

Metoda różnic skończonych dla cząstkowych równań różniczkowych

na laboratorium rozwiązywać będziemy typowe równania:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \quad \begin{array}{l} \text{dyfuzji (również przewodnictwo ciepłe)} \\ \text{paraboliczne} \end{array}$$

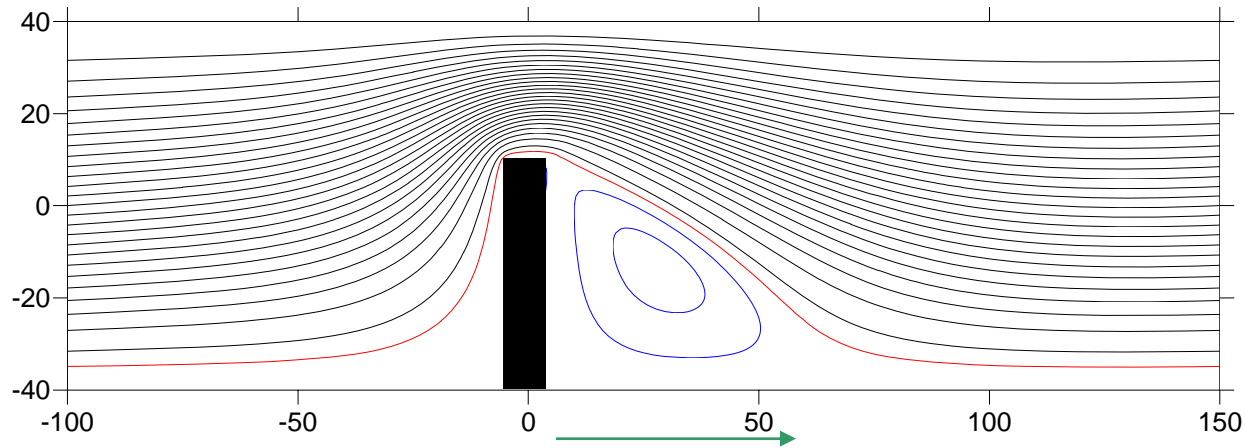
$$\nabla^2 u = f \quad \begin{array}{l} \text{równanie Poissona (np. pole elektrostatyczne,} \\ \text{rozkład temperatury w stanie ustalonym, eliptyczne)} \end{array}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u \quad \begin{array}{l} \text{równanie falowe (mechanika, elektrodynamika,} \\ \text{hiperboliczne)} \end{array}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{V}u) \quad \begin{array}{l} \text{adwekcji (unoszenia wielkości skalarnej} \\ \text{u przez pole wektorowe } \mathbf{V}) \\ \text{w 1D nazywane równaniem falowym 1 rzędu} \end{array}$$

Równanie adwekcji (najprostsze cząstkowe zależne od czasu - posłuży do wprowadzenia analizy rozwiązań numerycznych równań cząstkowych)

linie strumienia ($\psi = \text{const}$) dla cieczy lepkiej, nieściśliwej



rozwiązania równań
Naviera-Stokesa
(czeka nas laboratorium
i wykład na ten temat)

gradient ciśnienia i kierunek przepływu

(u, v)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

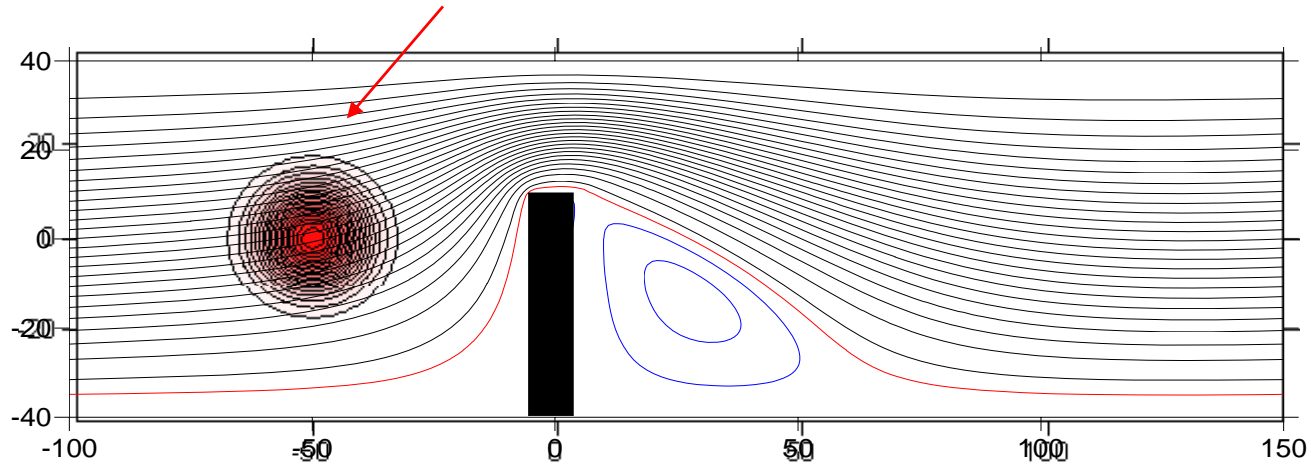
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

im gęściej poziomice ψ w y
tym większa szybkość w x

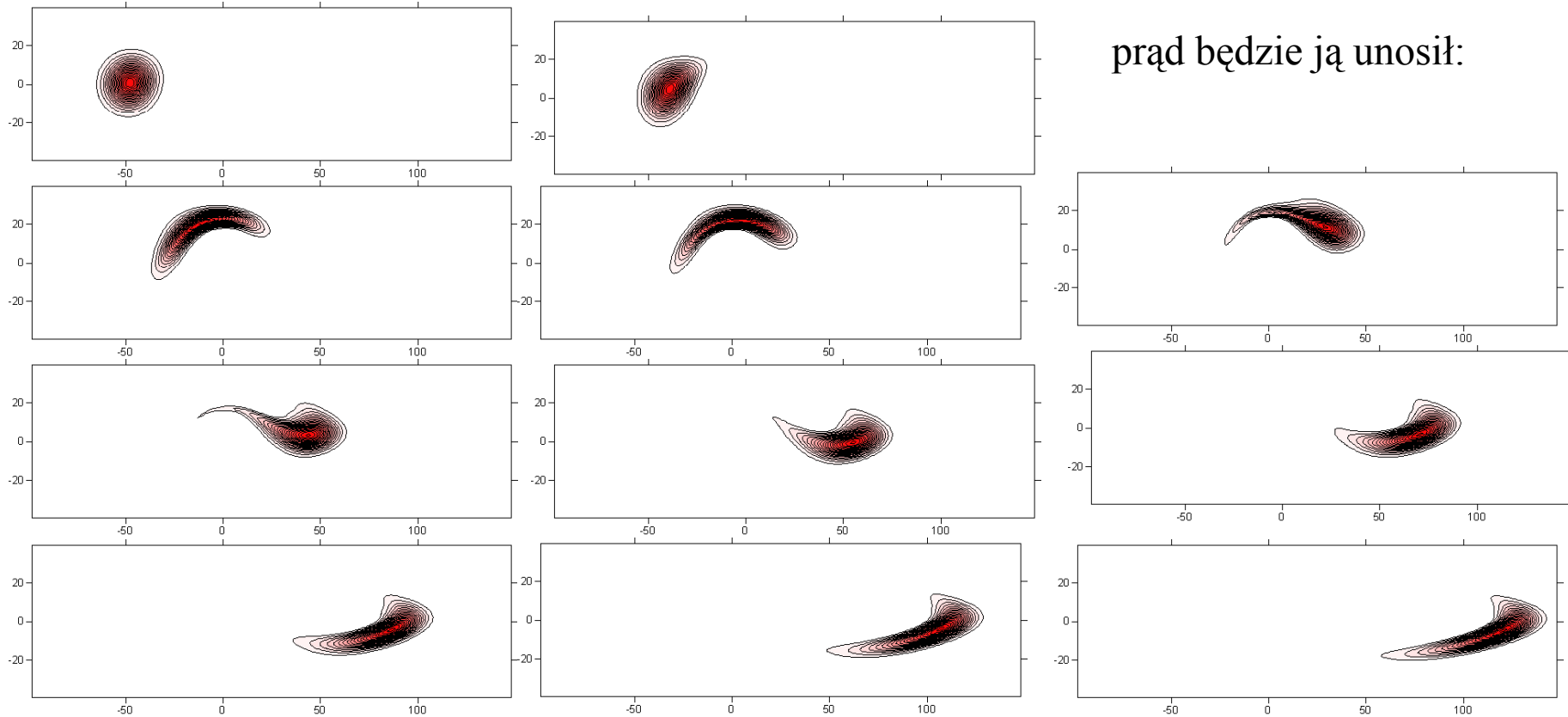
lepka: na brzegach prędkość znika,
a nieściśliwa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

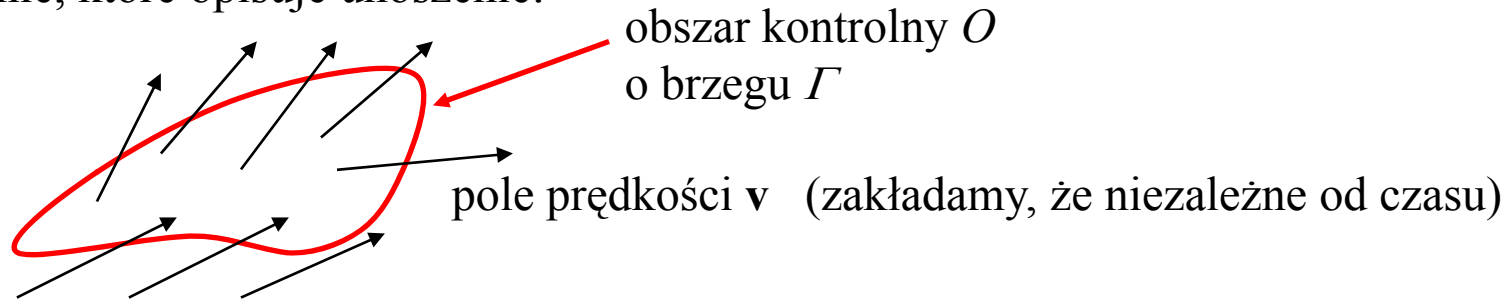
rozlana plama z oleju



prąd będzie ją unosił:



Równanie, które opisuje unoszenie:



zasada zachowania masy

$$\frac{d}{dt} \int_O d^3r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = - \int_{\Gamma} d^2r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

minus: bo w całce powierzchniowej
mnożymy całkowany wektor skalarnie
z normalnym do powierzchni (wychodzącym
z powierzchni)

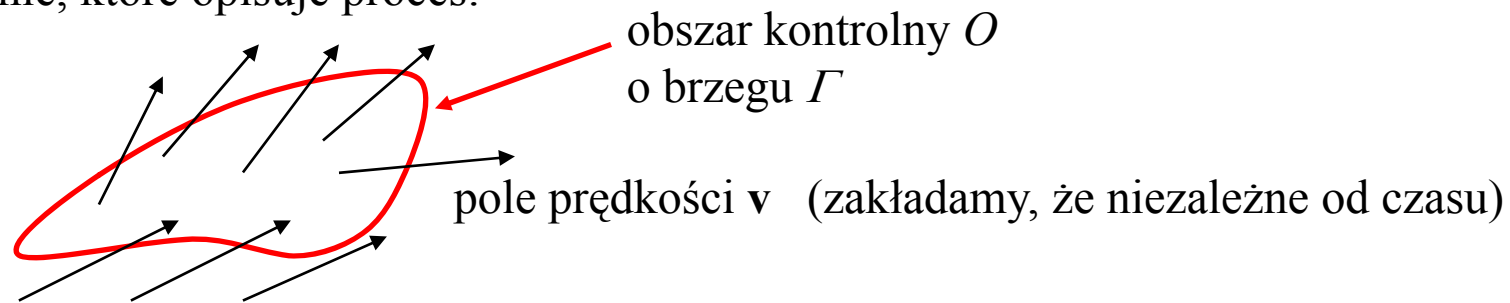
twierdzenie Gaussa:

$$\int_{\Gamma} d^2r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_O d^3r \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0$$

równanie adwekcji:
opisuje unoszenie wielkości
skalarnej przez stacjonarne
pole wektorowe

Równanie, które opisuje proces:



zasada zachowania masy

$$\frac{d}{dt} \int_O d^3r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = - \int_{\Gamma} d^2r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0$$

wersja 1D:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t) v(x)] = 0$$

1D: prawo zachowania jako równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t)v(x)] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \cancel{\rho \frac{\partial v}{\partial x}} = 0$$

zajmiemy się problemem modelowym, w którym $v = \text{const}$
(np. jednowymiarowy przepływ cieczy nieściśliwej), stąd skreślenie powyżej

$$u \equiv \rho \quad \longrightarrow \quad u_t + u_x = 0$$

$v=1:$

chcemy wprowadzić pojęcie *charakterystyki równania*: linia $x(t)$, taka, że $u(x(t), t) = \text{const}$

różniczka zupełna: $du = u_t dt + u_x dx = (u_t + u_x dx/dt) dt$

gdy $dx/dt = 1$,

z równania adwekcji mamy $du = 0 dt$

czyli: u spełniające równanie adwekcji jest stałe
na charakterystykach $x = t + c$



czyli:

$$u(x, t) = f(x - t)$$

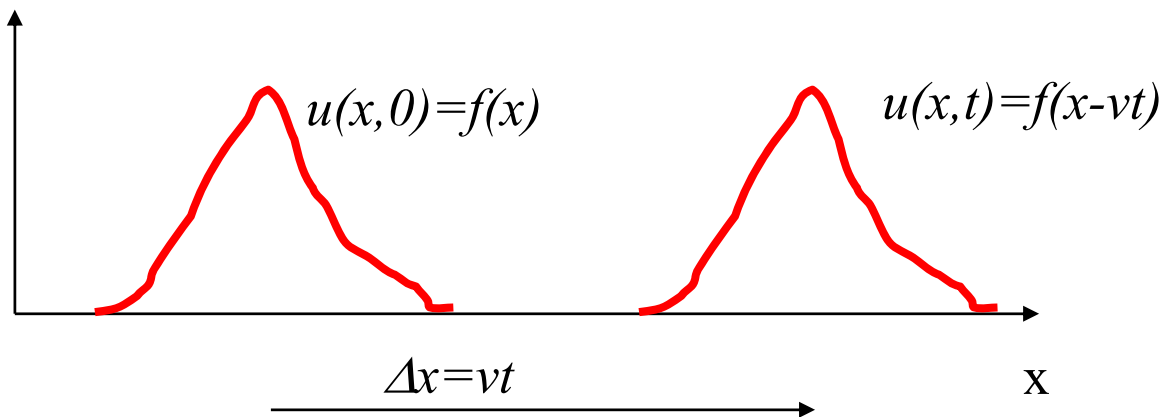
sprawdzić, że

$$u(x,t) = f(x-t)$$

(rozwiązanie d'Alamberta)

spełnia: $u_t + u_x = 0$

(warunek początkowy „unoszony” z prędkością v bez zmiany kształtu)



równanie adwekcji 1D: $u_t + vu_x = 0$

ośrodek nieskończony, warunek początkowy: $u(x, 0) = \phi(x)$

rozwiązanie dokładne: $u(x, t) = \phi(x - vt)$

równanie adwekcji 1D: $u_t + vu_x = 0$

ośrodek nieskończony, warunek początkowy: $u(x, 0) = \phi(x)$

rozwiązanie dokładne: $u(x, t) = \phi(x - vt)$

Po cóż rozwiązywać numeryczne skoro rozwiązanie analityczne jest tak proste?

1) Numeryczne potrzebne, gdy pole prędkości nieznane (zmiennie, będące wynikiem pomiarów lub innych rachunków).

2) Czynniki adwekcyjny (konwekcyjny) ważny w bardziej złożonych problemach transportu masy / ciepła.

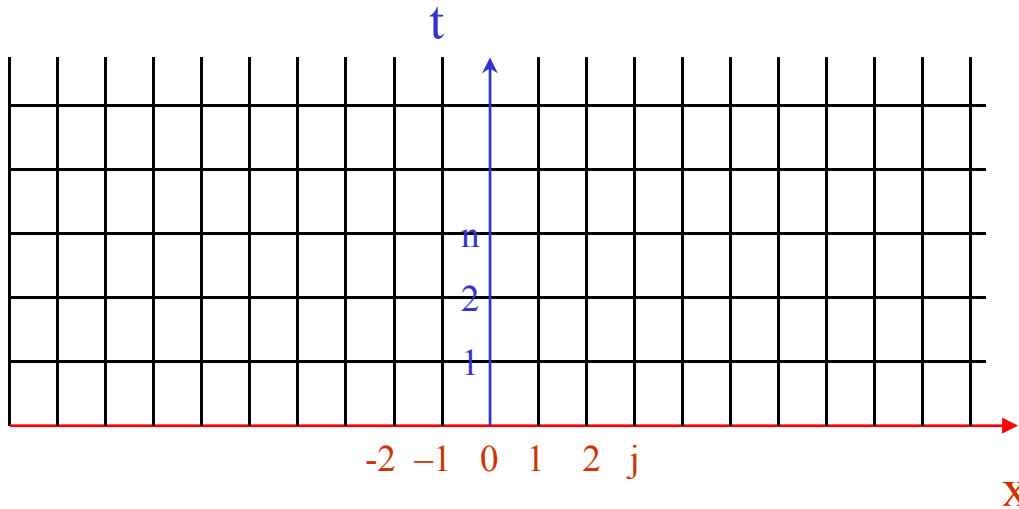
W równaniach adwekcji-dyfuzji adwekcja jest kłopotliwa numerycznie: często okazuje się „wąskim gardłem” rachunku.

3) Jest to najprostsze z równań cząstkowych:

posłuży do wprowadzenia analizy numerycznej równań cząstkowych schematy jawne/niejawne, analiza stabilności, dyfuzja i dyspersja numeryczna

$$u_t + v u_x = 0 \quad u(x, t) = \phi(x - vt)$$

metoda różnic skończonych



poszukujemy rozwiązania na siatce o stałych krokach Δx i Δt .

rozwiązanie dokładne

$$u_j^n \equiv u(j\Delta x, n\Delta t)$$

rozwiązanie metody różnic skończonych

$$U_j^n \simeq u_j^n$$

Nasze równanie dotyczy ośrodka nieskończonego.

W rachunkach numerycznych na siatce pudło obliczeniowe ma skończony rozmiar:

- 1) wystarczający duży aby w interesującym nas czasie pakiet nie doszedł do końca
- 2) lub okresowe warunki brzegowe

$$u_j^n \equiv u(j\Delta x, n\Delta t)$$

$$U_j^n \simeq u_j^n$$

równania różnicowe na U : z rozwinięcia Taylora

związek wartość funkcji u w punkcie $j+1$ oraz pochodnych z punktu sąsiedniego j , ta sama chwila czasowa

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)_j^n \Delta x^k + \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1}}\right)_{j+\xi}^n \Delta x^{k+1}$$

zatrzymajmy dwa pierwsze wyrazy

i wyliczmy pochodną u po x w punkcie j (przedni iloraz różnicowy.)

$\xi \in (0,1)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{1}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n \Delta x \quad \longrightarrow \quad (U_x)_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}$$

jeśli rozwiniemy u_{j-1} w j dostaniemy wsteczny iloraz różnicowy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j-1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} (u_{xx})_{j-\eta}^n \Delta x \quad \longrightarrow \quad (U_x)_j^n = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}$$

na czerwono: błędy dyskretyzacji wzorów po prawej

iloraz centralny:

$$(U_x)_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{z błędem dyskretyzacji}$$

$$\tau_j^n = -\frac{1}{6} (u_{xxx})_{j+\xi}^n \Delta x^2$$

↖
z (-1,1)

podobnie skonstruujemy przybliżone wyrażenia na przedni czasowy iloraz różnicowy:

$$(U_t)_j^n = \frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} \quad \text{z błędem dyskretyzacji:} \quad \tau_j^n = -\frac{1}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} \Delta t$$

z(0,1)
↓

$$u_t + v u_x = 0$$

najprostszy wybór: czasowa i przestrzenna pochodna zastąpione
przednim ilorazem różnicowym

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{1}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n \Delta x$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = \underbrace{(u_t)_j^n + v(u_x)_j^n}_{\text{}} + \frac{\Delta t}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} + v \frac{\Delta x}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n$$

$$u_t + v u_x = 0$$

najprostszy wybór: czasowa i przestrzenna pochodna zastąpione
przednim ilorazem różnicowym

dla rozwiązania dokładnego u :

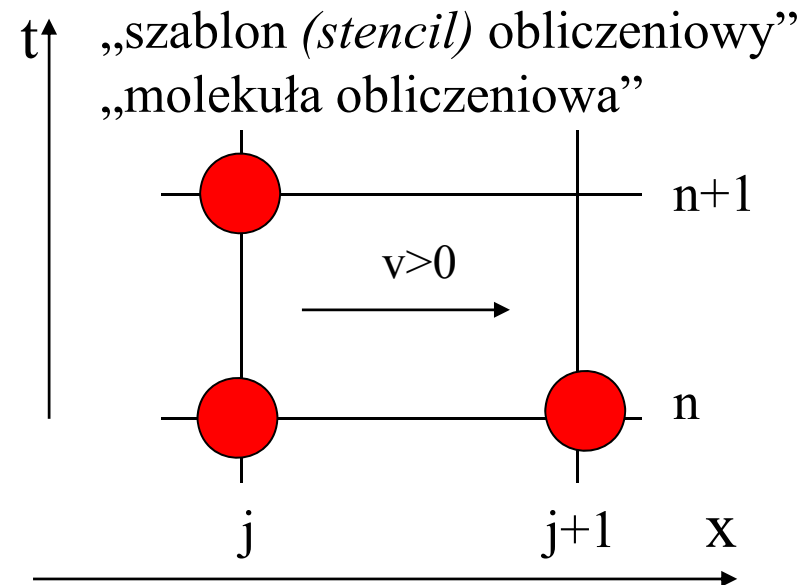
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = (u_t)_j^n + v(u_x)_j^n + \frac{\Delta t}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} + v \frac{\Delta x}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n$$

dla rozwiązania przybliżonego U :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0$$

liczba Courant'a $\alpha = \frac{v \Delta t}{\Delta x}$

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



dla $v > 0$: nasz schemat nazywa się *downwind*

$$u_t + vu_x = 0$$

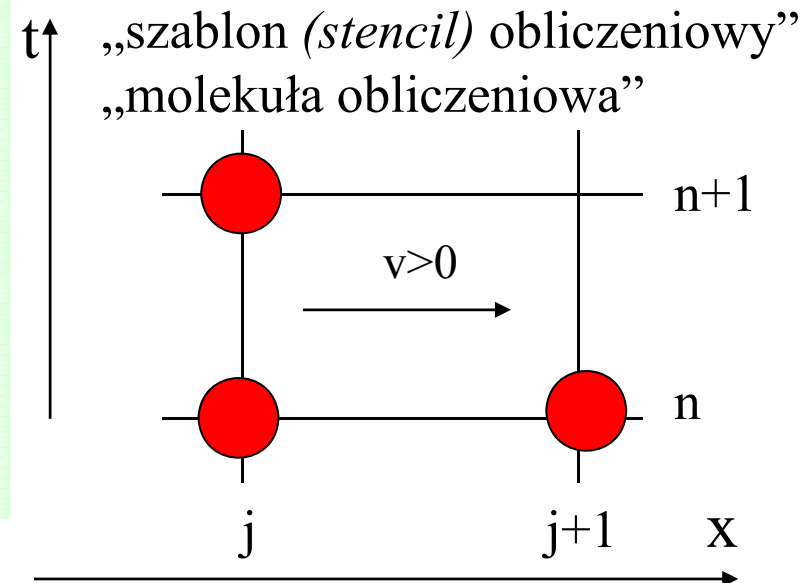
$$\alpha = \frac{vdt}{dx}$$

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha)U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

czy schemat *downwind* nadaje się do rozwiązania naszego równania ?

odpowiedzi możemy poszukać w testach, ale

zanim przejdziemy do rachunków zastanówmy się nad granicą małych kroków



schemat jest *spójnym przybliżeniem* równania różniczkowego jeśli jego przepis w granicy zerowych kroków czasowych dąży do tego równania różniczkowego (a nie innego)

spójność definiowana wg. błędu dyskretyzacji:

metoda **spójna** jeśli:

błędy dyskretyzacji czasowy i przestrzenny rzędu co najmniej pierwszego:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = \cancel{(u_t)_j^n + v(u_x)_j^n} + \frac{\Delta t}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} + v \frac{\Delta x}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n$$

błąd dyskretyzacji

schemat jest spójnym przybliżeniem równania różniczkowa jeśli jego przepis w granicy zerowych kroków czasowych dąży do równania różniczkowego

spójność definiowana wg. błędu dyskretyzacji:

nasza metoda: minimalnej akceptowalnej dokładności

mówimy, że metoda **spójna** jeśli:

błędy dyskretyzacji czasowy i przestrzenny rzędu co najmniej pierwszego:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = \cancel{(u_t)_j^n + v(u_x)_j^n} + \frac{\Delta t}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} + v \frac{\Delta x}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n$$

błąd dyskretyzacji

często wygodniej używać: błędu lokalnego (obcięcia)

zamiast równania: przepis w formie podstawienia

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x)$$

błąd dyskretyzacji: popełniany przy szacowaniu pochodnych u

błąd lokalny: popełniany przy szacowaniu u

błąd lokalny: przestrzenny błąd lokalny takiego rzędu jak błąd dyskretyzacji
czasowy błąd lokalny: jeden rząd wyżej niż błąd dyskretyzacji

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x)$$

błąd lokalny: czasowy rzędu Δt^2 , przestrzenny rzędu Δx

w RRZ: widzieliśmy, że błąd się akumuluje w czasie
ale nie w przestrzeni

dla RRZ akceptowalny rząd błędu lokalnego był drugi, lub wyższy
możemy przypuszczać, że nasz schemat ma szanse być zbieżny

metoda *downwind*: minimalnej akceptowalnej dokładności

metoda **spójna** jeśli:

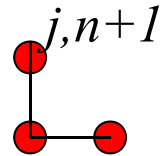
lokalny błąd czasowy rzędu co najmniej 2

a lokalny przestrzenny rzędu co najmniej 1

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

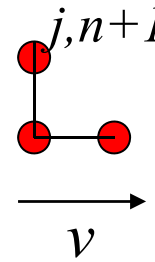


dla $v > 0$
tzw. downwind

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$



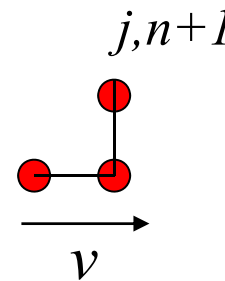
dla $v > 0$
tzw. *downwind*

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$



dla $v > 0$
tzw. *upwind*

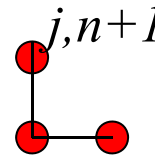
downwind - zbiera informacje z wiatrem

upwind – informacje zbiera pod wiatr

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$



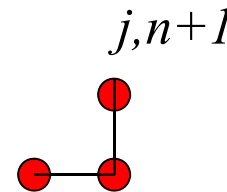
dla $v > 0$
tzw. *downwind*

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$



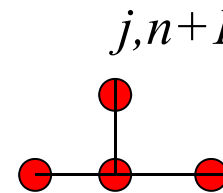
dla $v > 0$
tzw. *upwind*

przedni iloraz czasowy, centralny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x^2)$



jak się sprawdzają?

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha)U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

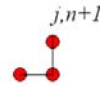
błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$



dla $v > 0$
tzw. *downwind*

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



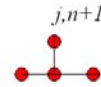
dla $v > 0$
tzw. *upwind*

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha)U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

przedni iloraz czasowy, centralny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



błąd lokalny: $O(\Delta t^2), O(\Delta x^2)$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

jak się sprawdzają?

jak się sprawdzają w praktyce?

ten sam błąd czasowy,

przestrzenny: centralny $O(\Delta x^2)$, wsteczny i przedni $O(\Delta x)$

wydawać się może

1) że centralny zawsze lepszy niż pozostałe

2) że *upwind* i *downwind* równie dobre

okazuje się, że te pozornie podobne metody działają w skrajnie różny sposób
a lokalnie najdokładniejsza, wcale nie jest najbardziej użyteczna

...

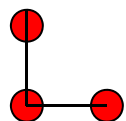
zobaczymy ...

rachunek numeryczny: $v=1$

$\Delta t=1/20, \Delta x=1/10, \alpha=1/2$

warunek początkowy $\phi(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

	$n \rightarrow$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
rozwiązanie	5	-0.650	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000
dokładne	4	-0.600	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000
(ruch konika szachowego	3	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000
dwa do góry jeden w prawo):	2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000	0.000
	0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

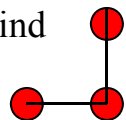


downwind

5	-0.647	-0.591	-0.253	-0.759	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-0.600	-0.506	-0.338	-0.506	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	-0.550	-0.450	-0.338	-0.338	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.225	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

$U_j^{n+1} = (1 + \alpha)U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$ po lewej stronie: nawet nieźle, niestety pakiet nie przechodzi na stronę $x>0$
niepokojące zachowanie dla $j=-1$

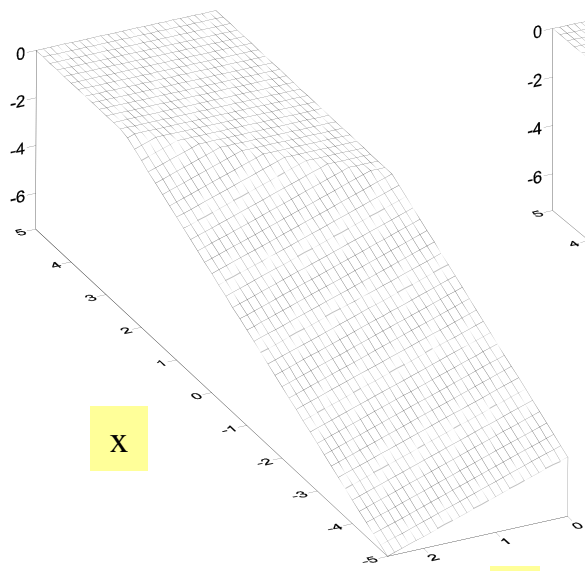
upwind



wygląda rozsądnie

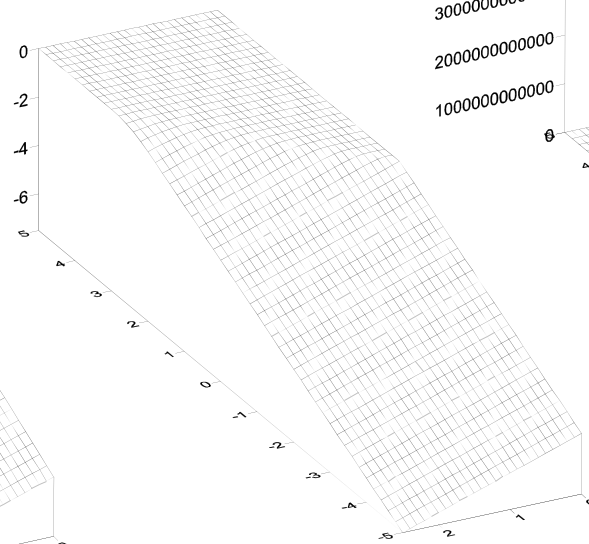
5	-0.650	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.153	-0.072	-0.022	-0.003
4	-0.600	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.106	-0.038	-0.006	0.000
3	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.063	-0.013	0.000	0.000
2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	-0.025	0.000	0.000	0.000
1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000	0.000
0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

dokładny



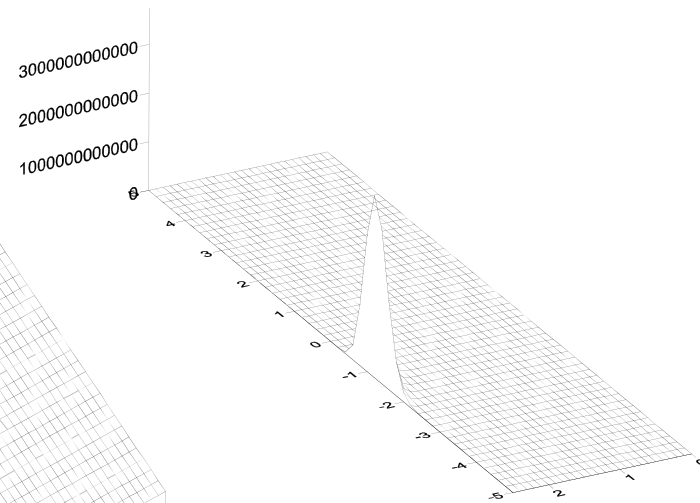
x

upwind



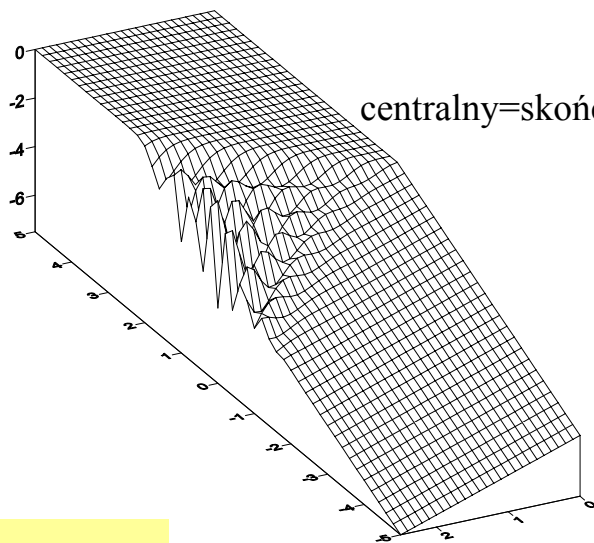
t

downwind



niestabilny ☹️

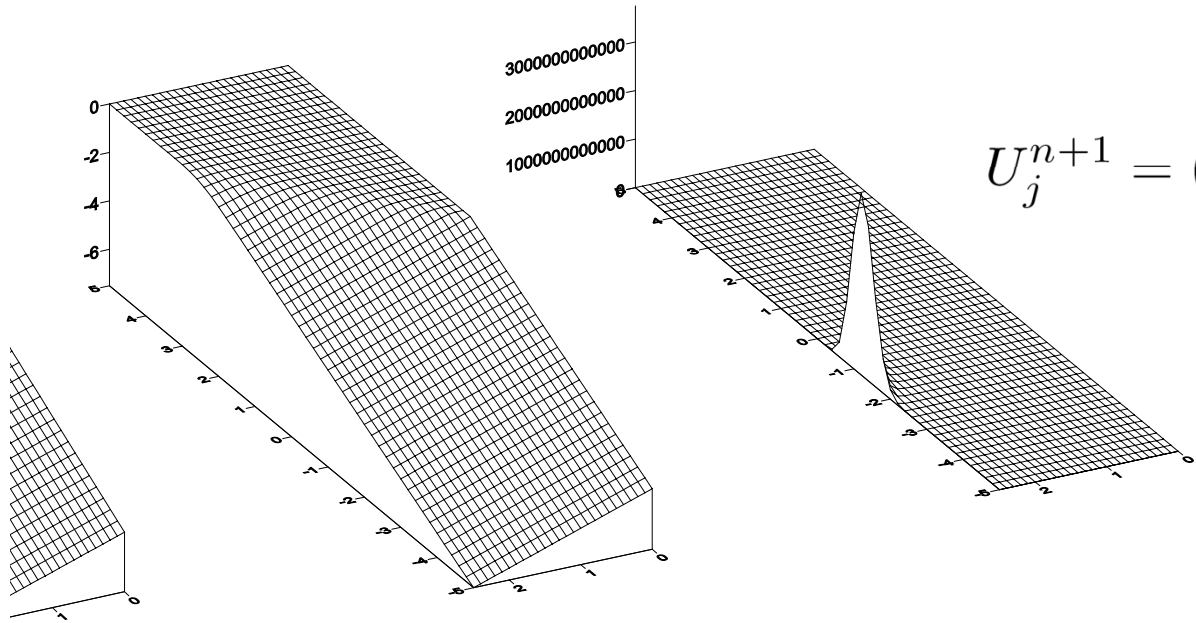
centralny=skończy się eksplozją!



$\Delta t=1/20, \Delta x=1/10, \alpha=1/2$

upwind

downwind



$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

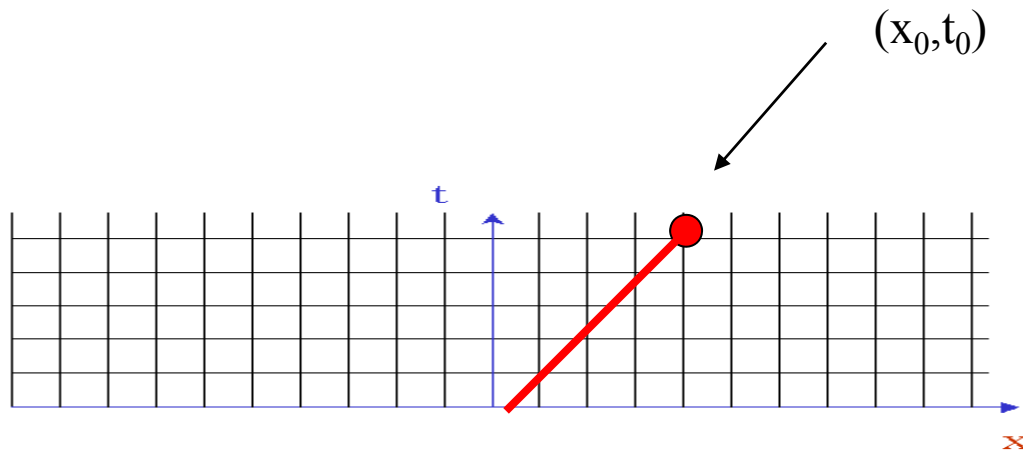
$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

podobne formuły, dlaczego tak różne działanie?

domena zależności: dla punktu (x_0, t_0) zbiór wszystkich punktów które mają wpływ na wartość rozwiązania w $u(x_0, t_0)$

domena zależności: dla równania adwekcji

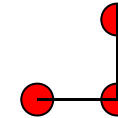
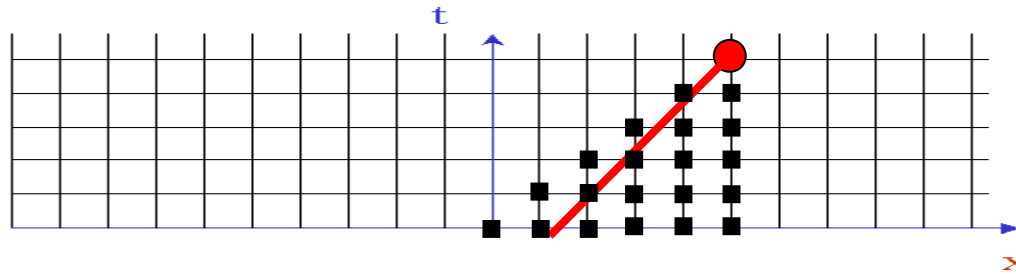
$$u_t + v u_x = 0 \quad v=1$$



domena zależności to charakterystyka równania adwekcji
dana formułą $t=x+C$ z $C=t_0-x_0$

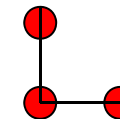
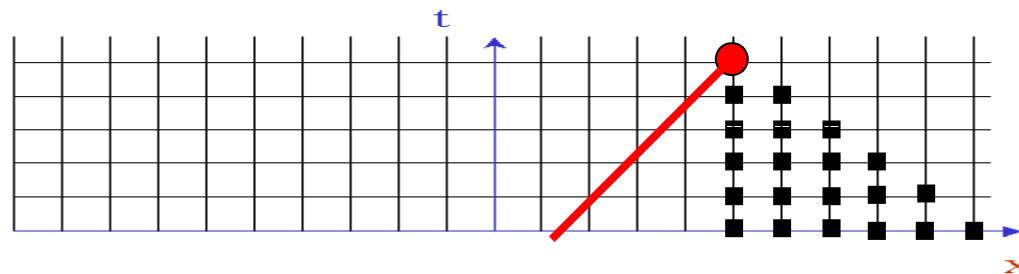
numeryczna domena zależności punktu (j_0, n_0)
zbiór oczek siatki, które mają wpływ na rozwiązanie w tym punkcie

pod wiatr



domena numeryczna zawiera w sobie
dokładną domenę zależności

z wiatrem



schemat *downwind* zbiera informacje z kierunku przeciwnego
niż dokładny

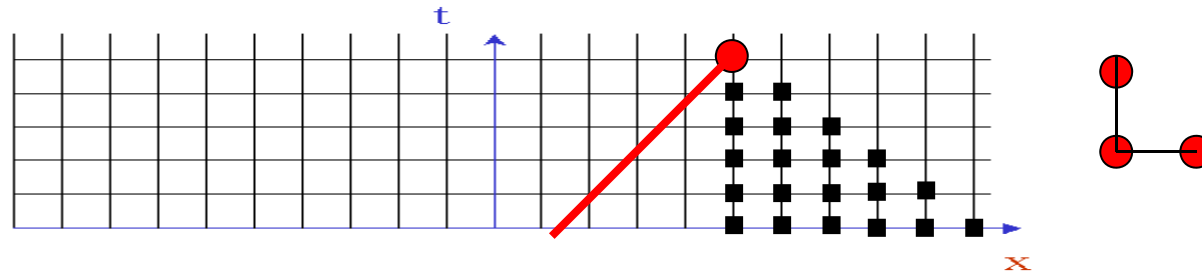
nie może dać dobrego wyniku bo: warunek początkowy nie ma
żadnego wpływu na rezultat

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w $0 < t < T$ jeśli:

$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$

$\|*\|$ - norma wektora

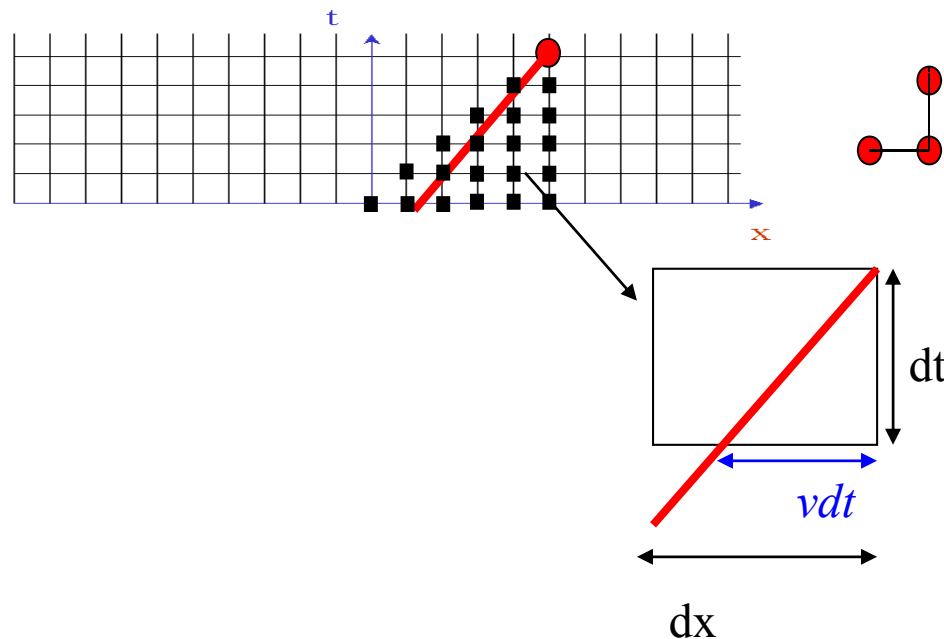
z wiatrem



zagęszczanie siatki w dx i dt nie zmieni faktu, że numeryczna domena zależności obejmuje prawy trójkąt zamiast lewej prostej

tw. Courant-Friedrich-Lewy:
 warunkiem koniecznym zbieżności schematu różnicowego
 (dla dowolnego warunku początkowego) jest aby jego numeryczna domena zależności
 zawierała w sobie (fizyczną) domenę zależności równania różniczkowego.

zagęszczanie siatki nie pomoże jeśli domena fizyczna pozostaje na zewnątrz numerycznej



upwind: spełnia warunkowo tw. CFL:
 numeryczna dom.zal. zawiera fizyczną
 jeśli: $vdt \leq dx \rightarrow \alpha \leq 1$

skok siatki przestrzennej nakłada ograniczenie na skok siatki czasowej

uwaga: jeśli ustalimy Δt a zagęszczać będziemy siatkę w x : grozi nam złamanie kryt. CFL

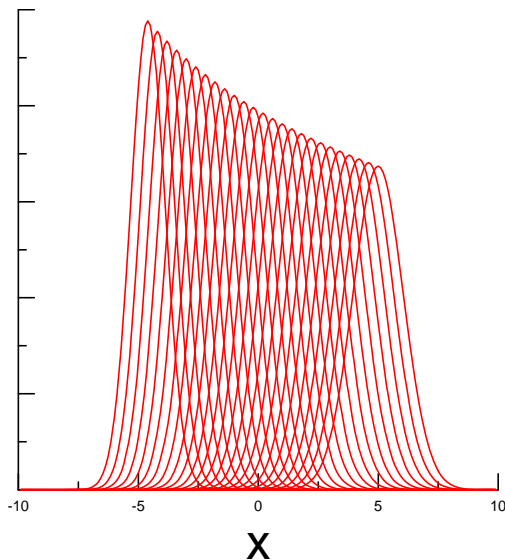
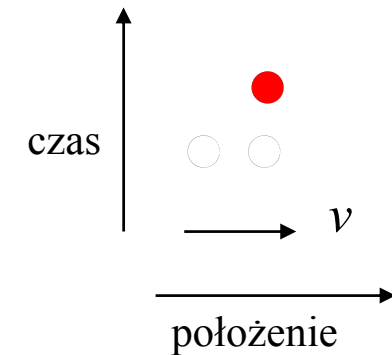
upwind spełnia kryterium CFL gdy : $0 \leq \alpha \leq 1$ ($v > 0$)
 downwind gdy ($v < 0$) : $-1 \leq \alpha \leq 0$

Schemat *upwind*: wyniki numeryczne

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(j, n + 1) = -v \Delta t \frac{u(j, n) - u(j - 1, n)}{\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x)$$

równanie adwekcji
schemat pod wiatr



$\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.04$
upwind $\alpha = 0.4$

bez eksplozji ale pakiet się rozplywa = dyfuzja numeryczna
(w dokładnym rozwiązaniu pakiet zachowuje kształt)

spójność, zbieżność, stabilność (podstawowe pojęcia dla problemów zależnych od czasu)

spójność implikuje, że równanie różnicowe jest „dobrym” przybliżeniem równania różniczkowego

zbieżność: że rozwiązanie dokładne w granicy zerowego kroku czasowego / przestrzennego

stabilność: że rozwiązanie numeryczne nie jest zbyt czułe na zaburzenia (np. warunku początkowego)

dobry schemat ma być spójny, stabilny i zbieżny

związek między tymi pojęciami określa: **twierdzenie o ekwiwalencji Laxa**

(odpowiednik tw. Dahlquist dla równań zwyczajnych)



mamy liniowe równanie różniczkowe i jego spójne przybliżenie różnicowe:
warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności jest stabilność schematu

jaka stąd nauka?

np. upwind nie może być zbieżny dla $\alpha > 1$ (CFL)

jest spójny, musi więc być niestabilny dla $\alpha > 1$

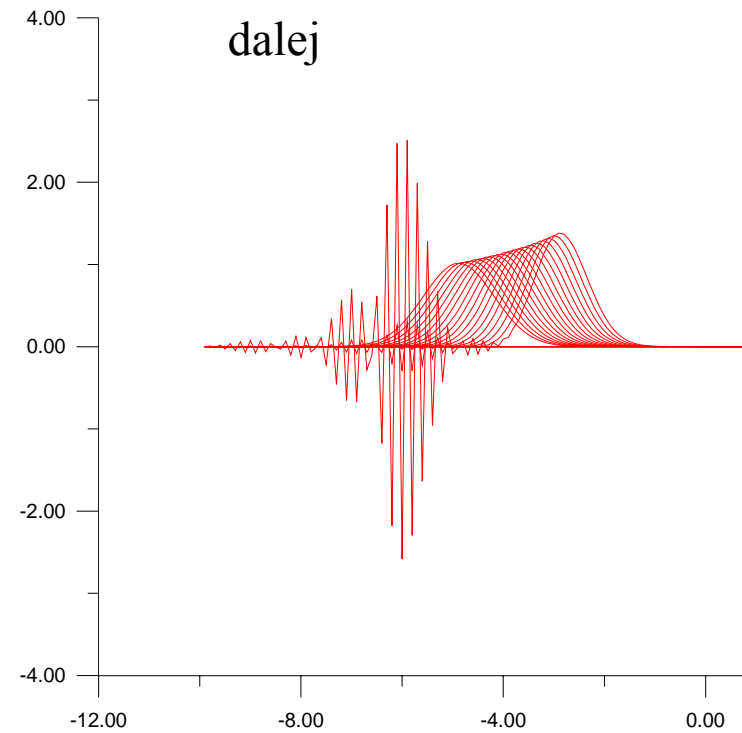
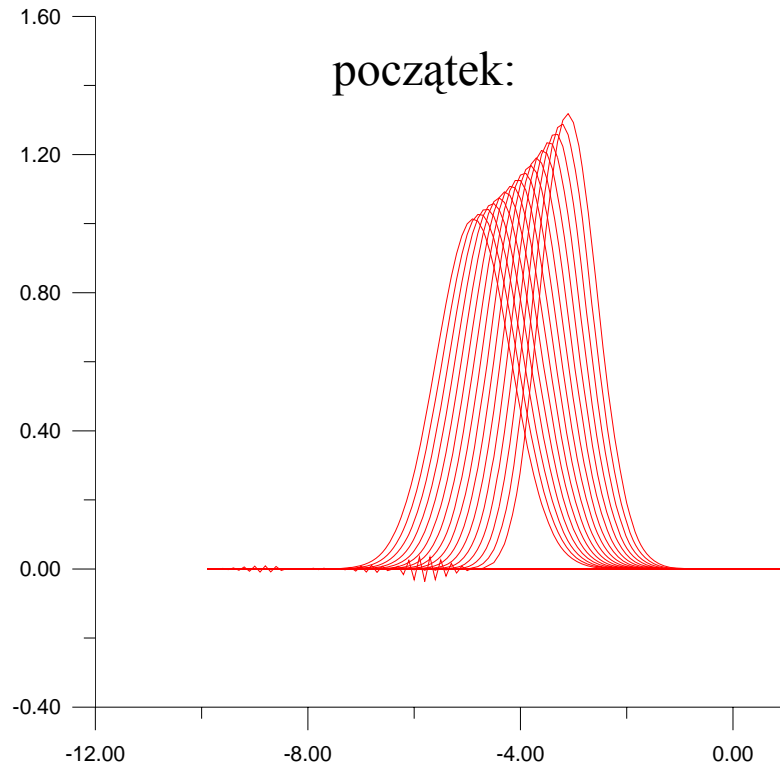
stąd CFL - w zasadzie WK zbieżności, często używane jest jako WK stabilności

upwind $\alpha=1.1$
 $dx=0.1$
 $vdt=.11$

jaka stąd nauka?

np. upwind nie może być zbieżny dla $\alpha>1$ (CFL)

jest spójny, musi być więc niestabilny dla $\alpha>1$
stąd użycie CFL jak kryterium stabilności



definicji zbieżności

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w $0 < t < T$ jeśli:

$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$

norma: przyporządkowanie wektor \rightarrow skalar

- 1) dodatnio określone $\|\mathbf{u}\| \geq 0$, $\|\mathbf{u}\| = 0$, jeśli \mathbf{u} – wektor zerowy
- 2) rozłączne z mnożeniem przez skalar $\|a\mathbf{u}\| = |a| \|\mathbf{u}\|$
- 3) spełniające nierówność trójkąta $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

norma max:

$$\|\mathbf{U}^n\|_{\infty} \equiv \max_j |U_j^n|,$$

norma euklidesowa (długość wektora):

$$\|\mathbf{U}^n\|_2 \equiv \left[\sum_j (U_j^n)^2 \right]^{1/2}.$$

Upwind: wiemy, że spójny

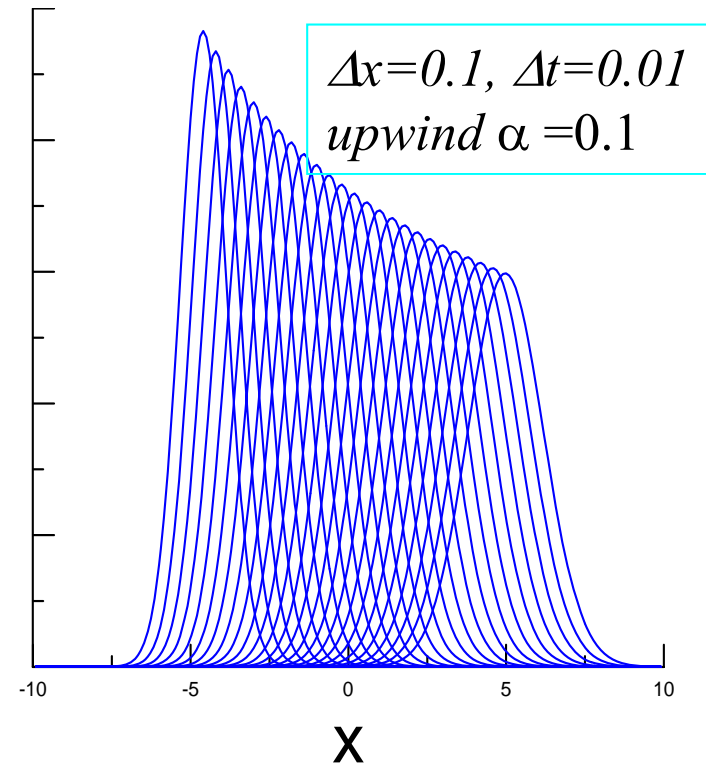
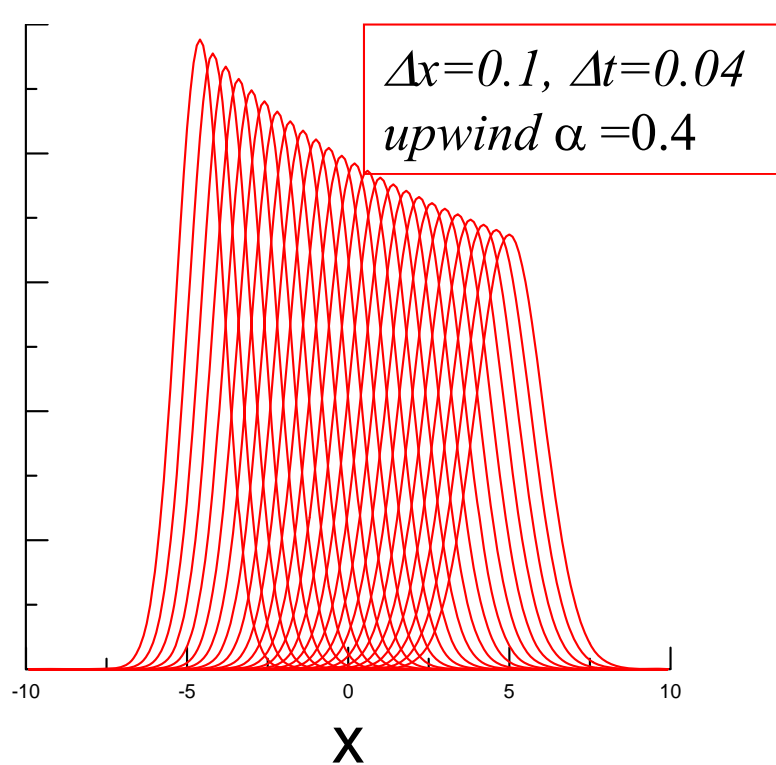
wiemy, że dla $\alpha > 1$ niezbieżny, więc niestabilny

czy zbieżny dla $\alpha \leq 1$? jeśli zbieżny to stabilny
czy stabilny dla $\alpha \leq 1$? jeśli stabilny to zbieżny

sprawdźmy doświadczalnie czy zbieżny

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w $0 < t < T$ jeśli:

$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$



zmniejszamy krok czasowy, wynik równie zły!

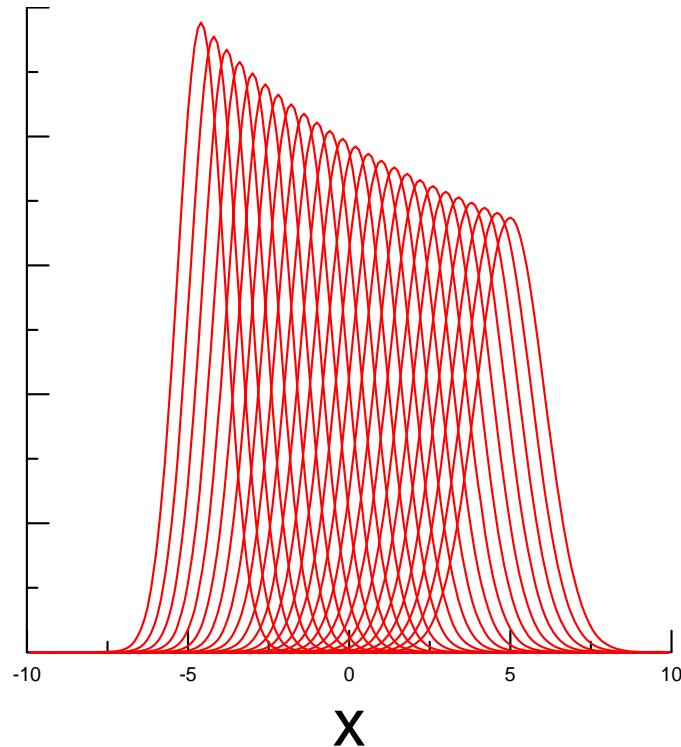
[zobaczymy, że dla upwind współczynnik dyfuzji numerycznej proporcjonalny jest do Δx i niezależny od Δt]

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w $0 < t < T$ jeśli:

$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$

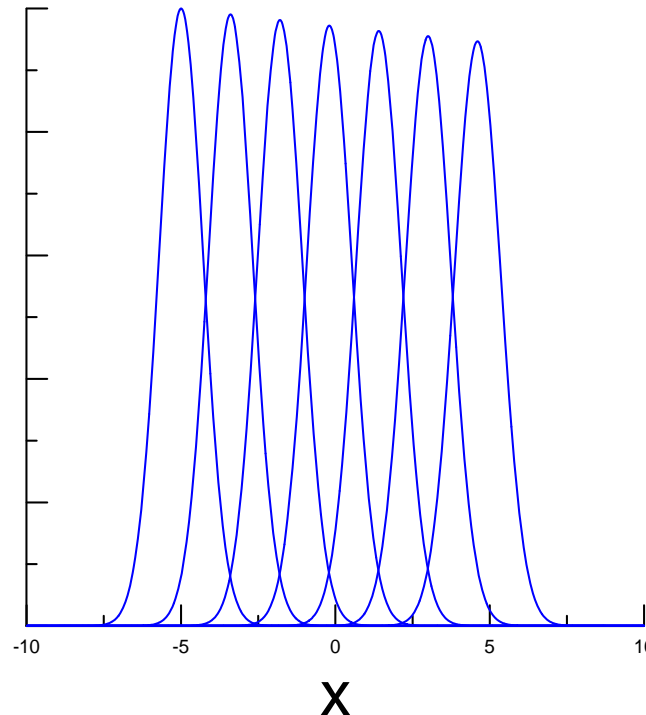
$$\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.04$$

upwind $\alpha = 0.4$



$$\Delta x = 0.01, \Delta t = 0.004$$

upwind $\alpha = 0.4$



zbieżność dla równań cząstkowych: Δt do zera, **ale również Δx do zera**
zmniejszenie tylko jednego z kroków **nie** gwarantuje poprawy

wniosek: upwind wygląda na zbieżny

aby podać ścisły dowód – zamiast eksperymentów numerycznych – wykazać stabilność

ku definicji stabilności

rozwiązanie w chwili n
w całej przestrzeni możemy przedstawić jako wektor

$$\mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_N^n \end{pmatrix}$$

powiedzmy, że równanie różniczkowe jest liniowe i jednorodne
wtedy jeden krok schematu różnicowego można przedstawić jako mnożenie
wektora i pewnej macierzy (dla niejednorodności f byłoby
z prawej strony $+\mathbf{f}^n$)

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_{\Delta} \mathbf{U}^n$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_{\Delta} \mathbf{U}^n$$

przykład dla upwind:

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

$$\mathbf{L}_{\Delta} = \begin{pmatrix} (1 - \alpha) & & & & & & & & \\ \alpha & (1 - \alpha) & & & & & & & \\ & \alpha & (1 - \alpha) & & & & & & \\ & & \alpha & (1 - \alpha) & & & & & \\ & & & \alpha & (1 - \alpha) & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \alpha & (1 - \alpha) & & \end{pmatrix}$$

definicji stabilności

mamy liniowe jednorodne równanie różniczkowe.
oraz schemat różnicowy (z odpowiednią macierzą \mathbf{L})

schemat różnicowy jest stabilny jeśli skończone zaburzenie warunku początkowego prowadzi do skończonej różnicy między rozwiązaniami:

to jest: jeśli istnieje takie C (niezależne od kroku siatki)
że dla każdej pary warunków początkowych

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U}^0 = \phi,$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{V}^n, \quad \mathbf{V}^0 = \psi.$$

$$\|\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n\| \leq C \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0\|$$

dla: $n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$

alternatywna definicji stabilności

dla liniowych schematów różnicowych

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U}^0 = \phi,$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{V}^n, \quad \mathbf{V}^0 = \psi.$$

$$\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta (\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n)$$

przy oznaczeniu $\mathbf{W} = \mathbf{U} - \mathbf{V}$ warunek

$$\|\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n\| \leq C \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0\|$$

zapiszemy jako:

$$\|\mathbf{W}^n\| \leq C \|\mathbf{W}^0\|$$

całkiem dowolny WP

czytać: schemat jest stabilny jeśli dla dowolnego warunku początkowego norma rozwiązania pozostaje skończona przy

$$n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$

def 2:

$$\|W^n\| \leq C \|W^0\|$$

czytać: schemat jest stabilny jeśli norma pozostaje skończona

dla: $n \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, $n\Delta t \leq T$

def 1:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U}^0 = \phi,$$

definicje równoważne
dla problemów liniowych

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{V}^n, \quad \mathbf{V}^0 = \psi.$$

dla równań nieliniowych:
każda ma inny sens.

$$\|\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n\| \leq C \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0\|$$

pokażmy, że schemat *upwind* jest stabilny dla liczby Courant'a spełniającej kryterium CFL α z $(0,1]$

wykorzystamy definicję 2: $\|W^n\| \leq C \|W^0\|$

oraz normę maksimum

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

średnia ważona! α z $(0,1]$

$$|U_j^{n+1}| \leq \|U^n\|_\infty$$

z def. normy max

$$|U_j^n| \leq \|U^n\|_\infty$$

$$|U_{j-1}^n| \leq \|U^n\|_\infty$$

dla każdego j , więc:

$$\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty$$

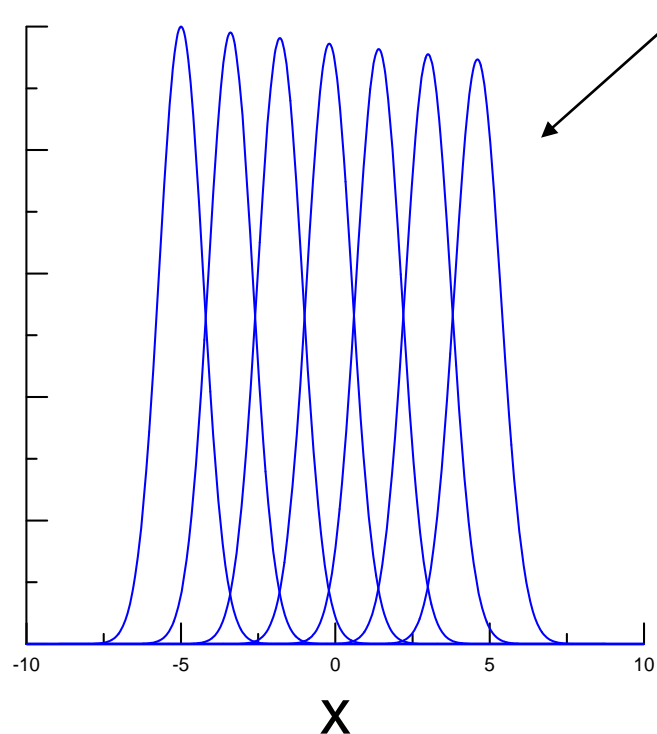
cbdu

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

maksymalna wartość rozwiązania w kolejnym kroku czasowym jest nie większa niż w kroku poprzednim

$$\|\mathbf{U}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{U}^n\|_\infty$$

$\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.004$
upwind $\alpha = 0.4$



Uogólnienie: warunkiem wystarczającym aby schemat typu:

$$U_j^{n+1} = \sum_{|s| \leq S} c_s U_{j+s}^n$$

**zasada maximum
(ogólne r.r.cz., nie tylko adwekcji)**

był stabilny bezwzględnie wg normy max jest aby: wszystkie współczynniki c były dodatnie i sumowały się do jedynki

dowód: podobny do wyżej pokazanego

dla adwekcji:

upwind: $U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$

downwind: $U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$

centralny: $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$

sumę do 1 mamy
zawsze (spójność),
ale dla $v > 0$ tylko upwind
z $0 \leq \alpha \leq 1$
spełnia założenie
tw. o zasadzie maksimum

stabilność schematu: dotyczy małych kroków oraz skończonych czasów
 $n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$

stabilność bezwzględna schematu dla równania cząstkowego:
wyniki mają pozostawać skończone dla stałego Δt i Δx i dla nieskończonego n

w: praktyce to stabilność bezwzględna jest ważna

stabilność bezwzględna jest silniejszym warunkiem niż stabilność
(znaczy: schemat stabilny bezwzględnie jest zawsze stabilny
a stabilny nie zawsze jest bezwzględnie stabilny)

dla RRZ zależało nam raczej na stabilności (0-stabilności) schematu - tak
aby był on uniwersalnie stosowalny do różnych równań.
w RRCz - nikomu nie zależy na tej uniwersalności. Każde RRCz - to inna problematyka,
inni ludźmi inne cele. Bezwzględna stabilność oraz stabilność dotyczą konkretnego
równania.

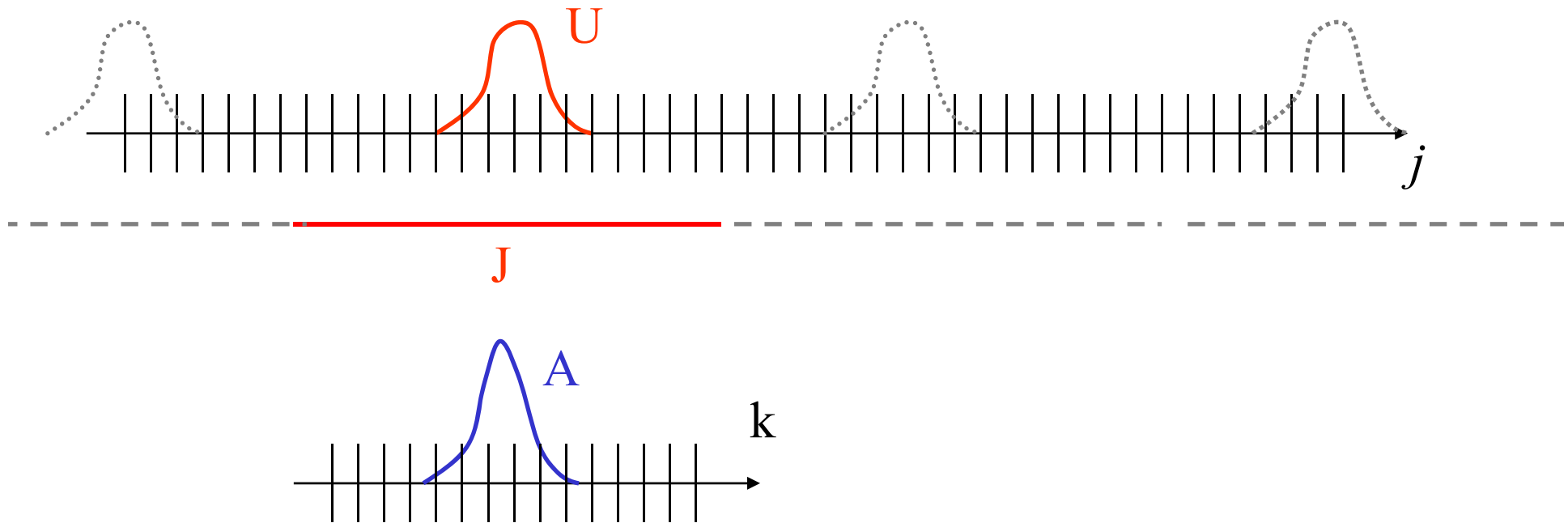
**zasada maximum: daje tylko WW dla bezwzględnej stabilności.
WKW produkuje analiza w przestrzeni odwrotnej - von Neumanna**

zakładamy, że rozwiązanie schematu różnicowego U_j jest periodyczne w j z okresem J
(periodyczne warunki brzegowe)

w praktyce nie jest to ważne - można przyjąć, że $J \gg$ obszaru, który nas interesuje

U – funkcja w przestrzeni położeń

A – funkcja w przestrzeni częstości (przestrzennych) [wektora falowego]



zasada maximum: daje tylko WW dla bezwzględnej stabilności.
 WKW produkuje analiza w przestrzeni odwrotnej - von Neumanna

dyskretna TF

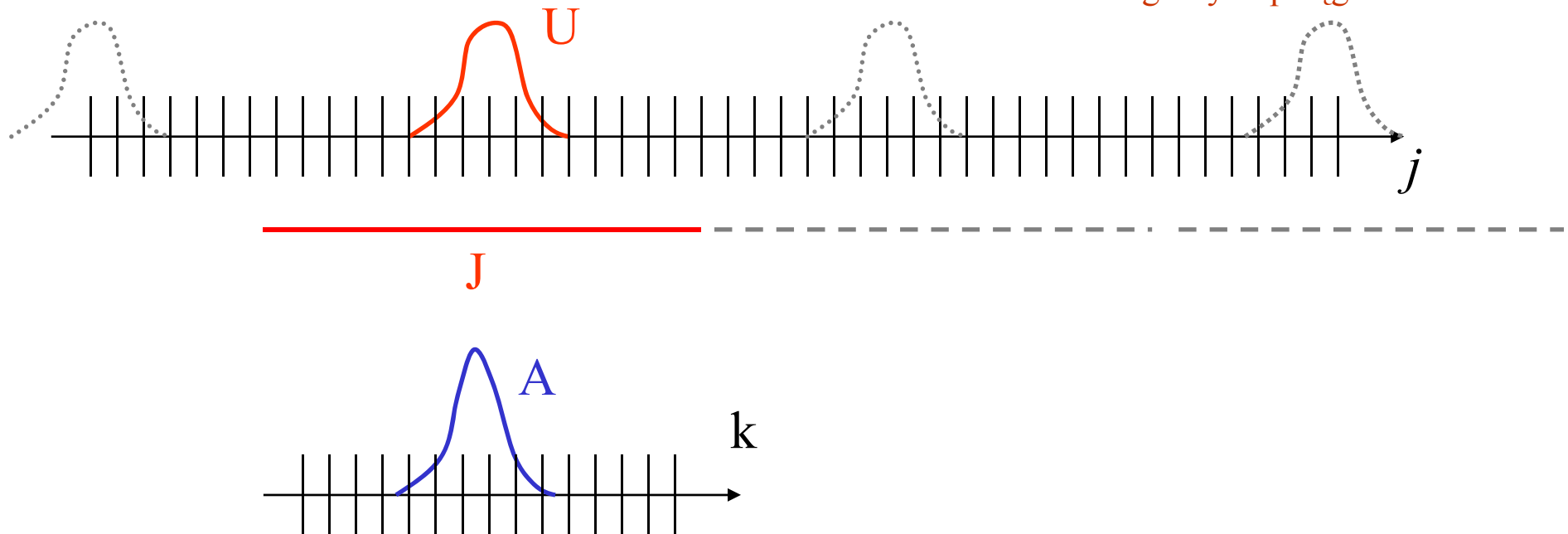
$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

$$A_k^n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n (w_j^k)^*$$

$$w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

uwaga: dla U i A :

n w indeksie górnym to chwila czasowa,
 dla ω - indeks górnym to potęga



$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad A_k^n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n (w_j^k)^* \quad w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

↑
rozwiązanie
w przestrzeni r

↙
rozwiązanie w przestrzeni k

normy euklidesowe wektorów \mathbf{U} oraz \mathbf{A} wiąże twierdzenie Parsewala:

$$\|\mathbf{U}^n\|_2^2 = J \|\mathbf{A}^n\|_2^2$$

$$\|\mathbf{A}^n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{J-1} |A_k^n|^2$$

analiza stabilności bezwzględnej von Neumanna:

jeśli pokażemy że norma transformaty Fouriera jest skończona dla $n \rightarrow \infty$
to wystarczy dla udowodnienia stabilności bezwzględnej
(i np. wybrania bezpiecznego kroku czasowego)

... co użyteczne, bo analiza w przestrzeni k jest bardzo prosta

Przykład: analiza von Neumanna dla schematu upwind z α z $(0,1]$

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

$$w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k + \alpha \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_{j-1}^k$$

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = \sum_{k=0}^{J-1} [(1 - \alpha) A_k^n w_j^k + \alpha A_k^n w_j^k \exp(-2\pi i k / J)]$$

równość obowiązuje dla każdego A_k^0 (dla wszystkich warunków początkowych)
co oznacza, że wyrazy w sumie po k muszą być identyczne

$$A_k^{n+1} w_j^k = [(1 - \alpha) + \alpha \exp(-2\pi i k / J)] A_k^n w_j^k$$

$$A_k^{n+1} = \underline{M_k} A_k^n \quad \text{wsp. wzmocnienia modu } k$$

$$A_k^{n+1} = M_k A_k^n \quad \text{wsp. wzmocnienia modu } k$$

$$A_k^{n+1} = (M_k)^{n+1} A_k^0$$

norma transformaty pozostanie skończona gdy $|M_k| \leq 1$ dla każdego k

$$M_k = 1 - \alpha + \alpha \exp(-2\pi i k / J)$$

$$|M_k|^2 = (1 - \alpha + \alpha \cos(2\pi k / J))^2 + \alpha^2 \sin^2(2\pi k / J)$$

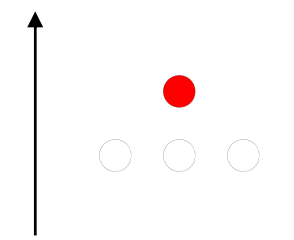
$$|M_k|^2 = \alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\cos(2\pi k / J)$$

$$|M_k|^2 = 1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(2\pi k / J)) \leq 1$$

dla $\alpha \in (0,1]$

nie ma modu który by rósł: wniosek - **schemat upwind jest bezwzględnie stabilny dla $\alpha \in (0,1]$**

teraz
 spójrzymy na nominalnie najdokładniejszy ze schematów
 poznanych do tej pory: z centralnym ilorazem przestrzennym:

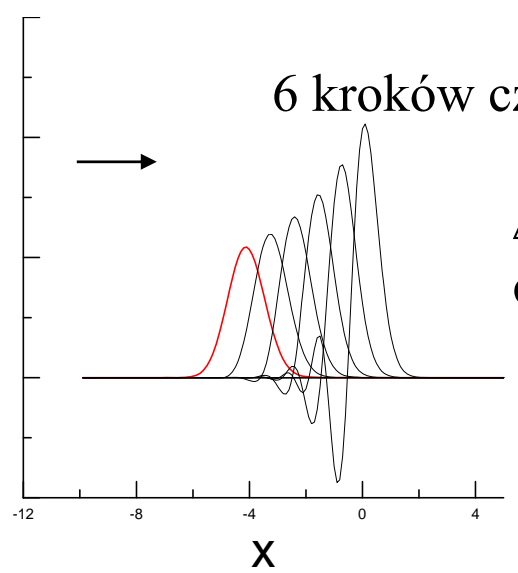


$$\frac{u(j, n + 1) - u(j, n)}{\Delta t} = -v \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

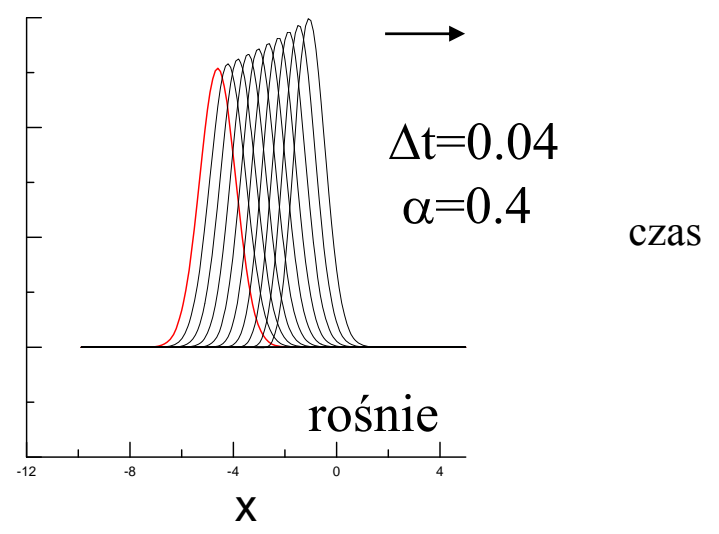
↑
położenie →

$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + \underline{u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)}$$

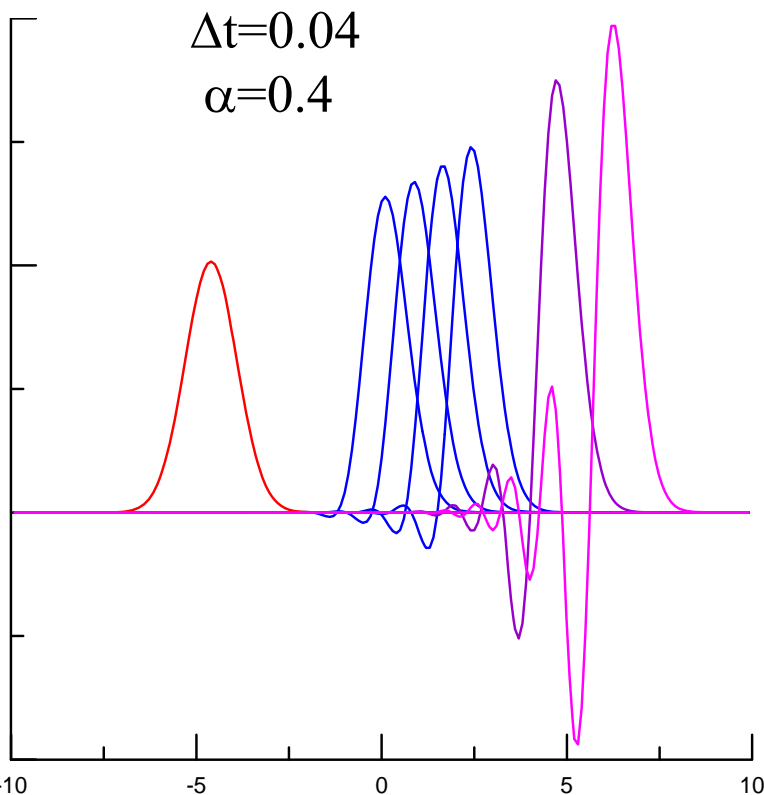
Weźmy $\Delta x = 0.1$



tu niedobrze



Euler z centralnym ilorazem przestrzennym

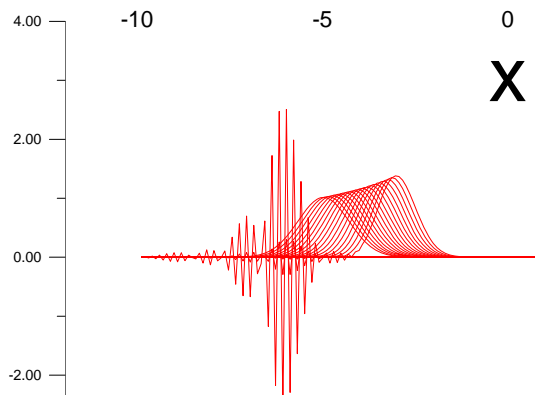


drastyczna zmiana kształtu pakietu nastąpiła, tylko później

ujemne wartości gęstości ☹️

wcześniej zbadany upwind: zmienia kształt, ale dyfuzyjnie (na ujemne wartości nie przechodzi, i nie eksploduje) – o ile spełnione kryterium CFL

z centralnym ilorazem – fajerwerki i eksplozja



Uwaga: widzimy, że wyższe częstotliwości są wzmacniane i że spóźniają się za pakietem: zrozumiemy to przy analizie dyfuzji w przestrzeni k oraz przy relacji dyspersji numerycznej

Symulacja dla odpowiednio wysokiego t : zawsze skończy się eksplozją
można zaryzykować twierdzenie, że schemat centralny nie jest bezwzględnie stabilny dla r.adw.

sprawdźmy czy faktycznie jest niestabilny bzwz dla dowolnego dt

analiza von Neumanna dla schematu z centralną pochodną przestrzenną

$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$U_k^0(x) = \sum_k A_k^0 \exp(ikx)$$

$$U_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 \exp(ijk\Delta x)$$

$$\alpha = v\Delta t / \Delta x$$

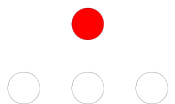
$$A_k^1 = A_k^0 - \frac{\alpha}{2} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) A_k^0$$

$$M_k = 1 - \frac{\alpha}{2} (2i \sin(k\Delta x))$$

$$|M_k|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1$$
$$w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

$\Delta x = 2\pi / J$



sprawdźmy czy faktycznie jest niestabilny b zwz dla dowolnego dt

analiza von Neumanna dla schematu z centralną pochodną przestrzenną

$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$U_k^0(x) = \sum_k A_k^0 \exp(ikx)$$

$$U_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 \exp(ijk\Delta x)$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J - 1$$

$$w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

$\Delta x = 2\pi / J$

$$\alpha = vdt/dx$$

$$A_k^1 = A_k^0 - \frac{\alpha}{2} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) A_k^0$$

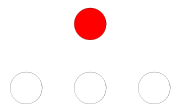
$$M_k = 1 - \frac{\alpha}{2} (2i \sin(k\Delta x))$$

$$|M_k|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \longrightarrow$$

widzimy, że mody k na ogół są wzmacniane. wyobraźmy sobie gęstą siatkę (dx małe): wzmacniane będą większe k , co widzieliśmy w numerycznym eksperymencie

metoda = niestabilna bezwzględnie i dlatego bezużyteczna w praktycznym zastosowaniu ale:

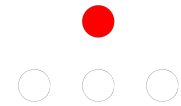
okazuje się, że w sensie formalnym jest stabilna [stabilność : definiowana jest dla skończonych czasów $\Delta t \ n < T$]



$n \rightarrow \infty$ dla ustalonych kroków $\Delta x, \Delta t$

stabilność schematu z centralną pochodną przestrzenną

$$n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$



$$|M_k|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)$$

$$|M_k|^2 \leq 1 + \alpha^2 \leq \exp(\alpha^2)$$

$$|M_k|^{2n} \leq \exp(nv^2 \Delta t^2 / \Delta x^2) = \exp[(n\Delta t)(v^2 \Delta t / \Delta x^2)]$$

zmieniamy krok czasowy i przestrzenny tak aby $v^2 \Delta t / \Delta x^2 = \beta = \text{const}$

$$|M_k|^{2n} \leq \exp[\beta n \Delta t] \leq \exp[\beta T] = C^2$$

$$\|\mathbf{A}^n\|_2^2 \leq C^2 \|\mathbf{A}^0\|_2^2$$

$$\|\mathbf{U}^n\|_2^2 \leq JC^2 \|\mathbf{U}^0\|_2^2$$

schemat centralny nie jest bezwzględnie stabilny
ale JEST stabilny!
w granicach zerowych kroków czasowych
i przestrzennych przy ustalonym β

Analiza von Neumanna:

Warunek na czynnik wzmocnienia:

$|M_k| \leq 1$ wystarczający dla stabilności metody
widzieliśmy, że nie jest konieczny dla stabilności

$|M_k| \leq 1$ **jest konieczny i wystarczający dla bezwzględnej stabilności**

Czy można uznać, $|M_k| \leq 1$ za konieczny warunek stosowalności metody?

Raczej tak z wyjątkami:

- 1) jeśli amplituda rozwiązanie równania różniczkowego rośnie ograniczony wzrost rozwiązania numerycznego nie musi być bardzo szkodliwy
- 2) gdy metoda jest stabilna można w ostateczności pracować z małymi krokami siatki bez $|M_k| \leq 1$ ale tylko gdy interesuje nas skończony czas symulacji