.358	-0.172
1.446	-0.054
0.489	-0.011

kropy: wartości z MES
linie: dokładne funkcje własne

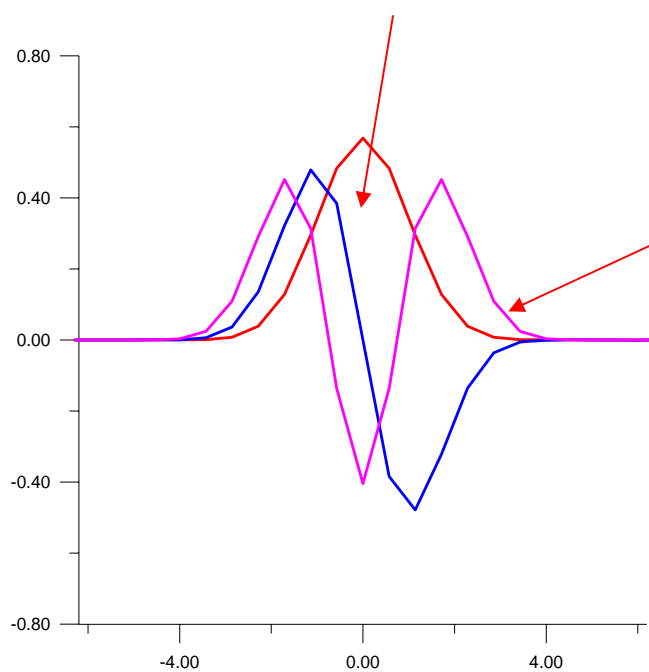
MES nie jest ściśle dokładna
w węzłach
jak dla Poissona, ale niezła



różnica dokładny=MES
dla wektora własnego
o najniższej wartości własnej

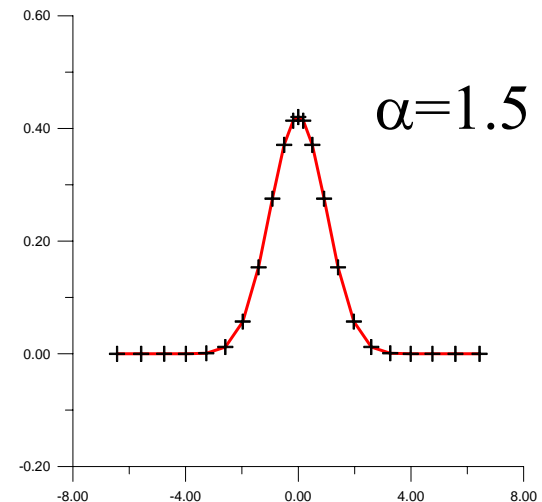
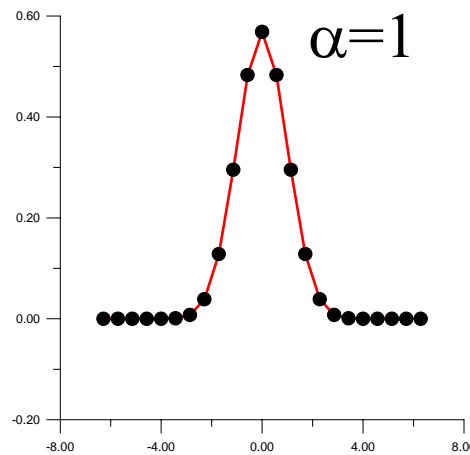


przydałaby się siatka nierównomierna:
 więcej węzłów tam gdzie wektory własne
 przyjmują duże wartości, mniej na ogonach



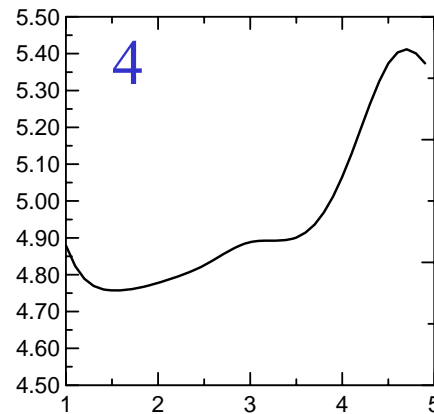
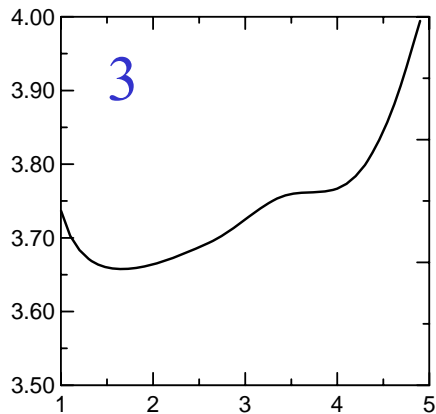
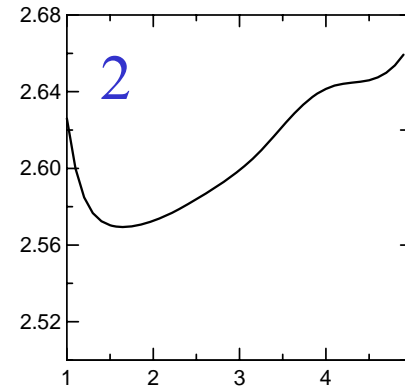
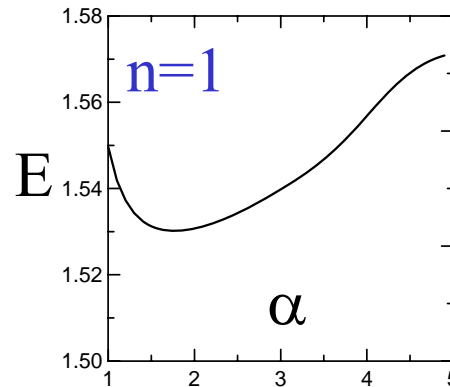
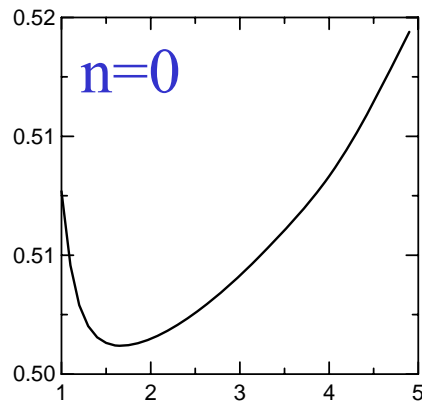
n=21 punktów

$$x_k = 6 \left(\frac{|k - n/2 - 1|}{n/2} \right)^\alpha$$



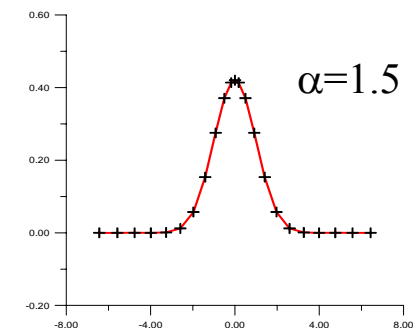
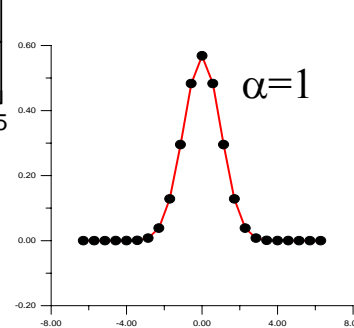
oscylator harmoniczny: optymalizacja rozkładu elementów

$$E_n = n + 1/2$$



dla wszystkich stanów
optymalny jest wykładnik

$$\alpha \approx 1.5$$



Metoda różnic skończonych, siatka nierównomierna

Iloraz różnicowy drugiej pochodnej dla nierównej siatki:



$$\left. \begin{aligned} u(x + \Delta p) &= u(x) + \Delta p \frac{du}{dx} + \frac{\Delta p^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta p^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta p^4) \\ u(x - \Delta l) &= u(x) - \Delta l \frac{du}{dx} + \frac{\Delta l^2}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta l^3}{6} \frac{d^3u}{dx^3} + O(\Delta l^4) \end{aligned} \right| \begin{array}{l} \times \Delta l \\ \times \Delta p \end{array} +$$

Wzór trójpunktowy

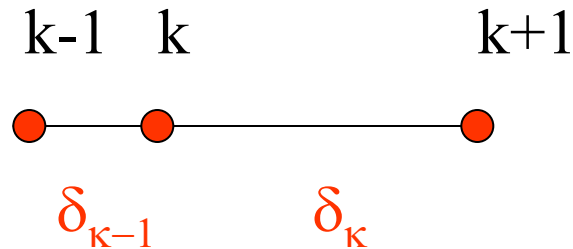
$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{u(x - \Delta l)\Delta p + u(x + \Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l\Delta p(\Delta l + \Delta p)} + O(\Delta l - \Delta p)$$



W MES: nie ma problemu
bo pochodne i całki liczymy dokładnie!

tracimy jeden rząd
dokładności w porównaniu
z siatką równomierną
Problem rozwiązany
w metodzie elementów
skończonych.

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 2 \frac{u(x - \Delta l)\Delta p + u(x + \Delta p)\Delta l - (\Delta p + \Delta l)u(x)}{\Delta l\Delta p(\Delta l + \Delta p)} + O(\Delta l - \Delta p)$$



$$-\left(\frac{1}{\delta_k(\delta_k + \delta_{k-1})}\right)u_{k-1} + \left(\frac{1}{\delta_k\delta_{k-1}} + \frac{1}{2}x_k^2\right)u_k - \left(\frac{1}{\delta_{k-1}(\delta_k + \delta_{k-1})}\right)u_{k+1} = Eu_k$$

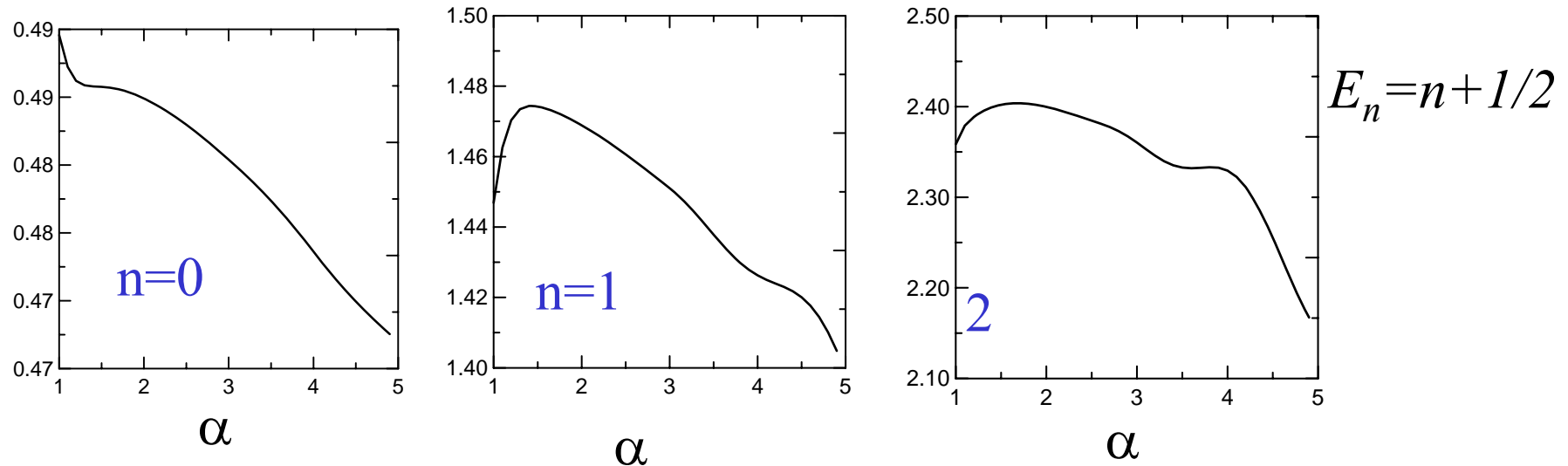
[różnica z MES: potencjał tylko do diagonal, $\mathbf{O}=1$]

Uwaga: metoda produkuje niesymetryczną macierz \mathbf{H} :

$$H_{k,k-1} = -\frac{1}{\delta_k(\delta_k + \delta_{k-1})} \neq H_{k-1,k} = -\frac{1}{\delta_{k-1}(\delta_k + \delta_{k-1})}$$

komplikacja, np. dla niesymetrycznych macierzy nie ma gwarancji, że wartości własne będą rzeczywiste, a wektory własne wzajemnie ortogonalne

Metoda różnic skończonych, siatka nierównomierna



wartości własne mniejsze niż dokładne.

dla $n=0$, optymalna jest siatka równomierna.

Pewna poprawa (wzrost) jest dla wzbudzonych.

Ale (!!)

wiemy, że wzrost to poprawa tylko dlatego, że rozwiązanie dokładne jest znane.

W typowej sytuacji - nie znamy rozwiązania dokładnego.

Nie będziemy wiedzieli czy mamy do czynienia z poprawą czy pogorszeniem.

w MES: przeciwnie, metoda ma charakter wariacyjny!

Lepsza siatka znaczy mniejsza wartość własna!

Parametr dla optymalizacji siatki!

równanie eliptyczne a różniczkowe równanie własne w metodzie elementów skończonych

$$Lu=f \quad \text{eliptyczne}$$

1D: np. $L=-d^2/dx^2$

$$Hu=Eu \quad \text{własne}$$

np. $H=-d^2/dx^2+x^2$

rozwiązanie poszukiwane w bazie funkcyjnej

funkcja
próbna (*trial*)

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i v_i(x)$$

(wstawić rozwiązanie próbne, wyrzutować na wektory bazy)

$$\sum_{i=1}^n (v_j, Lv_i) c_i = (v_j, f)$$

(układ równań
algebraicznych)

$$\mathbf{Lc=f}$$

$$\sum_{i=1}^n (v_j, Hv_i) c_i = E \sum_{i=1}^n (v_j, v_i) c_i$$

(uogólniony macierzowy
problem własny)

$$\mathbf{Hc=EOc}$$

wariacyjny charakter metody dla równania eliptycznego i własnego

MES (i Galerkin w ogóle) równoważna metodzie Reyleigha-Ritza, gdy ta stosowalna

$$Lu=f$$

$$\sum_{i=1}^n (v_j, Lv_i) c_i = (v_j, f)$$

$$Hu=Eu$$

$$\sum_{i=1}^n (v_j, Hv_i) c_i = E \sum_{i=1}^n (v_j, v_i) c_i$$

wartościom c_i , które spełniają równania algebraiczne odpowiada minimum funkcjonału:

$$a = \int \left(\frac{1}{2} uLu - fu \right)$$

$$e = \frac{\int (uHu)}{\int uu}$$

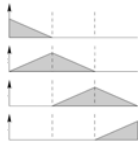
dokładne rozwiązania równania oscylatora są nie tylko ciągłe,
ale również ciągłe z pochodną

baza Lagrange'a: gwarantuje tylko ciągłość funkcji na granicy elementów
ciągłość pochodnej nie jest gwarantowana

jeśli zainwestujemy w funkcje kształtu tak aby zapewnić ciągłość z pochodną
- niższe wartości własne wyjść powinny

kiedy ciągłość pochodnej ważna

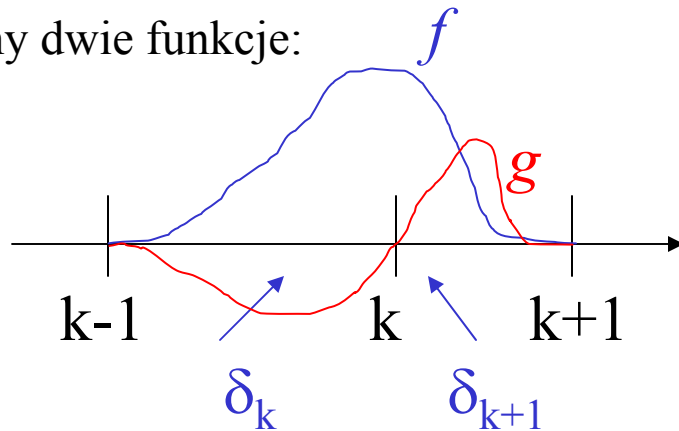
- 1) dla równania Poissona: nieciągłe pole elektryczne (pochodna potencjału)
gdy rozkład gęstości ładunku o formie delty Diraca
- 2) równanie przewodnictwa cieplnego: strumień ciepła proporcjonalny
do gradientu temperatury = gdy ten nieciągły na granicy elementów
stan nie może być ustalony



zapewniały ciągłość funkcji: 2 nie znikające f na element, jedna na węzeł

MES: baza funkcji ciągłych z pochodnymi na granicy elementów

z węzłem k
wiążemy dwie funkcje:



f przenosi ciągłą wartość funkcji
przez granice elementów:
 f : 1 w węźle k , 0 w sąsiednich
 f' zero we wszystkich węzłach

g przenosi ciągłą pochodną
przez dwa elementy:
 g' : 1 w węźle k , 0 w sąsiednich
 g zero we wszystkich węzłach

$$u = \sum_i \alpha_i f_i(x) + \sum_i \beta_i g_i(x)$$

parametry węzłowe:
4 na element – wartości i pochodne
na obydwu końcach przedziału

4 funkcje kształtu na element
po 2 funkcje na węzeł

$$u = \sum_i \alpha_i f_i(x) + \sum_i \beta_i g_i(x)$$

$$f_l(x_k) = \delta_{kl} \quad g_l(x_k) = 0$$

$$f'_l(x_k) = 0 \quad g'_l(x_k) = \delta_{kl}$$

$$u(x_k) = \alpha_k$$

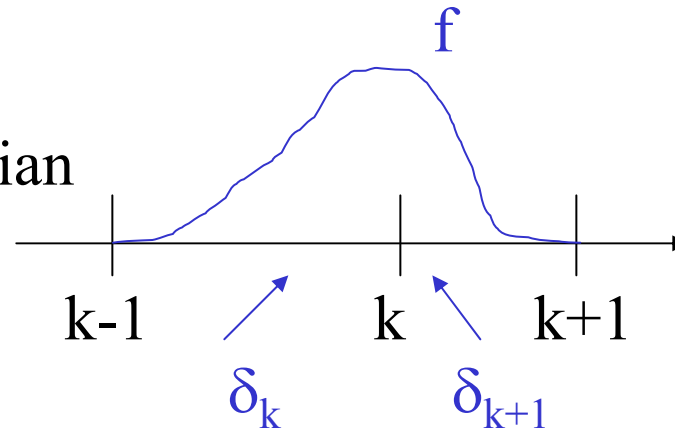
$$u'(x_k) = \beta_k$$

współczynniki rozwinięcia (niewiadome)
: wartości funkcji i pochodnej w węzłach

Metoda ES da nam ekstra
oszacowanie pochodnych rozwiązania

parametry węzłowe: tutaj u i u'

konstruujemy funkcję f_k :
stopnia musi trzeciego wielomian



$$f_k = \begin{cases} a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ A_k(x - x_k)^3 + B_k(x - x_k)^2 + C_k(x - x_k) + D_k & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & x \text{ w dopełnieniu} \end{cases}$$

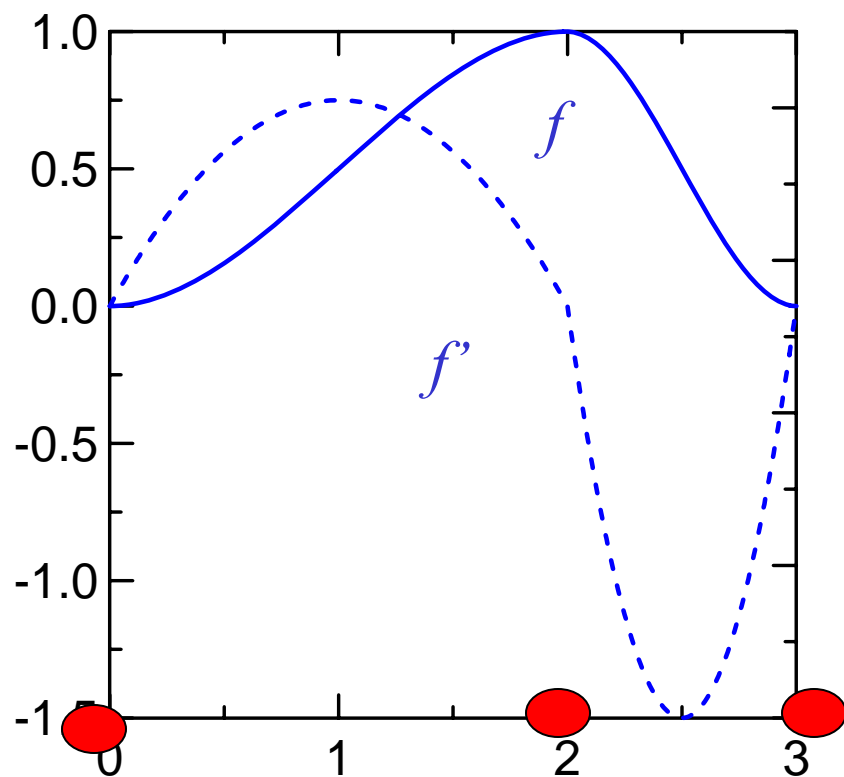
współczynniki $a_k, b_k, c_k, d_k : f(x_k)=1, f(x_{k-1})=0, f'(x_k)=0, f'(x_{k-1})=0$

$$\begin{aligned} c_k &= 0 \\ d_k &= 1 \\ a_k &= -\frac{2}{\delta_k^3} \\ b_k &= -\frac{3}{\delta_k^2} \end{aligned}$$

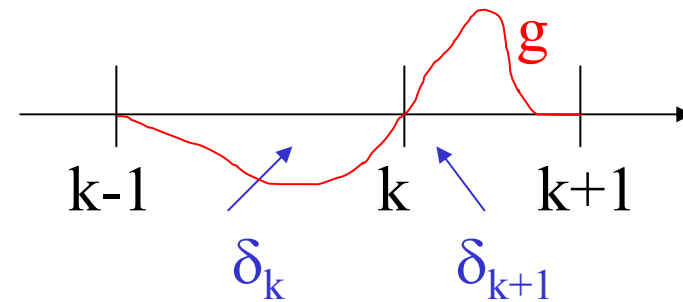
podobnie

$$\begin{aligned} C_k &= 0 \\ D_k &= 1 \\ A_k &= \frac{2}{\delta_{k+1}^3} \\ B_k &= -\frac{3}{\delta_{k+1}^2} \end{aligned}$$

przykładowy przebieg funkcji f niosącej ciągłość
rozwiązania przez granicę elementów



konstruujemy funkcję g_k :



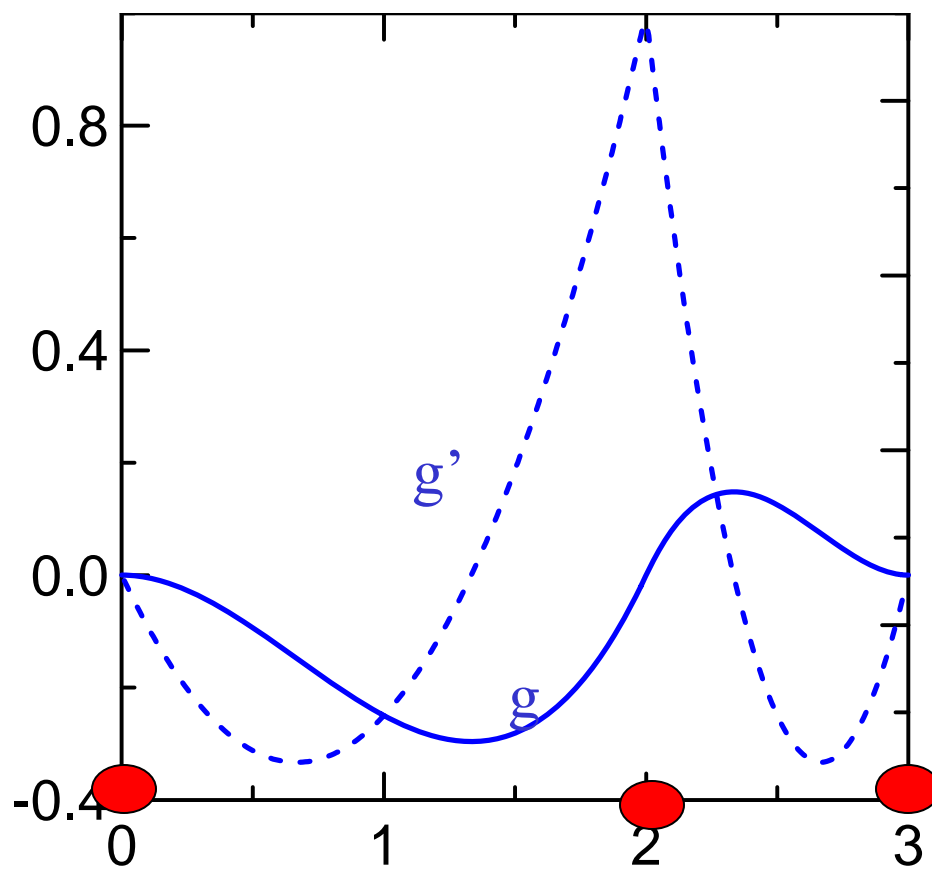
$$g_k = \begin{cases} a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ A_k(x - x_k)^3 + B_k(x - x_k)^2 + C_k(x - x_k) + D_k & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0 & x \text{ w dopełnieniu} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g(x_{k-1}) &= g(x_k) = g'(x_{k-1}) = 0 \\ g'(x_k) &= 1 \end{aligned}$$

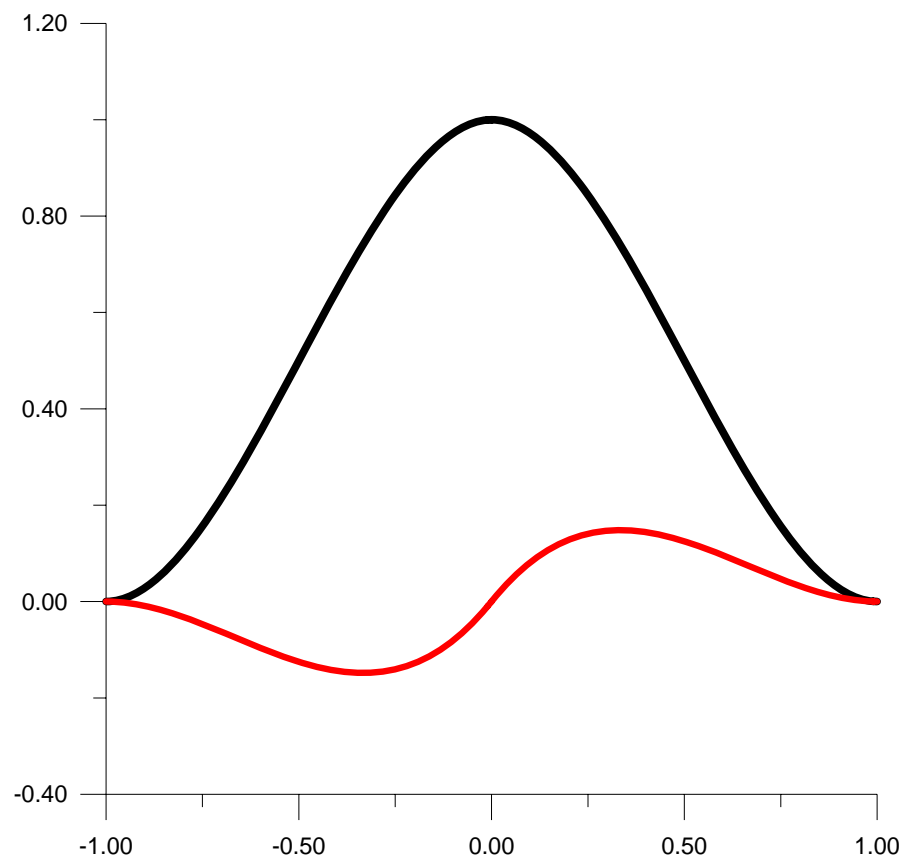
$$\begin{aligned} c_k &= 1 \\ d_k &= 0 \\ a_k &= \frac{1}{\delta_k^2} \\ b_k &= \frac{2}{\delta_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_k &= 1 \\ D_k &= 0 \\ A_k &= \frac{1}{\delta_{k+1}^2} \\ B_k &= -\frac{2}{\delta_{k+1}} \end{aligned}$$

przykładowy przebieg funkcji g niosącej ciągłość
pochodnej rozwiązania przez granicę elementów



funkcje f_k g_k są ortogonalne jeśli węzły równoodległe



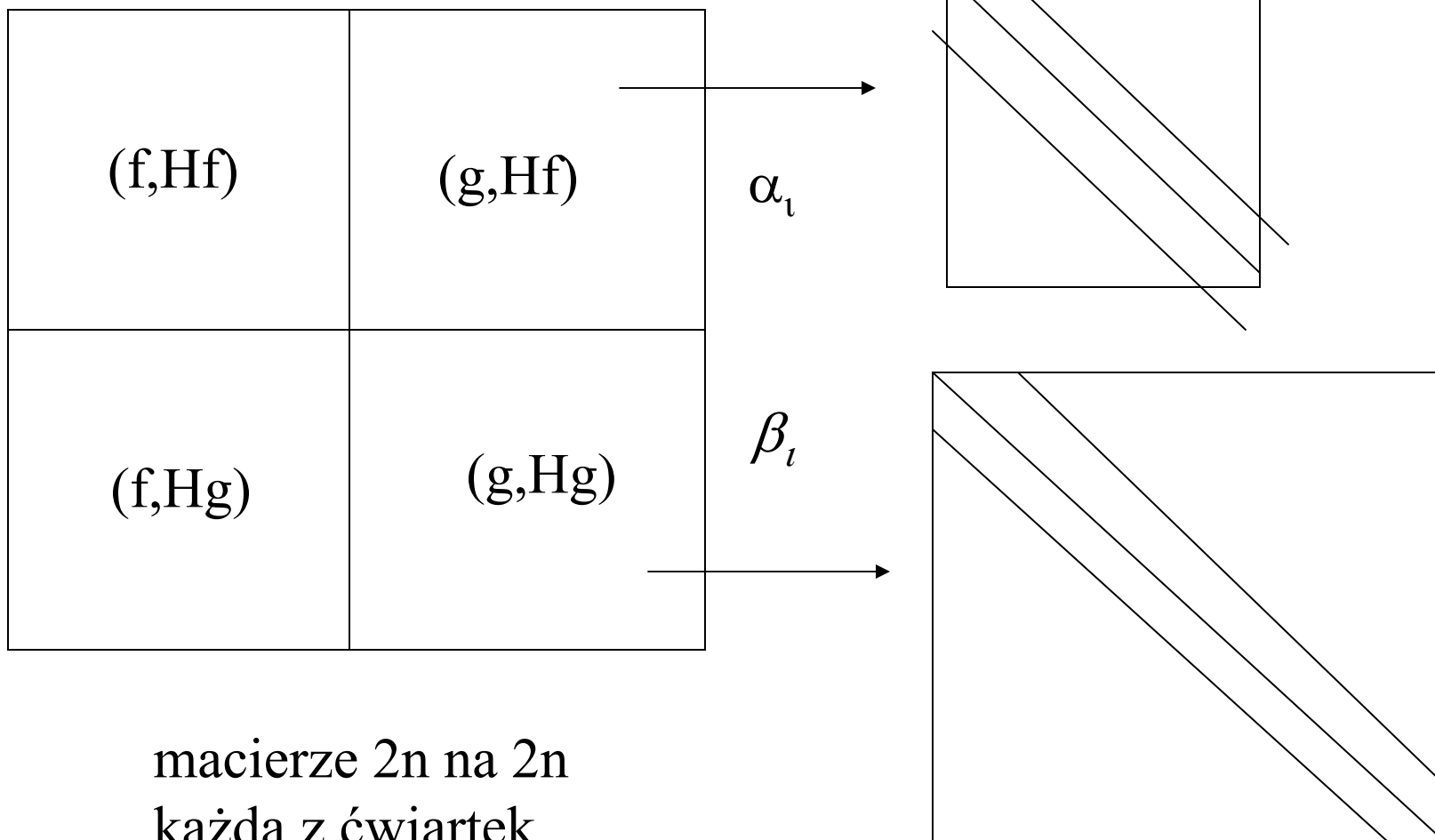
symetria, ale (f_k, g_{k+1}) już nie 0

w teorii interpolacji: wielomiany 3-go rzędu interpolujące wartości i pochodne
- sklejki Hermite'a

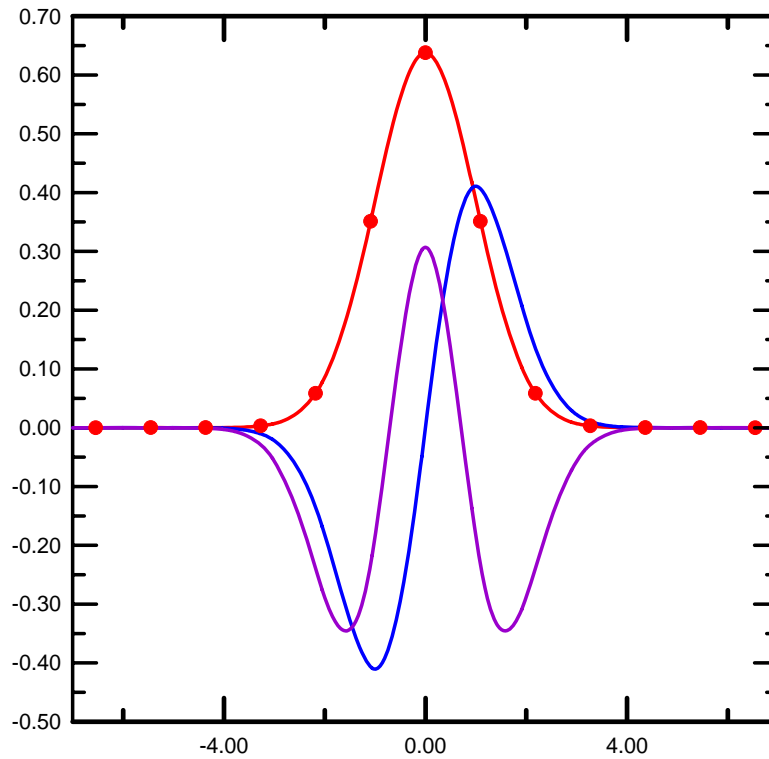
sklejka Hermita dla równania własnego: struktura macierzy

$$\mathbf{Hc} = E\mathbf{Oc}$$

$$u = \sum_i \alpha_i f_i(x) + \sum_i \beta_i g_i(x)$$



równoodległe węzły zaznaczone kropkami



4.502

3.510

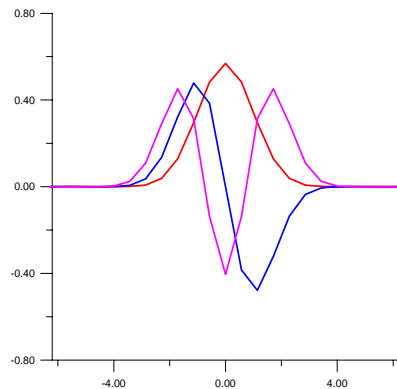
2.500

1.500

0.500

rewelacyjny wynik

13 węzłów/26 równań



liniowe 23 węzły / (23 równania)

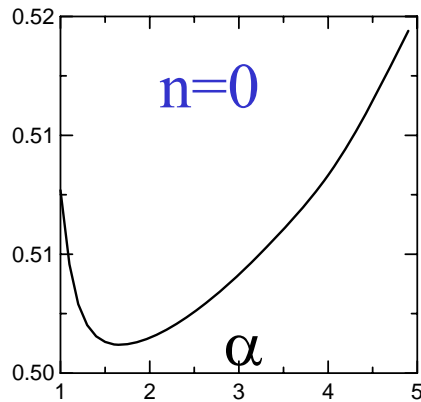
2.625

1.549

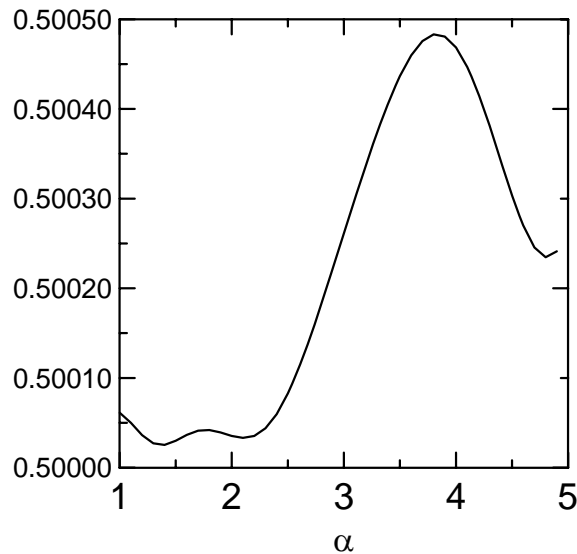
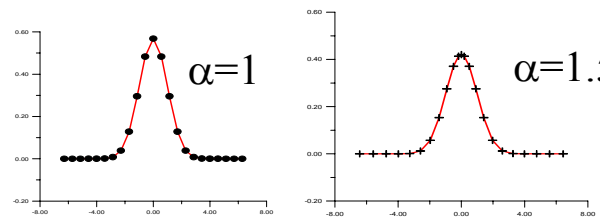
0.51

optymalizacja elementów
(więcej węzłów na środku)

$$x_k = 6 \left(\frac{|k - n/2 - 1|}{n/2} \right)^\alpha$$



wynik dla funkcji liniowych



wynik dla sklejek Hermite'a

-funkcje kształtu są tak elastyczne,
że optymalizacja elementów staje
się zbędna

Szukamy funkcji kształtu dla rozwiązań ciągłych z pochodną (funkcji kształtu Hermite'a)

4 równania: 2 wartości, 2 pochodne

$$u(\xi = -1) = u_1 \quad x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$u(\xi = +1) = u_2 \quad u'_1 = \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_1} = \left. \frac{du}{d\xi} \right|_{\xi=-1} \times \frac{d\xi}{dx} = \left. \frac{du}{d\xi} \right|_{\xi=-1} \frac{1}{J_m}$$

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + u_2^1 \phi_2^1(\xi)$$

$$u_2 = u_2^0 \quad u'_1 = u_1^1 \quad u'_2 = u_2^1$$

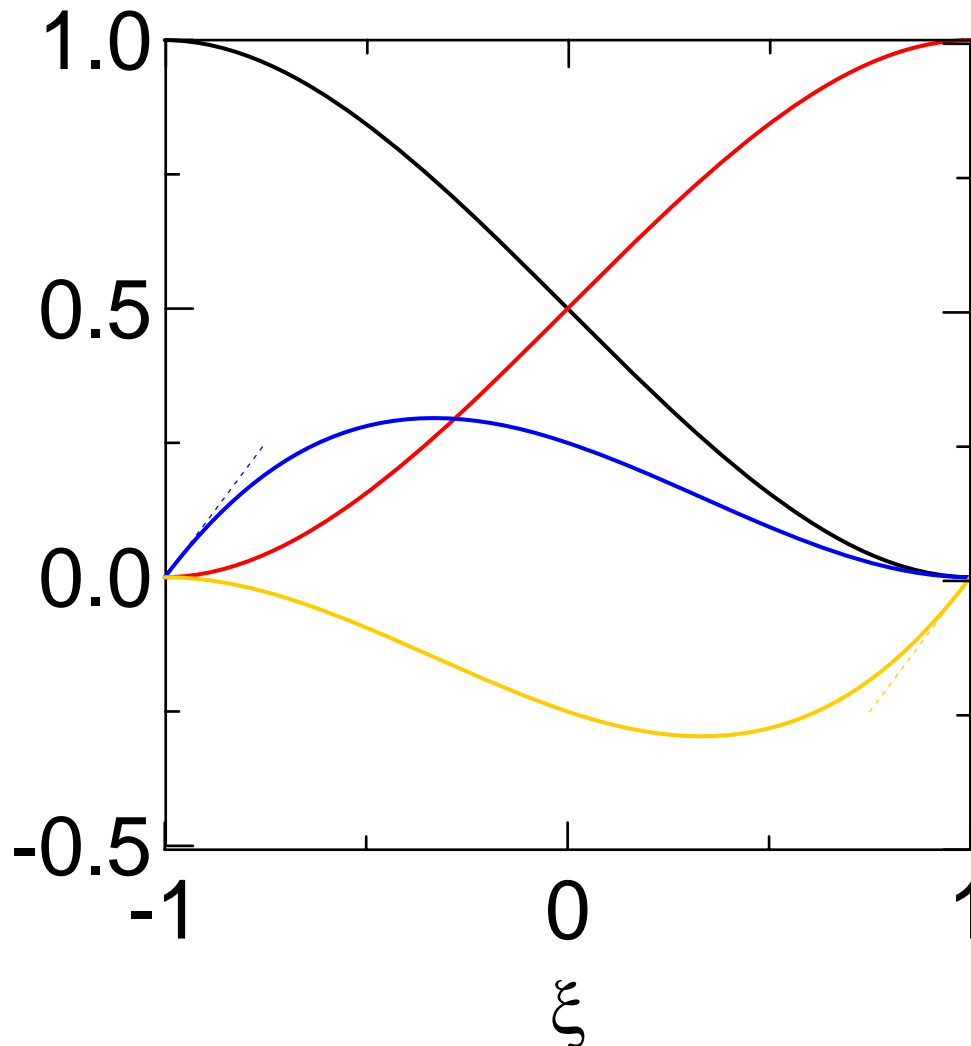
$$\phi_1^0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3$$

$$\phi_1^1 = \frac{J_m}{4} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

$$\phi_2^0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

$$\phi_2^1 = \frac{J_m}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

$$u(\xi) = \underbrace{u_1^0 \phi_1^0(\xi)} + \underbrace{u_1^1 \phi_1^1(\xi)} + \underbrace{u_2^0 \phi_2^0(\xi)} + \underbrace{u_2^1 \phi_2^1(\xi)}$$



na rysunku funkcje związane z pochodnymi / Jakobian

$$\phi_1^0(\xi = -1) = \phi_2^0(\xi = +1) = 1$$

$$\phi_1^0(\xi = +1) = \phi_2^0(\xi = -1) = 0$$

$$(\phi_1^0)'(\xi = \pm 1) = (\phi_2^0)'(\xi = \pm 1) = 0$$

$$\frac{\phi_1^1(\xi = -1)}{J_m} = \frac{\phi_2^1(\xi = +1)}{J_m} = 1$$

$$\phi_1^1(\xi = +1) = \phi_2^1(\xi = -1) = 0$$

$$(\phi_1^1)'(\xi = \pm 1) = (\phi_2^1)'(\xi = \pm 1) = 0$$

każda z funkcji kształtu Hermite'a: odpowiedzialna za wartość lub pochodną, żadna nie przeszkadza pozostałym (pełen podział kompetencji)

Funkcje kształtu Hermite'a: interpolacja jednomianów, przedział $[-1:1]$:

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + u_2^1 \phi_2^1(\xi)$$

$$\phi_1^0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3$$

$$\phi_1^1 = \frac{J_m}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

$$J_m=1$$

$$\phi_2^0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

$$\phi_2^1 = \frac{J_m}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

dokładna funkcja $v(\xi)=\xi$ $u_1^0 = -1, u_2^0 = 1, u_1^1 = 1, u_2^1 = 1$

$$u = \underbrace{3/2 \xi - 1/2 \xi^3}_{\text{wartości}} + \underbrace{-1/2 \xi + 1/2 \xi^3}_{\text{pochodne}} = \xi$$

wartości

pochodne

dokładna funkcja $v(\xi)=\xi^2$ $u_1^0 = 1, u_2^0 = 1, u_1^1 = -2, u_2^1 = 2$

$$u = 1 + (-1 - \xi^2) = \xi^2$$

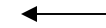
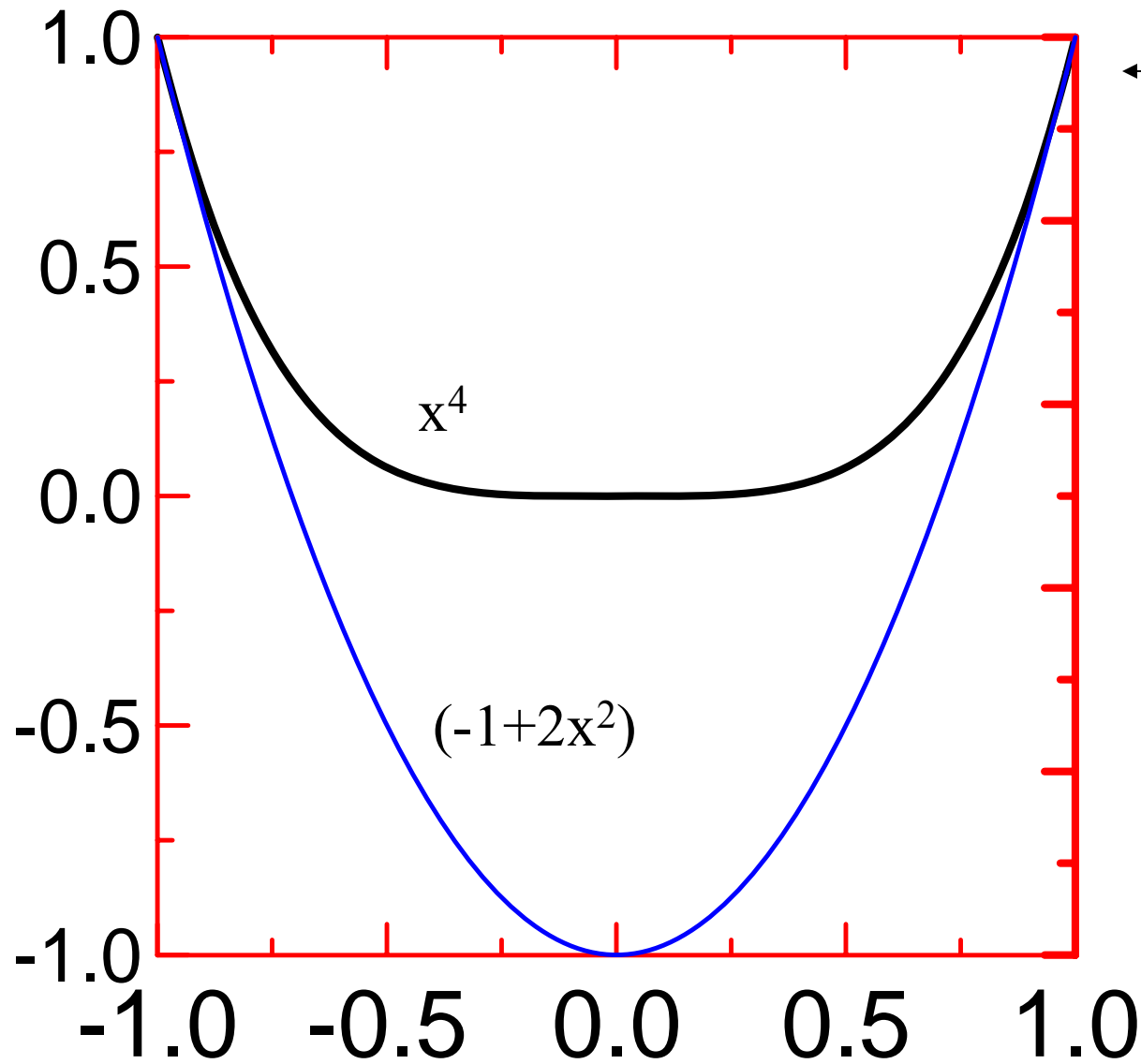
dokładna funkcja $v(\xi)=\xi^3$ $u_1^0 = -1, u_2^0 = 1, u_1^1 = 3, u_2^1 = 3$

$$u = \xi^3$$

dokładna funkcja $v(\xi)=\xi^4$ $u_1^0 = 1, u_2^0 = 1, u_1^1 = -4, u_2^1 = 4$

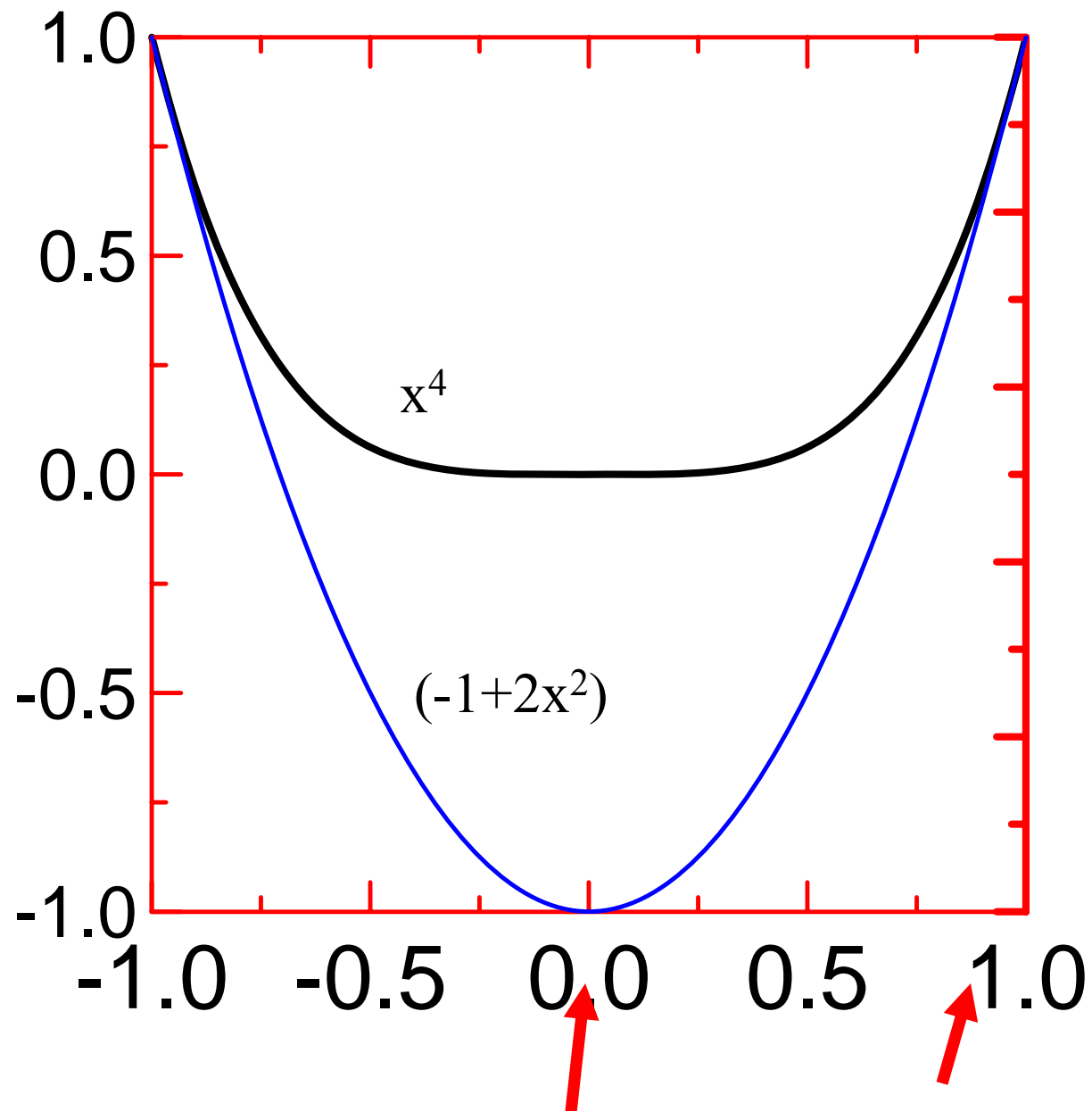
$$u = -1 + 2\xi^2$$

kubiczna sklejka Hermita a wielomian 4-tego rzędu



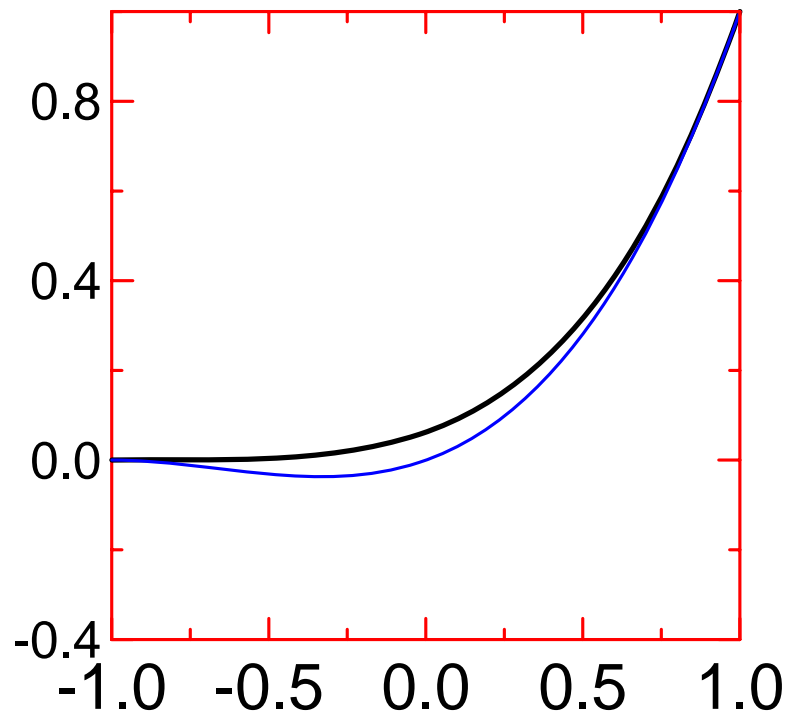
wartość
funkcji i
pochodnej OK,
ale sukces
interpolacji
umiarkowany

Trzeba zawęzić przedział



zawęzić przedział x^4 od $[-1,1]$ do $[0,1]$
aby nie przejmować się czynnikiem skali J_m :
trzymamy $[-1,1]$ a przekształcamy funkcję $[(x+1)/2]^4$

dokładna funkcja $v(\xi)=[(\xi+1)/2]^4$ $u_1^0=0, u_2^0=1, u_1^1=0, u_2^1=2$
 $u=1/4\xi+1/4\xi^3+1/2\xi^2$



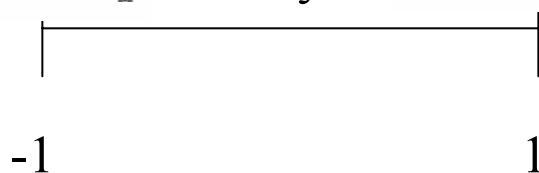
itd.

funkcje kształtu Hermita: zastosowanie

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \begin{array}{l} u(x=-1)=0 \\ u(x=1)=0 \end{array}$$

$$u_1 = u_1^0 \quad u_2 = u_2^0$$

$$u_1' = u_1^1 \quad \xi \quad u_2' = u_2^1$$



Przedział (-1,1)

Podzielony na 8 elementów

(9 węzłów, 18 parametrów

węzłowych)

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$J_m = h_m/2$$

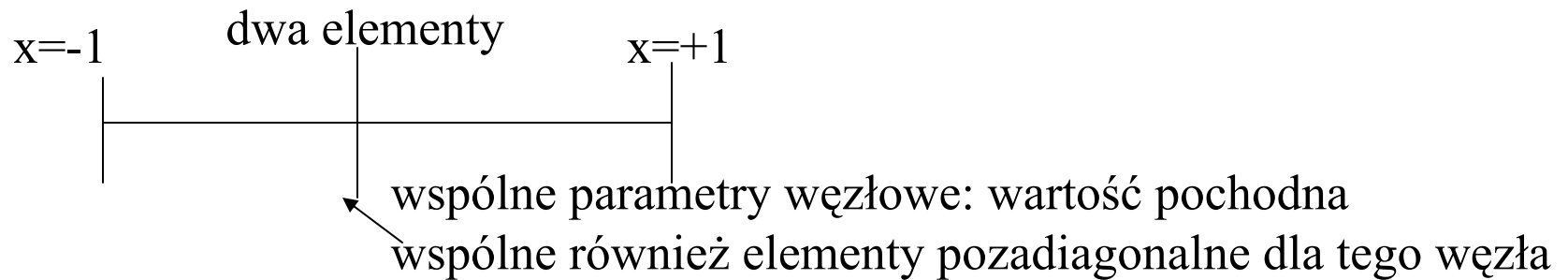
$$u(\xi) = \underbrace{u_1^0 \phi_1^0(\xi)}_1 + \underbrace{u_1^1 \phi_1^1(\xi)}_2 + \underbrace{u_2^0 \phi_2^0(\xi)}_3 + \underbrace{u_2^1 \phi_2^1(\xi)}_4$$

macierz sztywności dla pojedynczego elementu

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[-\frac{df_i}{d\xi} \frac{df_j}{d\xi} \right] d\xi \quad E_{ij}^m = \frac{1}{30J_m} \begin{pmatrix} -18 & -3J_m & 18 & -3J_m \\ -3J_m & -8J_m^2 & 3J_m & 2J_m^2 \\ 18 & 3J_m & -18 & 3J_m \\ -3J_m & 2J_m^2 & 3J_m & -8J_m^2 \end{pmatrix}$$

$$E^m = \frac{1}{30J_m} \begin{pmatrix} \underline{u_1^0} & \underline{u_1^1} & \underline{u_2^0} & \underline{u_2^1} \\ -18 & -3J_m & 18 & -3J_m \\ -3J_m & -8J_m^2 & 3J_m & 2J_m^2 \\ 18 & 3J_m & -18 & 3J_m \\ -3J_m & 2J_m^2 & 3J_m & -8J_m^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} u_1^0 \\ u_1^1 \\ u_2^0 \\ u_2^1 \end{matrix} \begin{matrix} u(\text{lewy}) \\ u'(\text{lewy}) \\ u(\text{prawy}) \\ u'(\text{prawy}) \end{matrix}$$

składanie macierzy sztywności dla f.k. Hermita



$$S = \begin{pmatrix} E_{11}^1 & E_{12}^1 & E_{13}^1 & E_{14}^1 & 0 & 0 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\ E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\ E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\ 0 & 0 & E_{31}^2 & E_{32}^2 & E_{33}^2 & E_{34}^2 \\ 0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2 \end{pmatrix}$$

Prawa strona/jeden element

$$P_i^m = \int_{-1}^1 J_m f_i(\xi) [-\sin(\pi x(\xi))] d\xi$$

$$F = \begin{pmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \\ P_4^2 \end{pmatrix}$$

Warunki brzegowe: $u(x=-1)=0$
 $u(x=1)=0$

$$S = \begin{pmatrix} E_{11}^1 & E_{12}^1 & E_{13}^1 & E_{14}^1 & 0 & 0 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\ E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\ E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\ 0 & 0 & E_{31}^2 & E_{32}^2 & E_{33}^2 & E_{34}^2 \\ 0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} u(-1) \\ u'(-1) \\ u(0) \\ u'(0) \\ u(1) \\ u'(1) \end{matrix}$$

Warunki brzegowe: $u(x=-1)=0$
 $u(x=1)=0$

$$S = \begin{pmatrix} \cancel{E_{11}^1} & \cancel{E_{12}^1} & \cancel{E_{13}^1} & \cancel{E_{14}^1} & 0 & 0 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\ E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\ E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{E_{31}^2} & \cancel{E_{32}^2} & \cancel{E_{33}^2} & \cancel{E_{34}^2} \\ 0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} u(-1) \\ u'(-1) \\ u(0) \\ u'(0) \\ u(1) \\ u'(1) \end{matrix}$$

tu damy jedynki na diagonali

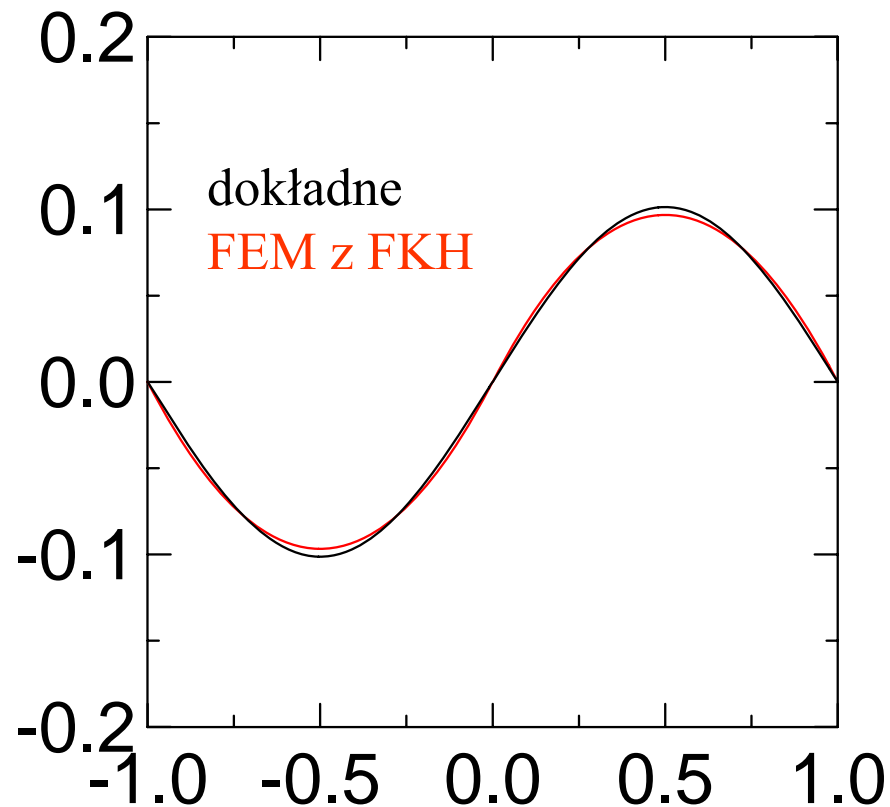
$$\mathbf{Su}=\mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cancel{P_1^1} \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ \cancel{P_3^2} \\ P_4^2 \end{pmatrix}$$

tu damy zera

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \text{Wyniki dla problemu modelowego}$$

dwa elementy / 3 węzły / 6 parametrów węzłowych



pochodne uzyskane z rozwiązania
układu równań
w węzłach:

-0.387 , 0.387 , -0.387

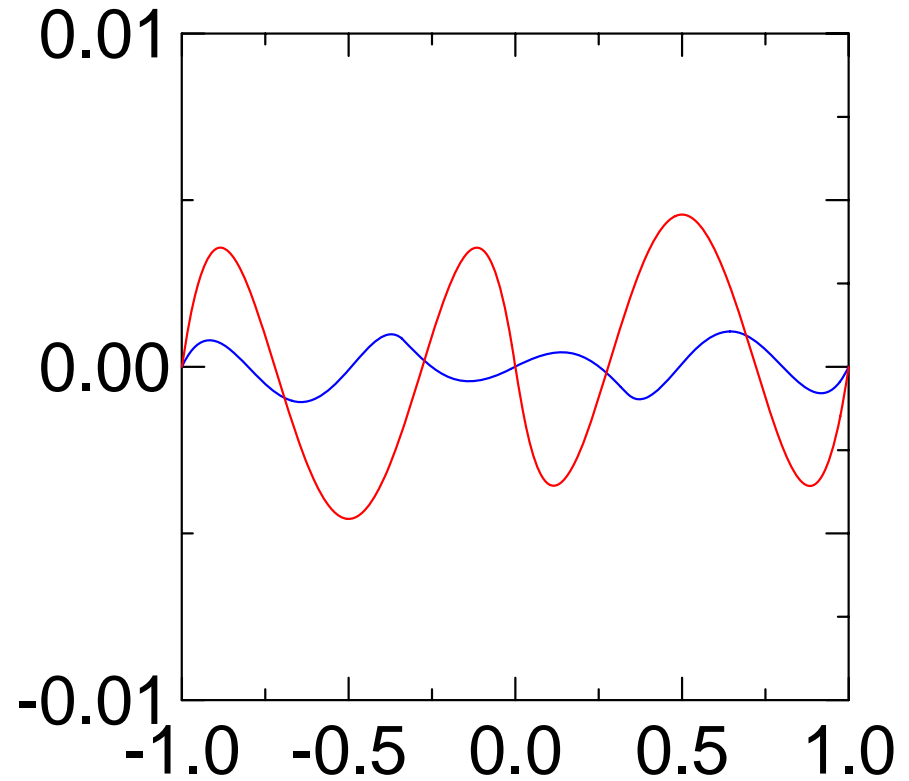
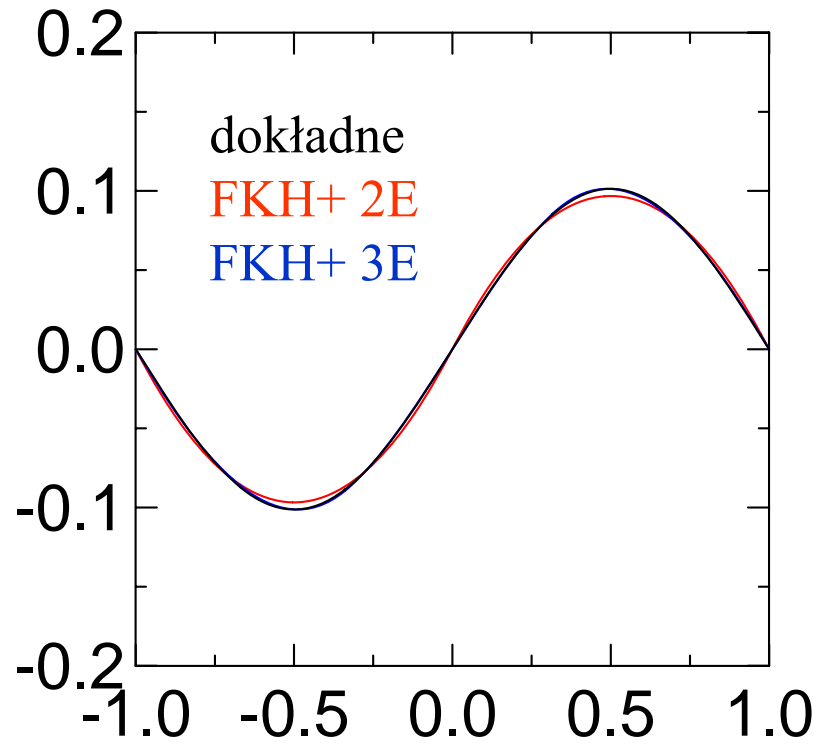
zamiast dokładnej

$-1/\pi, 1/\pi, -1/\pi$

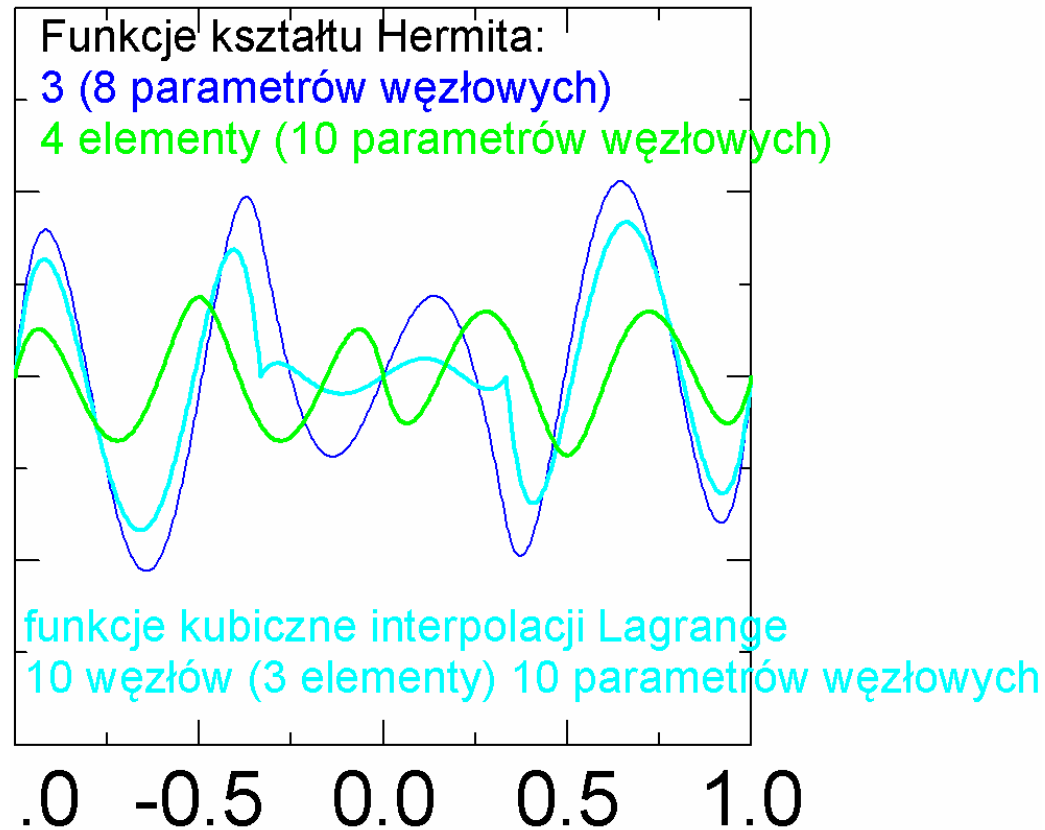
-0.318, 0.318, -0.318

Wyniki dla problemu modelowego

3 elementy / 4 węzły / 8 parametrów węzłowych



Baza kubiczna Lagrange'a i baza Hermita porównanie dokładności



Przy tej samej złożoności: w porównaniu z bazą Lagrange'a w bazie Hermita błąd mniejszy (i ciągły, bo rozwiązanie przybliżone ciągłe)

funkcje kształtu Hermita a warunki brzegowe Neumanna

$$u(x=-1)=0$$

$$u'(x=1)=-1/\pi$$

$$u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$$

Przykład dla dwóch elementów

$$S = \begin{pmatrix} E_{11}^1 & E_{12}^1 & E_{13}^1 & E_{14}^1 & 0 & 0 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\ E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\ E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\ 0 & 0 & E_{31}^2 & E_{32}^2 & E_{33}^2 & E_{34}^2 \\ 0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \cancel{P_1^1} \\ P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ P_3^2 \\ \cancel{P_4^2} \end{pmatrix}$$

1 1 co tutaj?

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + \underline{u_2^1 \phi_2^1(\xi)}$$

mamy ustawić u_2^1 tak, żeby

odpowiedzialna za pochodną na końcu przedziału

$$\left. \frac{du(x(\xi))}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{1}{\pi} \quad \longrightarrow \quad u_2^1 \left. \frac{d\phi_2^1(x(\xi))}{dx} \right|_{x=1} = -\frac{1}{\pi}$$

pochodne pozostałych funkcji znikają w 1

warunek Neumanna dla funkcji
kształtu Hilberta

$$u_2^1 \frac{d\phi_2^1(x(\xi))}{dx} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{\pi}$$

$$\phi_2^1 = \frac{J_m}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

$$u_2^1 \frac{d\phi_2^1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \Big|_{\xi=1} = -\frac{1}{\pi}$$

$$u_2^1 J_m \frac{1}{J_m} = -\frac{1}{\pi}$$

$$u_2^1 = -\frac{1}{\pi}$$

$$S = \begin{pmatrix} E_{11}^1 & E_{12}^1 & E_{13}^1 & E_{14}^1 & 0 & 0 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\ E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\ E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\ 0 & 0 & E_{31}^2 & E_{32}^2 & E_{33}^2 & E_{34}^2 \\ 0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2 \end{pmatrix}$$

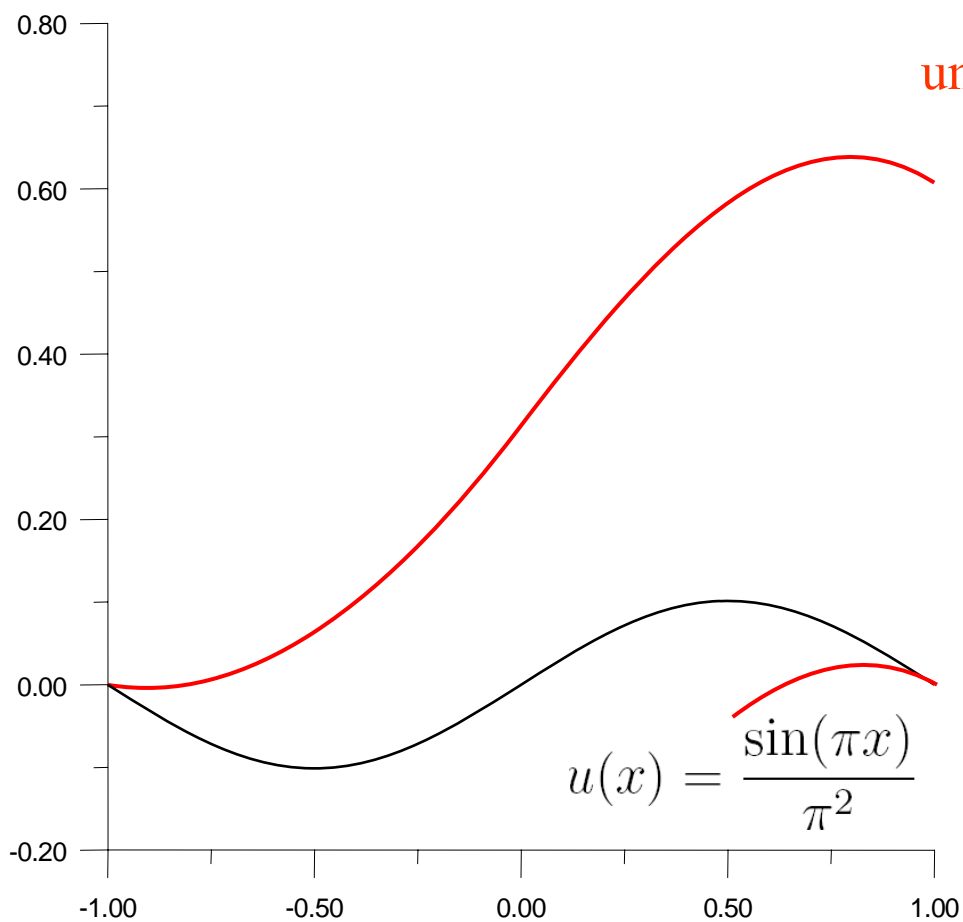
$$F = \begin{pmatrix} 0 & -P_1^1 \\ & P_2^1 \\ P_3^1 + P_1^2 \\ P_4^1 + P_2^2 \\ & P_3^2 \\ & -P_4^2 \end{pmatrix}$$

1

-1 / π

Wynik

warunek Neumanna dla funkcji
kształtu Hermite'a



umiarkowany sukces

pochodna jak trzeba
ale wartość całkiem nie taka

co jest nie tak?

macierz sztywności pojedynczego elementu

warunek Neumana dla funkcji
kształtu Hilberta

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[-\frac{df_i}{d\xi} \frac{df_j}{d\xi} \right] d\xi$$

Przypomnijmy sobie skąd się wzięła

$$(Lu, v) = (f, v) \quad L = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$(Lu, v) = \frac{du}{dx} v(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

w metodzie Galerkina $v(x)$ jest funkcją bazową.

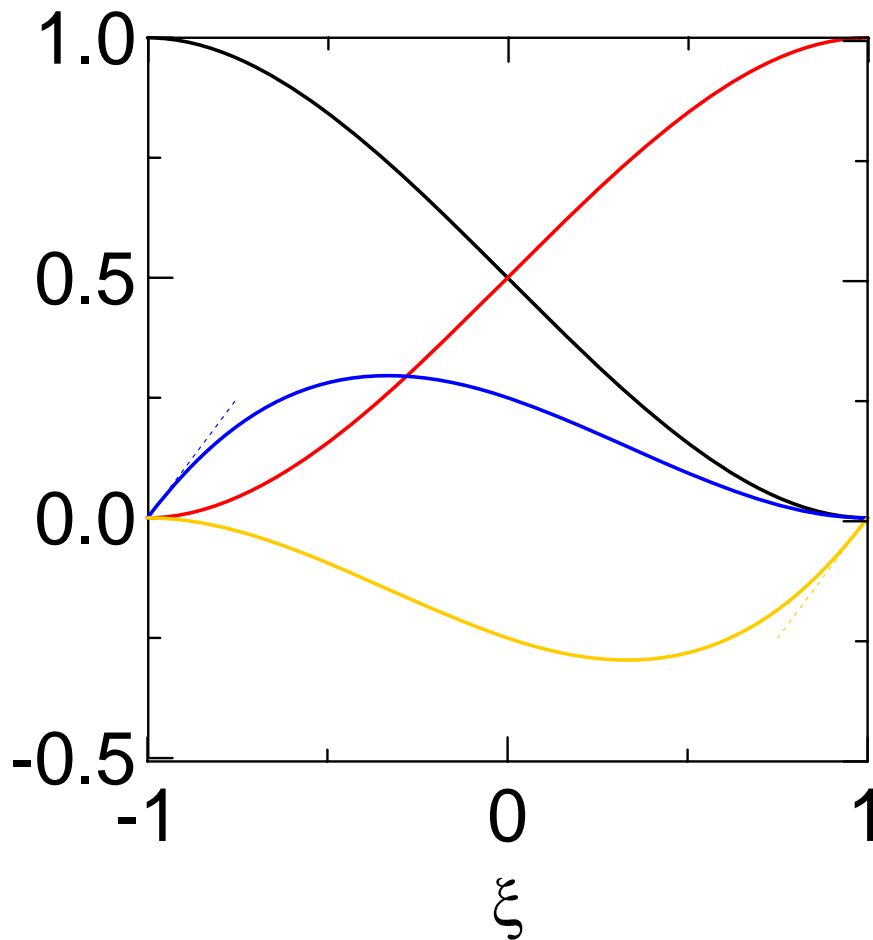
dla warunków Dirichleta $u(1)=u(-1)=0$

usuwalimy z bazy funkcje, które nie znikają na prawym brzegu. $v(x)=0$

Teraz mamy **parę** funkcji dla których wyraz nie znika. Jaka?

$$u(\xi) = \underbrace{u_1^0 \phi_1^0(\xi)} + u_1^1 \underbrace{\phi_1^1(\xi)} + u_2^0 \underbrace{\phi_2^0(\xi)} + u_2^1 \underbrace{\phi_2^1(\xi)}$$

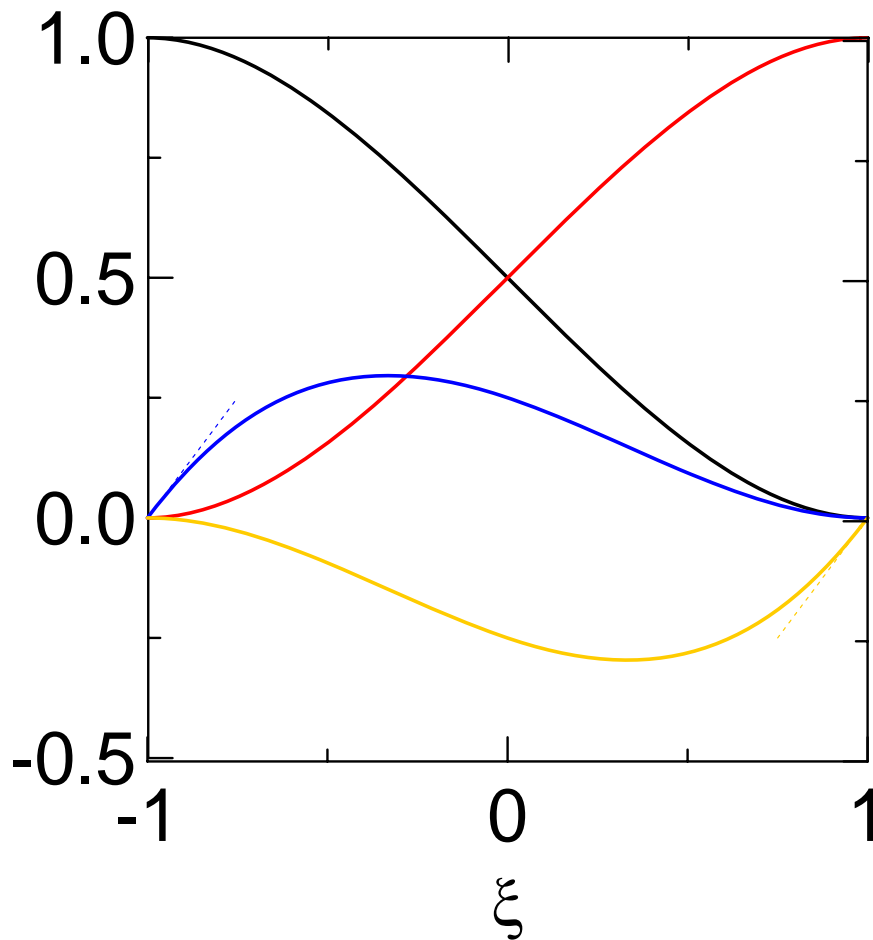
$$(Lu, v) = \left. \frac{du}{dx} v(x) \right|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$



Teraz mamy **parę** funkcji,
dla których wyraz nie znika. **Jaka?**

$$u(\xi) = u_1^0 \underline{\phi_1^0(\xi)} + u_1^1 \underline{\phi_1^1(\xi)} + u_2^0 \underline{\phi_2^0(\xi)} + u_2^1 \underline{\phi_2^1(\xi)}$$

$$(Lu, v) = \left. \frac{du}{dx} v(x) \right|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$



Teraz mamy **parę** funkcji,
dla których wyraz nie znika. **Jaka?**

$$\underline{\phi_2^0}, \underline{\phi_2^1}$$

no i co?

warunek Neumana dla funkcji
kształtu Hermita

$$(Lu, v) = \frac{du}{dx}v(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

$$u(x) = \sum_j c_j \phi_j(x)$$

to trzeba dodać

to już mamy

$$S_{ij} = (L\phi_i, \phi_j) = \frac{d\phi_i}{dx} \phi_j(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{d\phi_i}{dx} \frac{d\phi_j}{dx} dx$$

$$S = \begin{pmatrix} E_{11}^1 & E_{12}^1 & E_{13}^1 & E_{14}^1 & 0 & 0 \\ E_{21}^1 & E_{22}^1 & E_{23}^1 & E_{24}^1 & 0 & 0 \\ E_{31}^1 & E_{32}^1 & E_{33}^1 + E_{11}^2 & E_{34}^1 + E_{12}^2 & E_{13}^2 & E_{13}^2 \\ E_{41}^1 & E_{42}^1 & E_{43}^1 + E_{21}^2 & E_{44}^1 + E_{22}^2 & E_{23}^2 & E_{23}^2 \\ 0 & 0 & E_{31}^2 & E_{32}^2 & E_{33}^2 & E_{34}^2 \\ 0 & 0 & E_{41}^2 & E_{42}^2 & E_{43}^2 & E_{44}^2 \end{pmatrix}$$

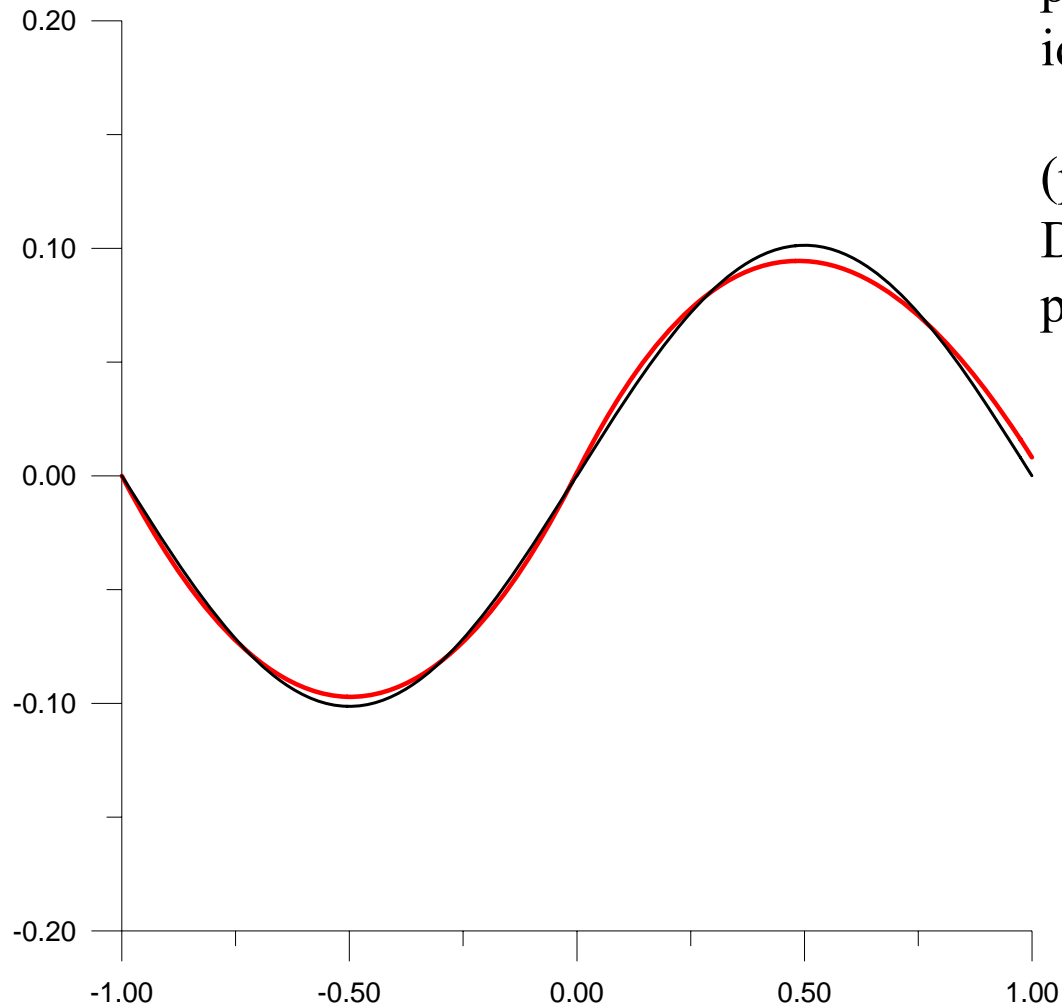
$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[-\frac{df_i}{d\xi} \frac{df_j}{d\xi} \right] d\xi$$

$$S_{56} = S_{56} + 1$$

Wynik: prawy warunek brzegowy Neumanna: 2 elementy

Znacznie lepiej
prawie dobrze, pochodna
idealnie, wartość nie

(poprzednio – przy warunkach
Dirichleta – wartość była super
pochodna taka sobie)



2 elementy
gdy więcej?

Wynik: prawy warunek brzegowy Neumanna

