

odwrotny problem przewodnictwa cieplnego

problem prosty : zadajemy warunki brzegowe oraz początkowe pytanie: co stanie się w przyszłości (tak wprowadzane są problemy w teorii równań różniczkowych)

W praktyce, często chcemy znaleźć rozwiązania dla problemu odwrotnego: znamy obecny rozkład temperatury. Jaki był rozkład w przeszłości? Jakie były warunki brzegowe? Jaki był warunek początkowy ?

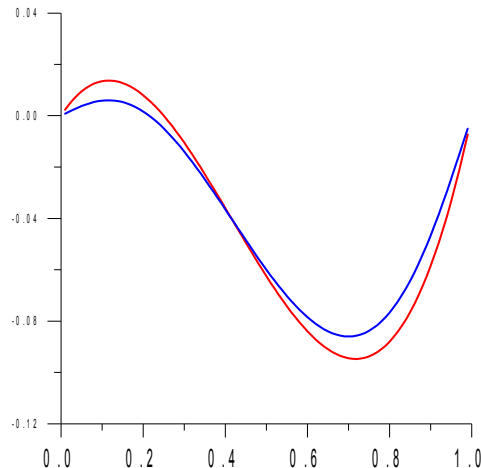
[typowy problem pomiarów, nie tylko zależnych od czasu]

warunki brzegowe $u(x=0,t)=u(x=1,t)=0$

problem:

dane $u(x,t=T)$

szukane: $u(x,t=0)$



$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

O czasie i problemie odwrotnym ...

$N=100$, $dx=1.0/(N)$, $D=1$
 $dt=dx**2/d/2/10$ (malutki)

CN

problem:

$T(x,t) = 1$ wewnątrz

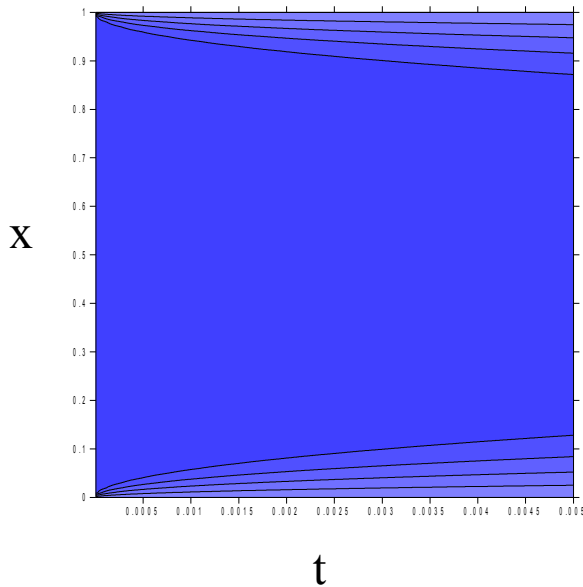
$T(x,t) = 0$ na zewnątrz

chcemy

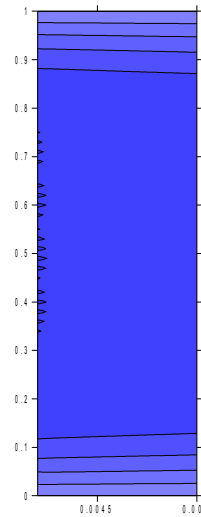
wrócić do

warunku początkowego

ustawiamy $dt:=-dt$



liczymy do przodu



potem chcemy wrócić

O czasie i problemie odwrotnym ...

$N=100$, $dx=1.0/(N)$, $D=1$
 $dt=dx**2/d/2/10$ (malutki)

CN

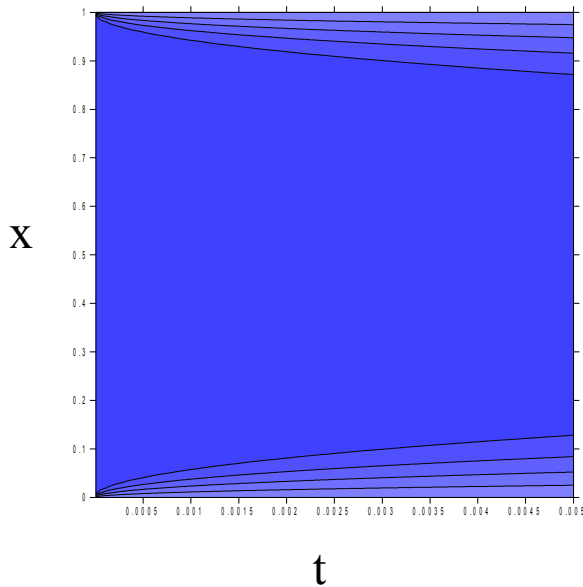
problem:

$T(x,t) = 1$ wewnątrz

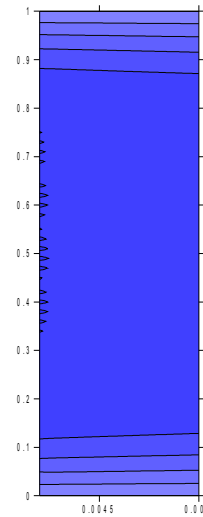
$T(x,t) = 0$ na zewnątrz

chcemy
wrócić do
warunku początkowego
ustawiamy $dt:=-dt$

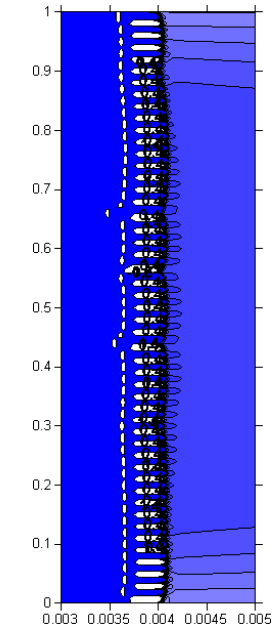
nieco dłużej = eksplozja



liczymy do przodu



potem chcemy wrócić



i bum!

problem odwrotny do równania dyfuzji:

wszystkie metody różnic skończonych okazują się niestabilne dla ujemnego kroku czasowego [$r = D\Delta t / \Delta x^2 < 0$]

wyprowadzony wcześniej z analizy von Neumanna

warunek: stabilności bezwzględnej: ($\theta = 1/2$ odpowiada CN)

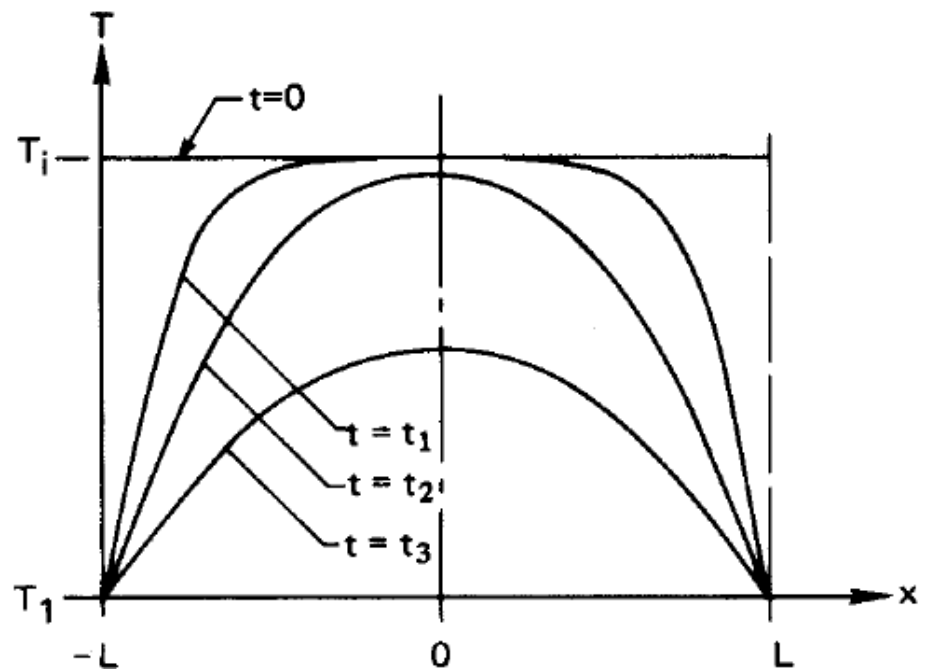
$$-1 \leq 1 - \frac{4r \sin^2(k\Delta x/2)}{1 + 4r\theta \sin^2(k\Delta x/2)} \leq 1$$

dla $\Delta t < 0$ [$r < 0$] warunek prawy nie jest spełniony

schemat CN nie jest stabilny dla równania dyfuzji rozwiązywanego wstecz

niezależnie od startu
rozkład T po pewnym czasie
będzie miał kształt $\sin(\pi x)$
*Układ zapomina o warunku
początkowym*

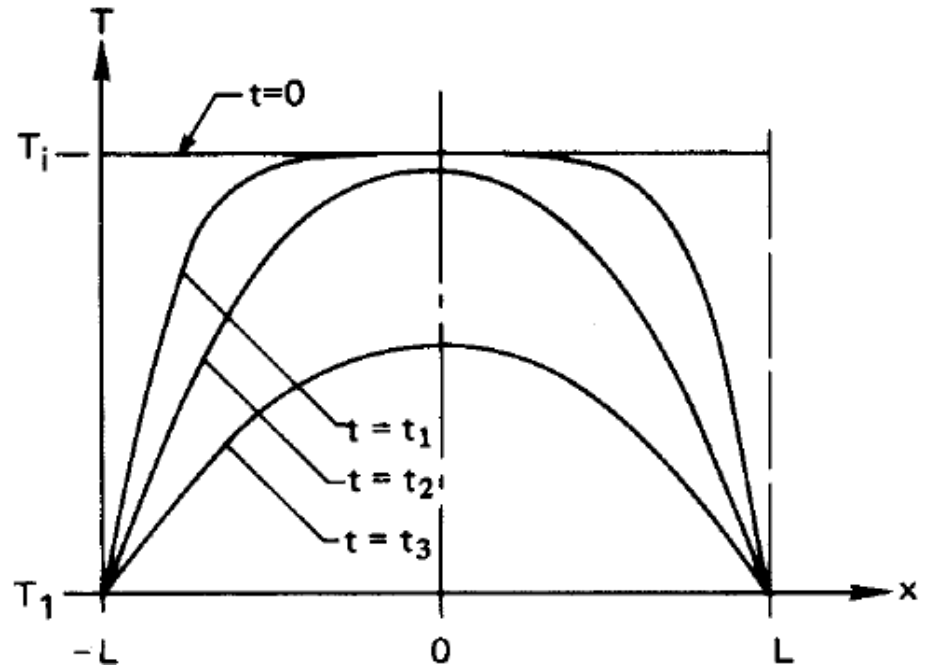
problem obiektywnie trudny



$$T(x, t) = \sum_n a_n \exp(-\alpha(n\pi)^2 t) \sin(n\pi x)$$

odwracamy znak czasu: gdy tylko w wyniku niedokładności
pojawi się składowa o wysokim n – natychmiast eksploduje

Nie zawsze problem z cofaniem się wstecz w czasie jest trudny:
dla równania adwekcji – jest równie łatwy jak początkowy
(zmiana dt równoważna zmianie kierunku prędkości unoszenia v)



możliwe rozwiązanie:

szukać warunków początkowych $T(x, t=0)$, dla których jesteśmy najbliżej danych wejściowych $[T(x, t=T)]$

rozwiązywać równanie dla $dt > 0$ i porównywać wynik numeryczny dla $t=T$ z zadanym rozkładem – co wymaga znacznie większego nakładu obliczeń niż w problem podstawowy

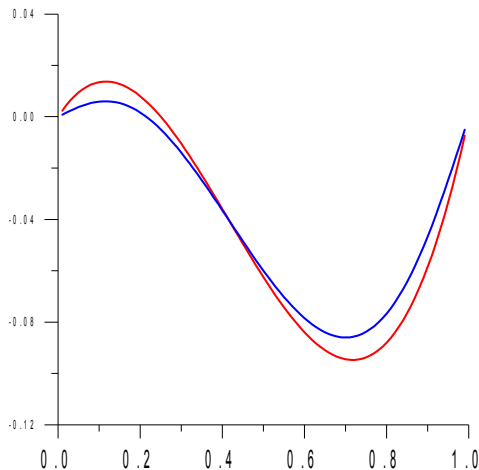
odwrotny problem przewodnictwa cieplnego

opiszemy rozwiązanie warunków brzegowych $u(x=0,t)=u(x=1,t)=0$
problem:

dane $u(x,t=T)$

szukane: $u(x,t=0)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



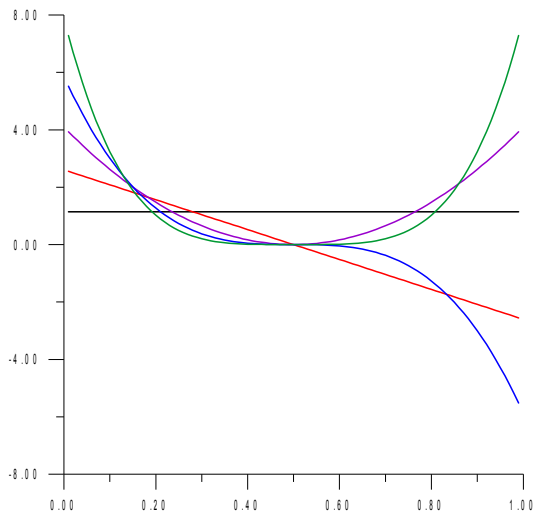
←
policzone schematem CN dla $N=100$
 $dx=1.0/(N)$
 $D=1$
 $dt=dx**2/D/2$
100 kroków czasowych

Jeden z możliwych algorytmów – wykorzystuje liniowość równania

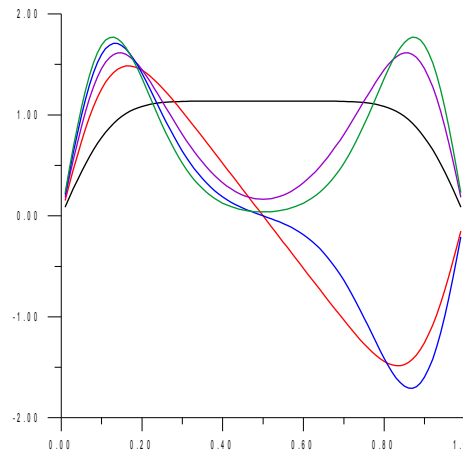
Jeden z możliwych algorytmów – wykorzystuje liniowość równania

- 1) wybrać bazę niezależnych liniowo funkcji $g(x)$ określonych na przedziale $(0,1)$

np. $g_i(x) = (x-1/2)^i$



- 2) dla każdego warunku początkowego rozwiązać równanie przewodnictwa cieplnego do chwili T



dostaniemy bazę funkcji $h_i(x)$

normalizujemy je tak aby $(h_i, h_i) = 1$

zgodnie z tym warunkiem normalizujemy również g_i

ewolucja czasowa

3) równanie jest liniowe

$$\mathbf{g}_i \rightarrow \mathbf{h}_i$$

$$u(x, t = 0) = \sum d_i g_i(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, t = T) = \sum d_i h_i(x)$$

wyliczymy przybliżony warunek początkowy [wsp. d]
jeśli rozłożymy rozwiązanie w chwili T w bazie funkcji h_i

rozłożyć: np.: *metodą najmniejszych kwadratów*

$$\int_0^1 dx \left(u(x, t = T) - \sum d_i h_i(x) \right)^2 = \min$$

$$\int_0^1 dx \left(u(x, t = T) - \sum d_i h_i(x) \right)^2 = \min$$

$$\frac{\partial}{\partial d_k} \int_0^1 dx \left(u(x, t = T) - \sum d_i h_i(x) \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial d_k} \int_0^1 dx \left(u^2(x, T) + \sum_i \sum_j d_j d_i h_i(x) h_j(x) - \sum_i 2u(x, T) d_i h_i(x) \right) = 0$$

$$\int_0^1 dx \left(2 \sum_i d_i h_i(x) h_k(x) - 2u(x, T) h_k(x) \right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{p}$$

z

$$A_{ki} = \int_0^1 h_i(x) h_k(x) dx$$

$$p_k = \int_0^1 h_k(x) u(x, T) dx$$

$$\int_0^1 dx \left(u(x, t = T) - \sum d_i h_i(x) \right)^2 = \min$$

$$\frac{\partial}{\partial d_k} \int_0^1 dx \left(u(x, t = T) - \sum d_i h_i(x) \right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial d_k} \int_0^1 dx \left(u^2(x, T) + \sum_i \sum_j d_j d_i h_i(x) h_j(x) - \sum_i 2u(x, T) d_i h_i(x) \right) = 0$$

$$\int_0^1 dx \left(-2 \sum_i d_i h_i(x) h_k(x) - 2u(x, T) h_k(x) \right) = 0$$

↓

$$\mathbf{A} \mathbf{d} = \mathbf{p} \quad \mathbf{z}$$

$$A_{ki} = \int_0^1 h_i(x) h_k(x) dx$$

niestety A bywa źle uwarunkowana
 bo h_i mają tendencję do „upodobniania się”
 nawet jeśli g bardzo różne

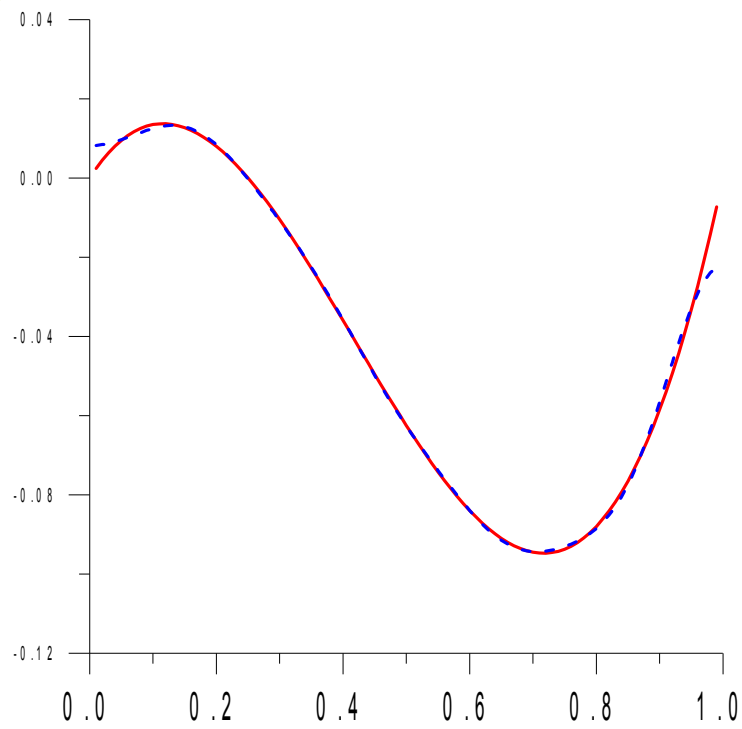
$$p_k = \int_0^1 h_k(x) u(x, T) dx$$

niestety = raczej reguła dla problemów odwrotnych

Wyniki:



dokładny wynik:
warunek początkowy był $x(x-1)(x-1/4)$



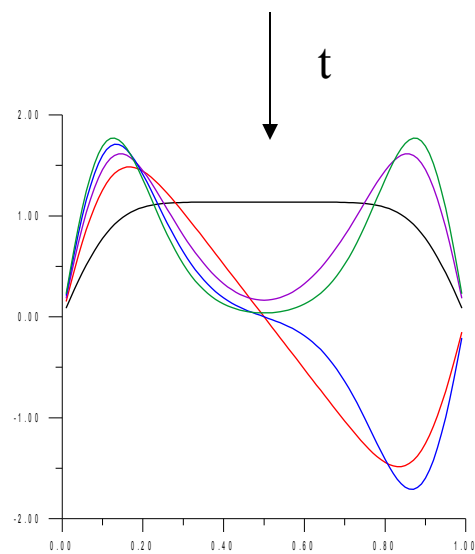
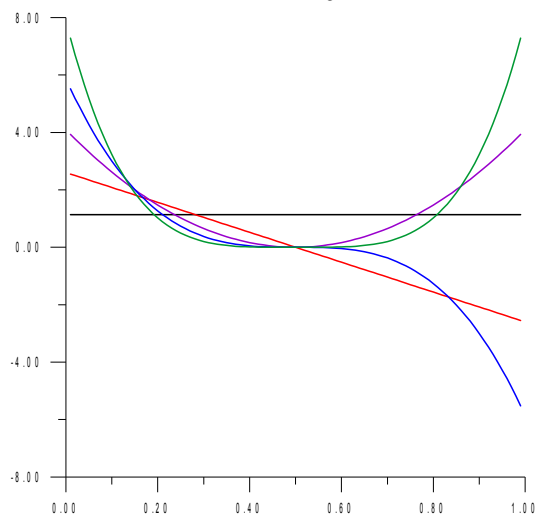
baza

$$g_i(x) = \cos(i\pi x)$$

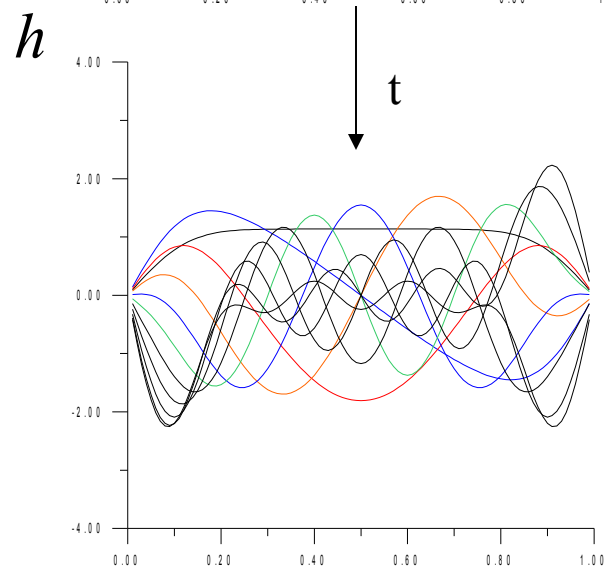
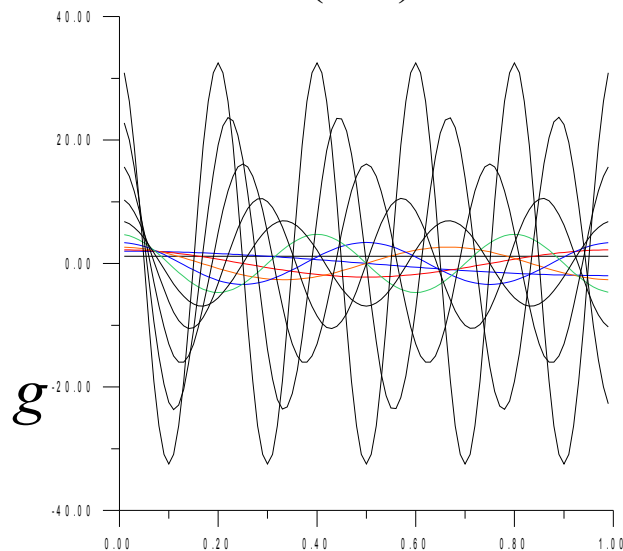
dla $i=0,1,\dots,10$

„upodabnianie się funkcji bazowych”- nie jesteśmy bez wpływu na uwarunkowanie problemu
– możemy wybrać bazę tak, aby efekt zminimalizować

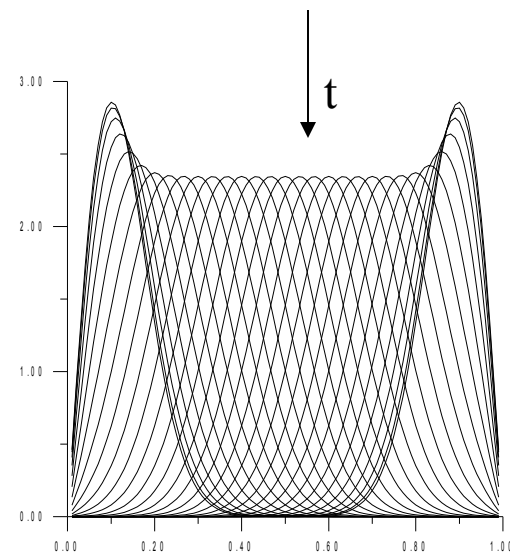
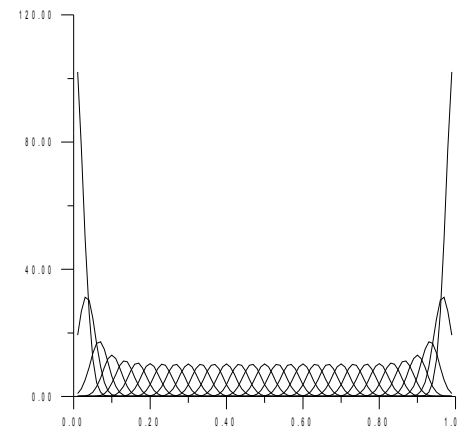
wielomiany



$\cos(n\pi x)$



gaussowska wielocentrowa



Równanie adwekcji – dyfuzji (schematy jawne)

$$u_t = Du_{xx} + vu_x \quad \text{występuje np. w mechanice płynów i pyłów w transporcie ciepła itd. } D \geq 0$$

Euler: przedni czasowy, centralne przestrzenne:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

$$r = \frac{Ddt}{dx^2} \quad \alpha = \frac{vdt}{dx}$$

schemat: bezwzględnie stabilny gdy czysta dyfuzja $v=0$ oraz $r \leq 1/2$
: bezwzględnie niestabilny gdy czysta adwekcji $D=0$
: dla adwekcji widzieliśmy, że obecność niezerowego D stabilizuje schemat

posortujmy wyrazy w powyższym równaniu względem indeksu siatki przestrzennej:

$$U_j^{n+1} = \left(r - \frac{\alpha}{2}\right)U_{j-1}^n + (1 - 2r)U_j^n + \left(r + \frac{\alpha}{2}\right)U_{j+1}^n$$

równanie AD, schemat Eulera

$$U_j^{n+1} = \left(r - \frac{\alpha}{2}\right)U_{j-1}^n + (1 - 2r)U_j^n + \left(r + \frac{\alpha}{2}\right)U_{j+1}^n$$

zgodnie z zasadą max: schemat będzie stabilny jeśli

równanie AD, schemat Eulera

$$U_j^{n+1} = \left(r - \frac{\alpha}{2}\right)U_{j-1}^n + (1 - 2r)U_j^n + \left(r + \frac{\alpha}{2}\right)U_{j+1}^n$$

zgodnie z zasadą max: schemat będzie stabilny jeśli $\frac{1}{2} \geq r \geq |\alpha|/2$

$$r = \frac{Ddt}{dx^2} \quad \alpha = \frac{vdt}{dx}$$


aby schemat był stabilny: który efekt
ma być dominujący: adwekcja czy dyfuzja ??

równanie AD, schemat Eulera

$$U_j^{n+1} = \left(r - \frac{\alpha}{2}\right)U_{j-1}^n + (1 - 2r)U_j^n + \left(r + \frac{\alpha}{2}\right)U_{j+1}^n$$

zgodnie z zasadą max: schemat będzie stabilny jeśli $\frac{1}{2} \geq r \geq |\alpha|/2$ (przewaga dyfuzji)

$$r = \frac{Ddt}{dx^2} \quad \alpha = \frac{vdt}{dx}$$


$$|P_e| \equiv \frac{|v|dx}{2D} \leq 1$$

liczba Peclet'a (komórkowa liczba Reynoldsa)

podobny wniosek otrzymamy dla normy euklidesowej stosując analizę von Neumanna

1) zauważmy – krok czasowy nie ma wpływu na stabilność
jeśli prędkość unoszenia duża w porównaniu ze stałą dyfuzji:
siatka przestrzenna będzie musiała być bardzo drobna. Zazwyczaj łatwiej zgodzić się na drobne dt niż na drobne dx ze względu na ograniczenia pamięciowe.

2) jeśli $D=0$ (czysta adwekcja) – schemat niestabilny

Dla równania adwekcji lepiej sprawdzał się **schemat upwind** : (dla $\alpha > 0$)

$$u_t = Du_{xx} + vu_x$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \alpha(U_{j+1}^n - U_j^n)$$

[uwaga!, teraz $v > 0$
wieje w prawo(inny znak v)]

$$U_j^{n+1} = rU_{j-1}^n + (1 - 2r - \alpha)U_j^n + (r + \alpha)U_{j+1}^n$$

zasada max:

$$r = \frac{Ddt}{dx^2} \quad \alpha = \frac{vdt}{dx}$$

Dla równania adwekcji lepiej sprawdzał się **schemat upwind**

$$u_t = Du_{xx} + vu_x$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \alpha(U_{j+1}^n - U_j^n)$$

[uwaga!, teraz $v > 0$
wieje w prawo(inny znak v)]

$$U_j^{n+1} = rU_{j-1}^n + (1 - 2r - \alpha)U_j^n + (r + \alpha)U_{j+1}^n$$

zasada max: $r \geq 0$ (jest), $r + \alpha \geq 0$ (jest bo $v > 0$) oraz $2r + \alpha \leq 1$

$$r = \frac{Ddt}{dx^2} \quad \alpha = \frac{vdt}{dx}$$

warunek znacznie mniej restrykcyjny niż dla Eulera
bo:
stabilność można zapewnić małym krokiem czasowym
Dla dowolnej siatki !

**Czy odnajdujemy znane warunki stabilności dla
czystej dyfuzji i czystej adwekcji ?**

Dla równania adwekcji lepiej sprawdzał się **schemat upwind**

$$u_t = Du_{xx} + vu_x$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \alpha(U_{j+1}^n - U_j^n)$$

[uwaga!, teraz $v > 0$
wieje w prawo(inny znak v)]

$$U_j^{n+1} = rU_{j-1}^n + (1 - 2r - \alpha)U_j^n + (r + \alpha)U_{j+1}^n$$

zasada max: $r \geq 0$ (jest), $r + \alpha \geq 0$ (jest bo $v > 0$) oraz $2r + \alpha \leq 1$

$$r = \frac{Ddt}{dx^2} \quad \alpha = \frac{vdt}{dx}$$

warunek znacznie mniej restrykcyjny niż dla Eulera
bo:
stabilność można zapewnić małym krokiem czasowym
Dla dowolnej siatki !

odnajdujemy znane warunki stabilności dla
czystej dyfuzji i czystej adwekcji

problemy z przewagą adwekcji i v zmieniającym znak (α zależne od położenia)

$v > 0$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \alpha (U_{j+1}^n - U_j^n)$$

$v < 0$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \alpha (U_j^n - U_{j-1}^n)$$

co, można zapisać jednym wzorem: (z uniknięciem instrukcji warunkowej)

problemy z przewagą adwekcji i v zmieniającym znak (α zależne od położenia)

$v > 0$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \alpha (U_{j+1}^n - U_j^n)$$

$v < 0$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \alpha (U_j^n - U_{j-1}^n)$$

co, można zapisać jednym wzorem:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\beta}{2} (U_{j-1}^n - 2U_j^n + U_{j+1}^n) + \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

z $\beta = 2r + |\alpha| \longrightarrow$ tzw. schemat z różniczkowaniem pod wiatr

uwaga: w schemacie upwind: czynnik dyfuzji wzrasta o extra $|\alpha|/2$
(pojawia się dyfuzja numeryczna) (w centralnym ilorazie sztucznej dyfuzji nie ma i to jak widzieliśmy powód niestabilności schematu dla czystej adwekcji)

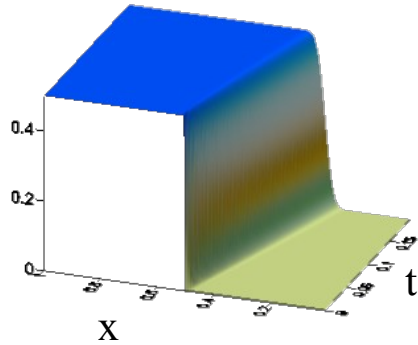
centralny (bez numerycznej dyfuzji) :

$$U_j^{n+1} = U_j^n + r (U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n) + \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

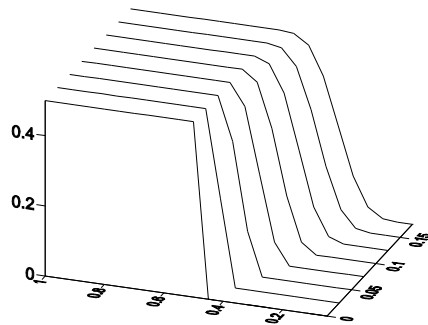
$$u_t = Du_{xx} + vu_x \quad \text{Przykład: problem z przewagą adwekcji}$$

$$D=0.01, v=1$$

warunek początkowy: $u=1/2$ dla $x<1/2$



← rozwiązanie dokładne
dyfuzja: widoczna w lekkim zaokrągleniu
nieciągłości dla $t>0$

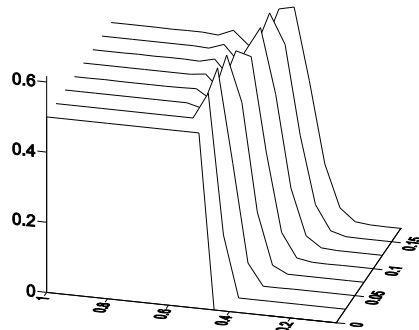


← upwind
 $dt=0.025, dx=0.05$
 $\alpha=0.5, r=0.1$

$$\beta = 2r + |\alpha|$$

$$r = \frac{Ddt}{dx^2} \quad \alpha = \frac{vdt}{dx}$$

widać znacznie przesadzoną dyfuzję



← iloraz centralny (bezwzględnie niestabilny)
widać generację niestabilności
(antydyfuzja = zaostrzanie kantów)

aby zniwelować dodatkową (numeryczną dyfuzję) dla schematu upwind
- mniejszy krok czasowy czy mniejszy krok przestrzenny ?

Nieliniowe równania paraboliczne

Dla równań liniowych (np. dyfuzji, dyfuzji+adwekcji) schematy jawne sprowadzają się do wykonania wielu podstawień w każdym kroku niejawne prowadzą do układu równań liniowych.

Zastanowimy się jak rozwiązać równanie nieliniowe.

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx})$$

schemat niejawny, jednopoziomowy, centralne przestrzenne przedni czasowy, ważona prawa strona (dla $\theta=1/2$ - CN),

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \theta f(j\Delta x, (n+1)\Delta t, U_j^{n+1}, \frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}, \frac{U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1}}{\Delta x^2}) + (1-\theta) f(j\Delta x, n\Delta t, U_j^n, \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x}, \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n}{\Delta x^2})$$

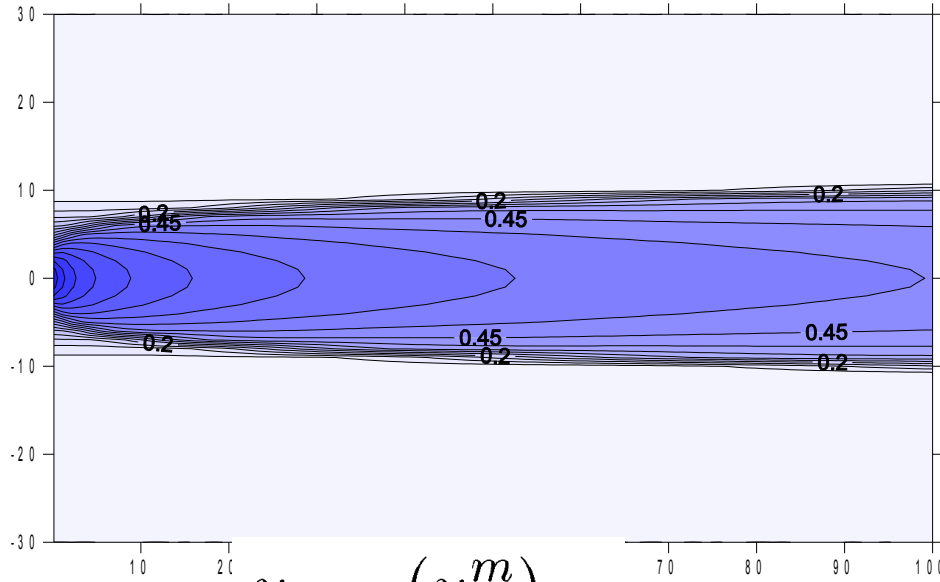
weźmy *nieliniowe równanie dyfuzji*

$$u_t = (u^m)_{xx}$$

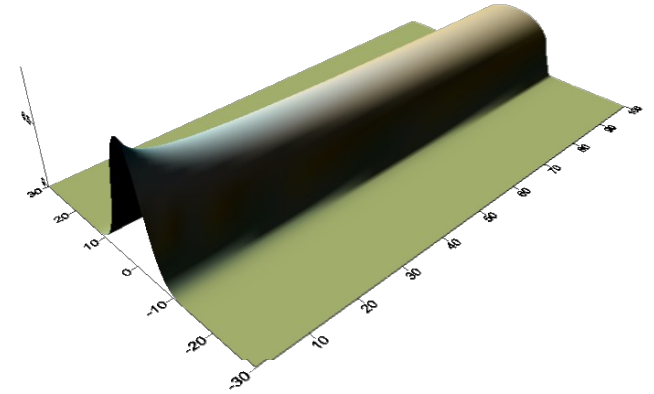
na $m=1$ się już znamy

$u(x,t=0)=\exp(-x^2/25)$, pudło $(-30,30)$, $\Delta x=1$, $\Delta t=.1$

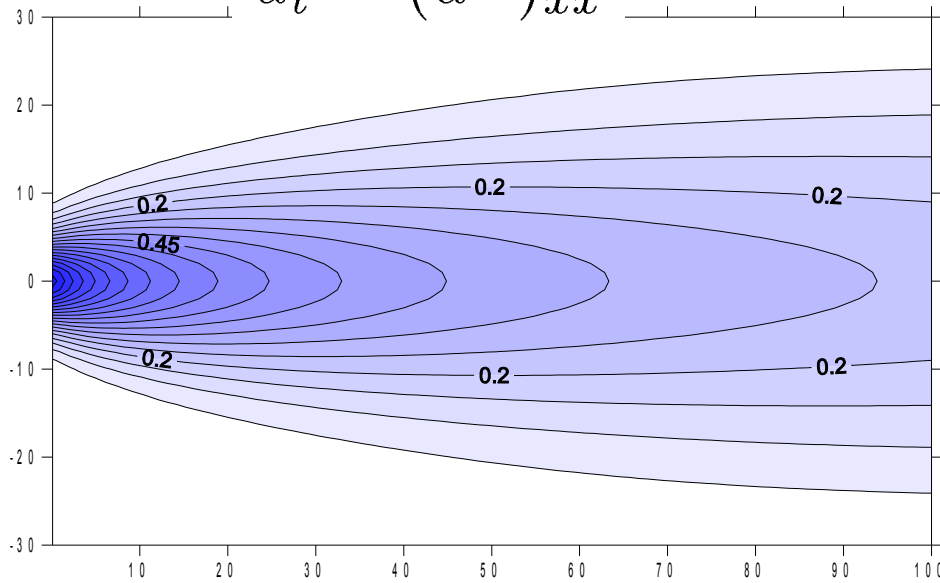
$m=5$



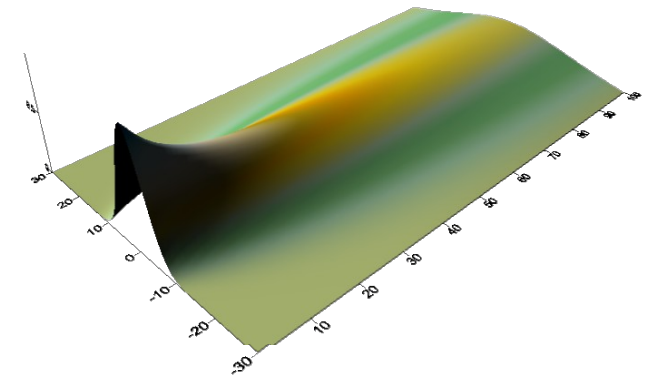
dyfuzja nieliniowa



$m=1$



$u_t = (u^m)_{xx}$

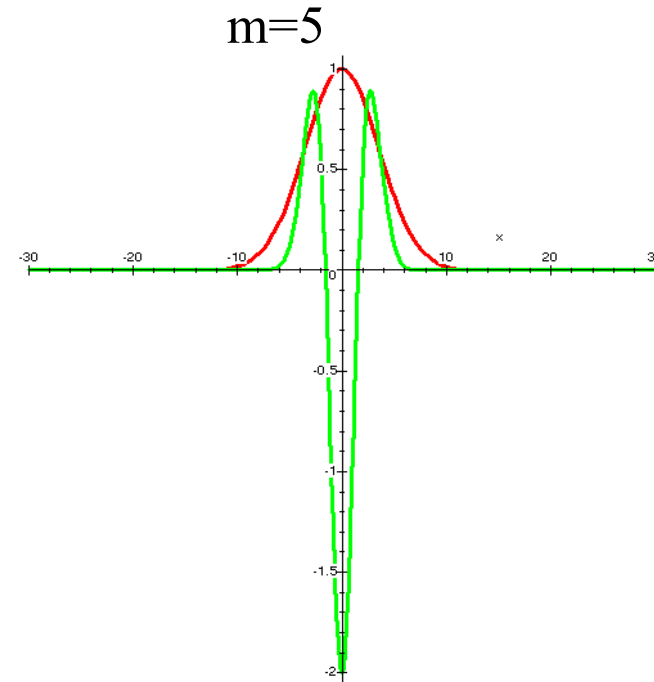
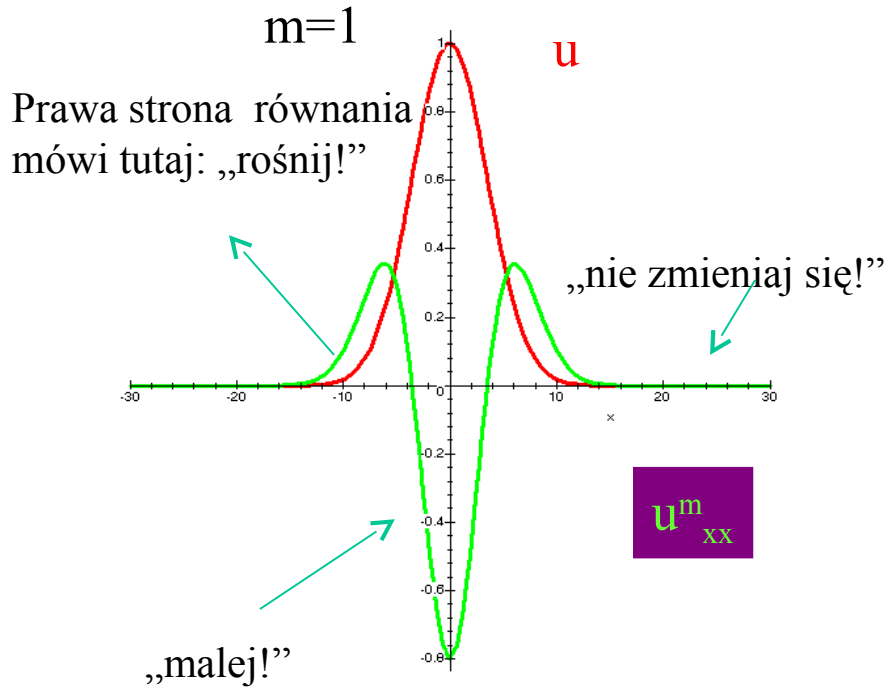


zwykła dyfuzja

CN

$$u_t = (u^m)_{xx}$$

warunek początkowy oraz niejednorodność w chwili początkowej
= do wyjaśnienia różnic w rozwiązaniu



widzimy, że krańce pakietu =
bez zmian. błyskawiczne stłumienie
maksimum, wyrównanie brzegów

$$u_t = (u^m)_{xx}$$



$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = \theta \left(\frac{(U_{j+1}^{n+1})^m + (U_{j-1}^{n+1})^m - 2(U_j^{n+1})^m}{\Delta x^2} \right) \\ (1 - \theta) \left(\frac{(U_{j+1}^n)^m + (U_{j-1}^n)^m - 2(U_j^n)^m}{\Delta x^2} \right)$$



zapiszemy jako układ równań nieliniowych

$$F_j(\mathbf{U}^{n+1}) \equiv U_j^{n+1} - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\left((U_{j-1}^{n+1})^m - 2(U_j^{n+1})^m + (U_{j+1}^{n+1})^m \right) \right] \\ - U_j^n - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\left((U_{j-1}^n)^m - 2(U_j^n)^m + (U_{j+1}^n)^m \right) \right]$$

dla $\theta=0$ – jawny schemat – nadal forma

podstawieniowa (nawet dla nieliniowego równania)

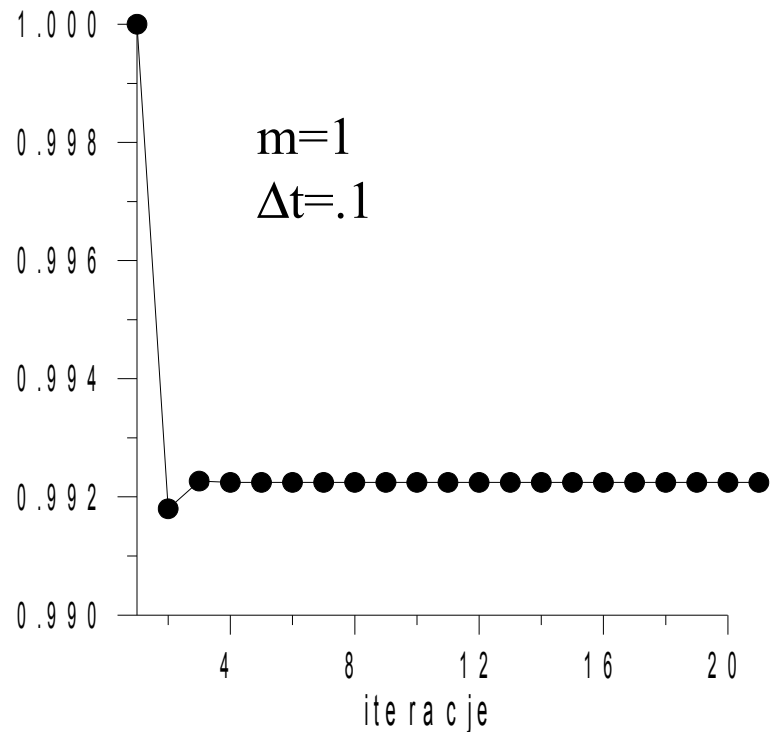
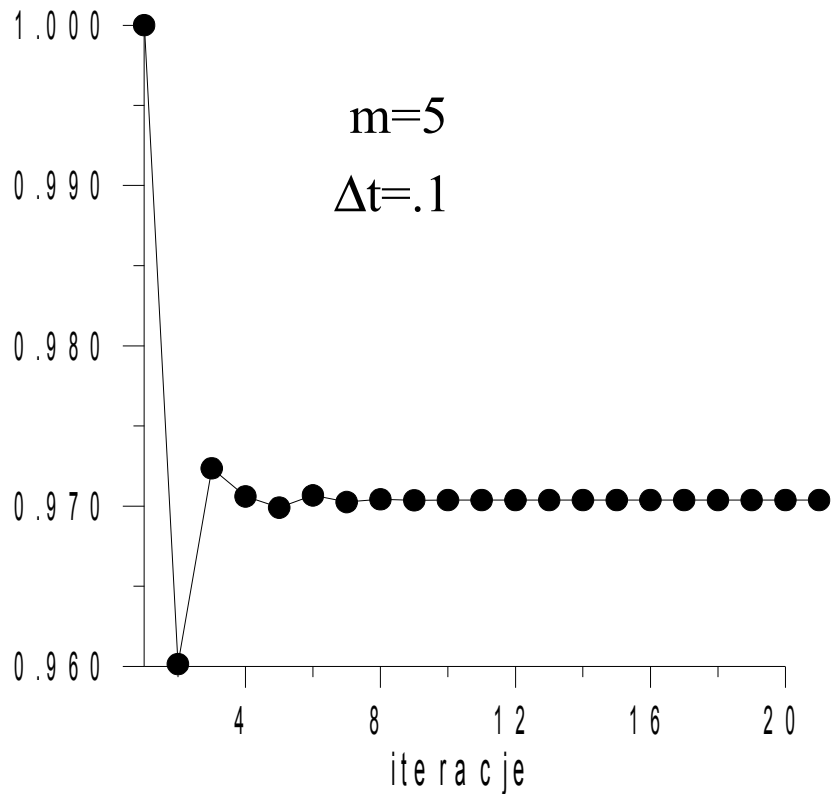
dla $\theta \neq 0$ – schemat niejawny – metoda Newtona lub iteracja funkcjonalna

CN + iteracja funkcjonalna

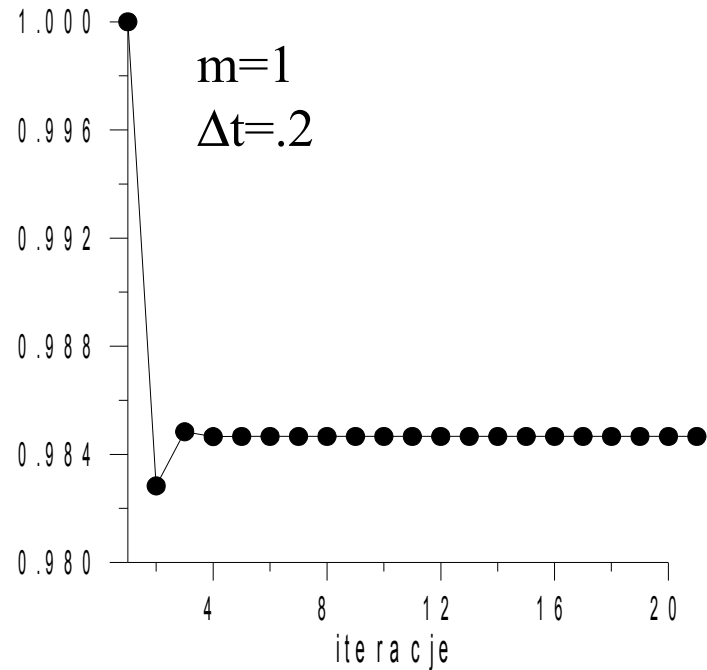
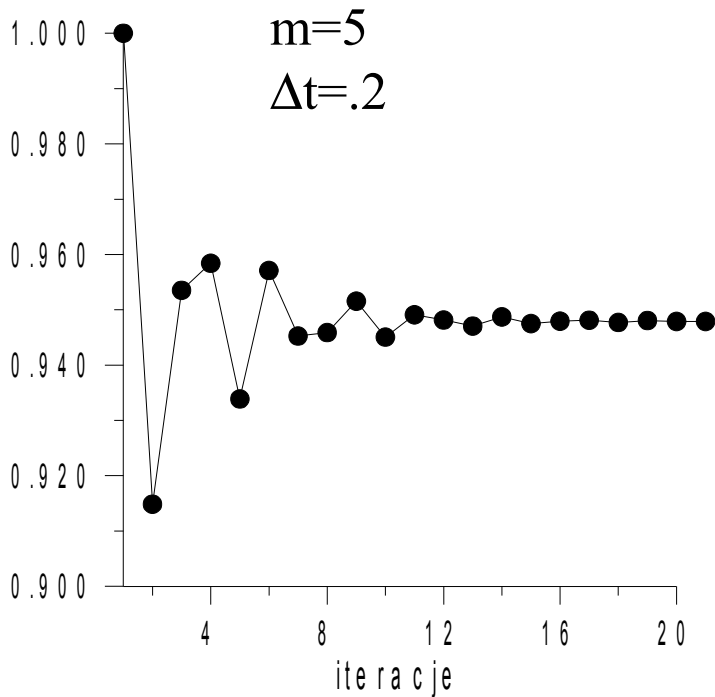
$$u_t = (u^m)_{xx}$$

$$u_i^{n+1} := u_i^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left[(u_{i+1}^n)^m + (u_{i-1}^n)^m - 2(u_i^n)^m + (u_{i+1}^{n+1})^m + (u_{i-1}^{n+1})^m - 2(u_i^{n+1})^m \right]$$

pierwszy krok czasowy,
uzgodnienie punktu w centrum $x=0$



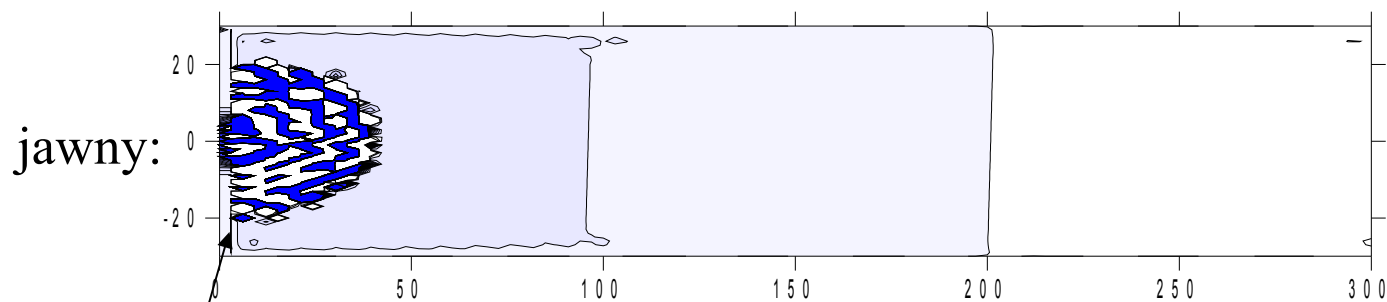
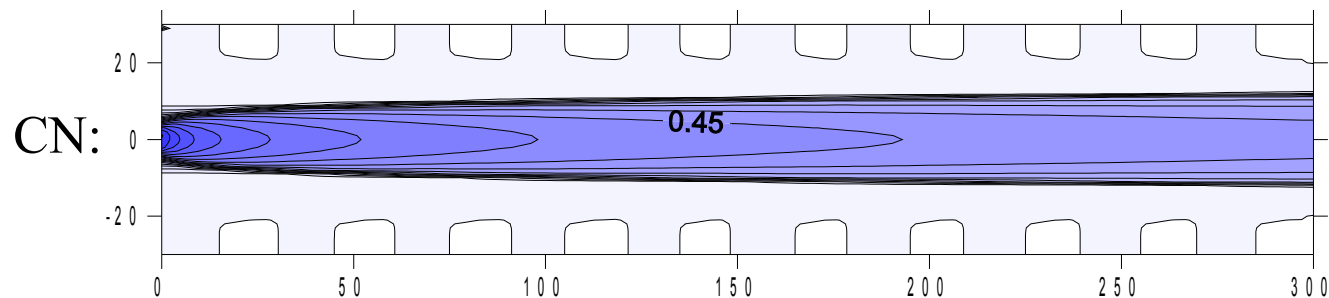
nieliniowe równanie dyfuzji CN,
zbieżność iteracji funkcjonalnej
punkt centralny, pierwszy krok czasowy



widzimy, że iteracja funkcjonalna nie rokuje dobrze
dla zbieżności równania nieliniowego przy dłuższym kroku czasowym

jeśli z iteracją kłopoty
może zastosować schemat jawny zamiast CN ?

$\Delta t=0.3$, 100 kroków samouzgodnienia iteracją funkcjonalną



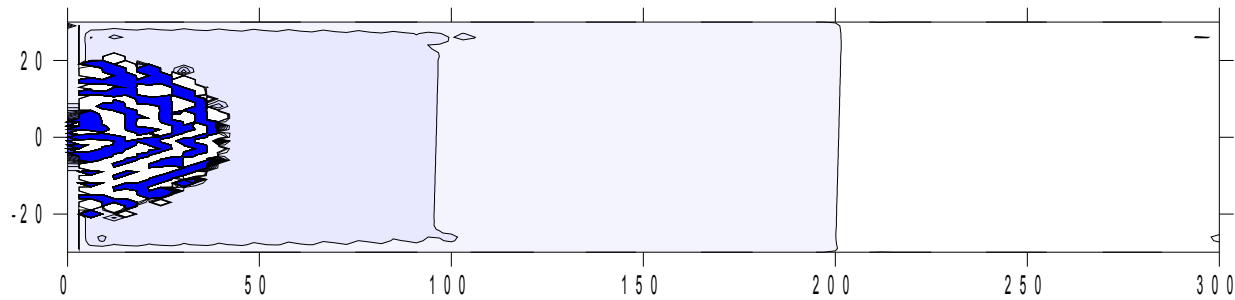
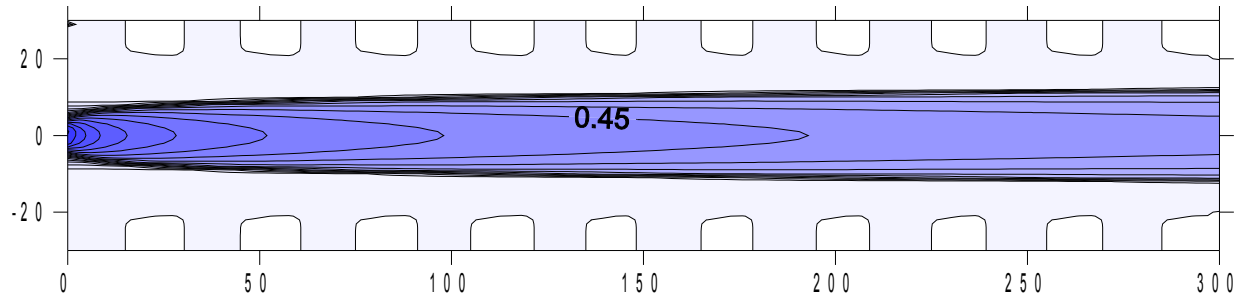
Zaczyna się dobrze

pojawiają się wartości 10^{14} po czym pakiet zanika

A może schemat jawny zamiast CN ?

$\Delta t=0.3$, 100 iteracji

CN



schemat jawny

pojawiają się wartości 10^{14} po czym pakiet znika

- 1) niejawność schematu jest potrzebna
 - 2) iteracja funkcjonalna się nie sprawdza
- metoda Newtona

metoda Newtona dla nieliniowego równania dyfuzji

$$F_j(\mathbf{U}^{n+1}) \equiv U_j^{n+1} - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\left((U_{j-1}^{n+1})^m - 2 (U_j^{n+1})^m + (U_{j+1}^{n+1})^m \right) \right] \\ - U_j^n - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\left((U_{j-1}^n)^m - 2 (U_j^n)^m + (U_{j+1}^n)^m \right) \right]$$

rozwiązania schematu dla $n+1$ kroku czasowego spełniają układ równań nieliniowych: $\mathbf{F}(\mathbf{U}^{n+1})=0$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}^{n+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{V}^k) + \mathbf{F}_{\mathbf{U}^{n+1}}(\mathbf{V}^k) (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^k) + O(\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^k\|^2)$$

rozwinięcie Taylora

↑
przybliżony wektor \mathbf{U}^{n+1} w k -tej iteracji
 $n+1$ – znaczy $n+1$ chwila czasowa

$$\mathbf{F}_{\mathbf{U}^{n+1}}(\mathbf{V}^k) (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^k) = -\mathbf{F}(\mathbf{V}^k)$$

układ równań liniowych na poprawę przybliżenia

$$\mathbf{V}^{k+1} := \mathbf{V}^k + (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^k)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{U}^{n+1}}(\mathbf{V}^k) (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^k) = -\mathbf{F}(\mathbf{V}^k)$$

$$U_0 = U_J = 0$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{U}^{n+1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial U_{J-1}^{n+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{J-1}}{\partial U_1^{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_{J-1}}{\partial U_{J-1}^{n+1}} \end{pmatrix} \longleftarrow \text{macierz Jakobiego}$$

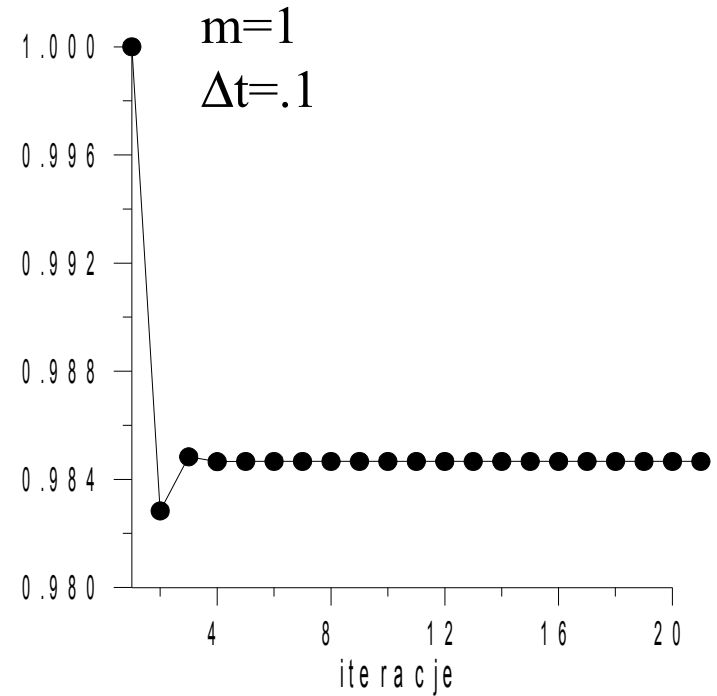
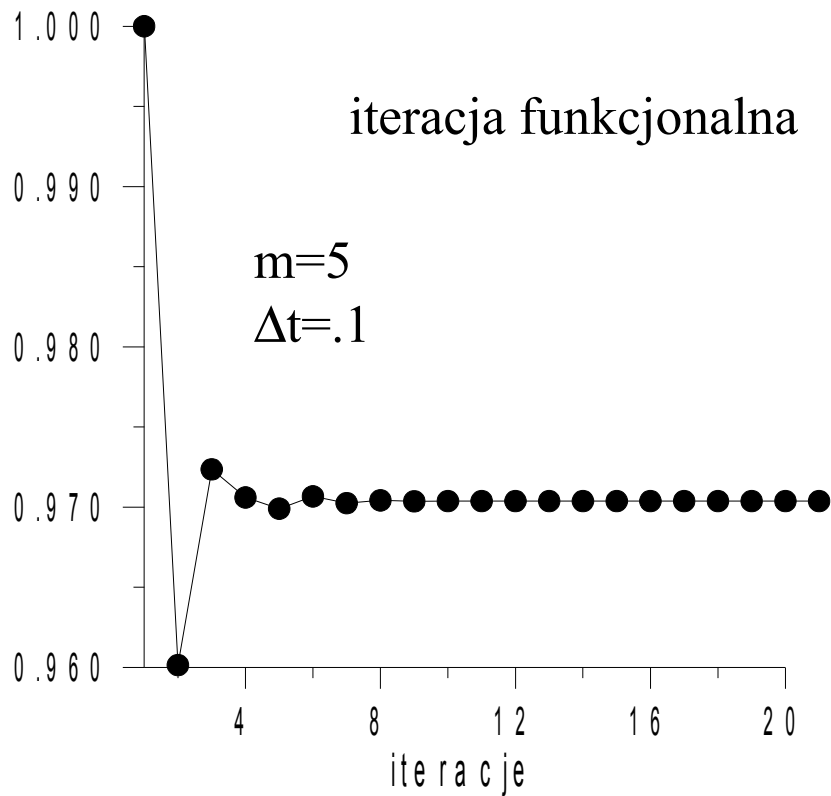
$$F_j(\mathbf{U}^{n+1}) \equiv U_j^{n+1} - \theta \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\left((U_{j-1}^{n+1})^m - 2 (U_j^{n+1})^m + (U_{j+1}^{n+1})^m \right) \right] \\ - U_j^n - (1 - \theta) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \left[\left((U_{j-1}^n)^m - 2 (U_j^n)^m + (U_{j+1}^n)^m \right) \right]$$

$$\mathbf{F}_{jj}(\mathbf{V}^k) = 1 + \frac{2m\theta\Delta t}{\Delta x^2} (V_j^k)^{m-1}$$

$$m. \text{ Jakobiego: trójprzekątniowa} \quad \mathbf{F}_{j(j-1)}(\mathbf{V}^k) = -\frac{m\theta\Delta t}{\Delta x^2} (V_{j-1}^k)^{m-1}$$

$$\mathbf{F}_{j(j+1)}(\mathbf{V}^k) = -\frac{m\theta\Delta t}{\Delta x^2} (V_{j+1}^k)^{m-1}$$

Wyniki [CN] dla pierwszego kroku czasowego



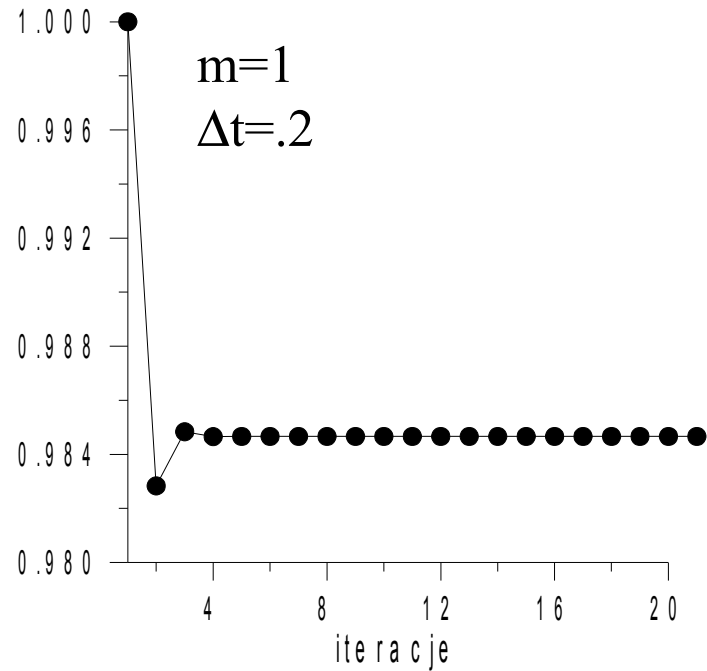
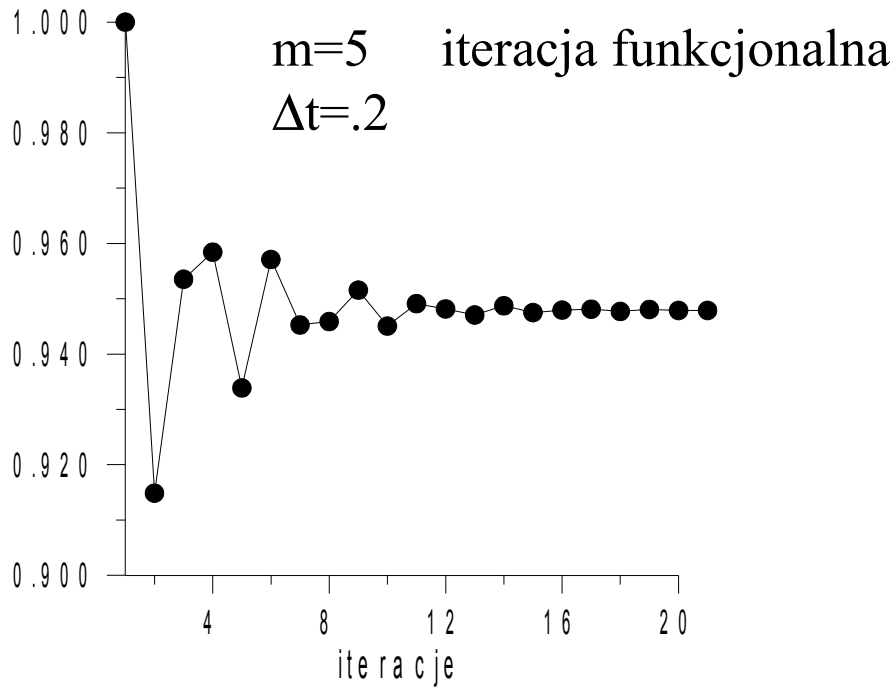
Metoda Newtona:

1	1
2	0.970743147366556
3	0.970376491139719

Metoda Newtona:

1	1
2	0.9922461168083
3	0.992246116808

Wyniki [CN] dla pierwszego kroku czasowego



Metoda Newtona:

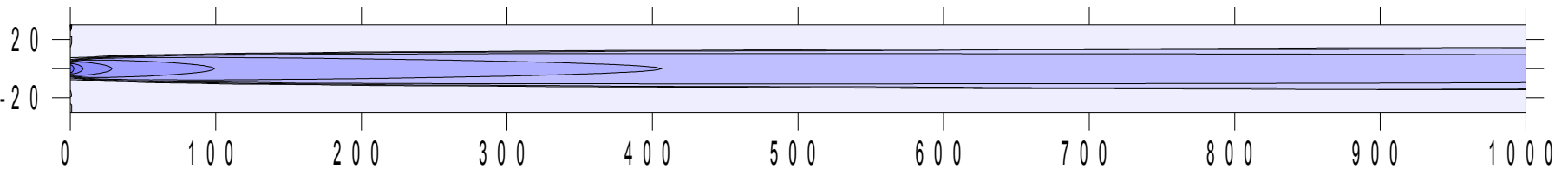
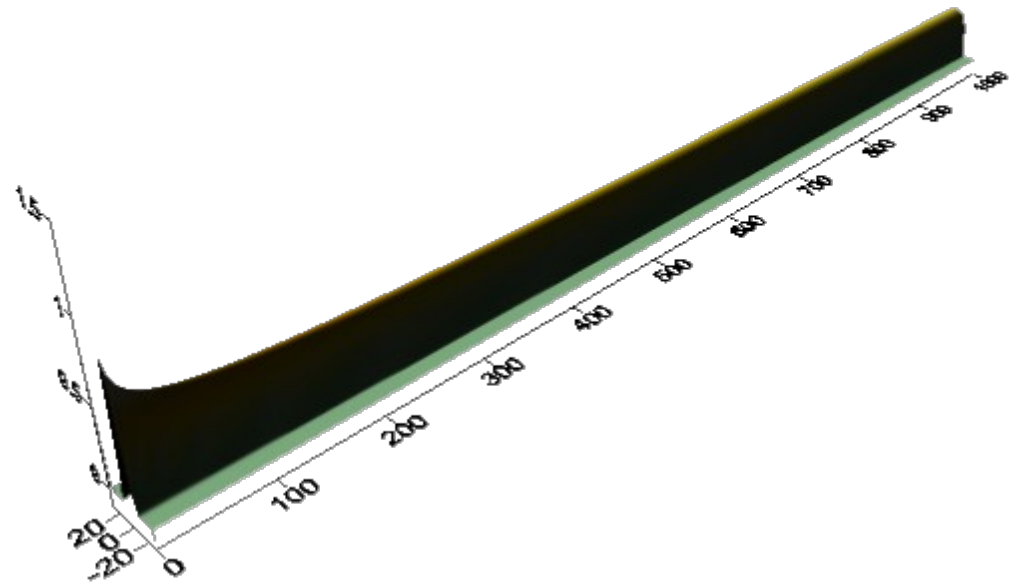
1	1
2	0.949526520122893
3	0.947925874533601
4	0.947923849482469

Metoda Newtona:

Równanie liniowe = zbieżność metody Newtona w jednej iteracji

1	1
2	.98466247689
3	.98466247689

$m=5$, $dt=1$ z iteracją Newtona



Wniosek: aby rozwiązać równania nieliniowe z rozsądnym krokiem czasowym potrzebna jest metoda niejawna

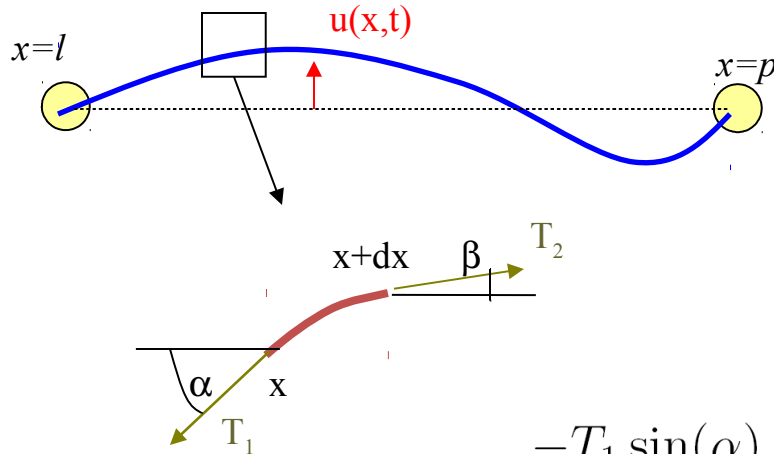
do rozwiązania nieliniowych równań schematu - iteracja Newtona

Równanie dyfuzji oraz dyfuzji-adwekcji – typowe paraboliczne

(opisuje dążenie do równowagi).

Dziś zajmiemy się typowym równaniem hiperbolicznym
elektro-magnetyczne)
równanie falowe (dla struny)

(oscylacje: mechaniczne, elektryczne,



(II zasada Newtona $F=ma$)

$$-T_1 \sin(\alpha) + T_2 \sin(\beta) = \rho(x) dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

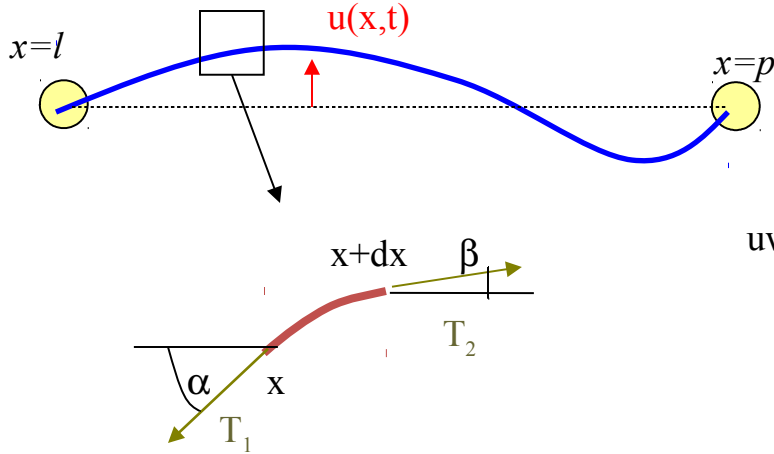
siła naciągu struny T (kierunek poziomy):

$$T = T_1 \cos(\alpha) = T_2 \cos(\beta)$$

$$-\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\rho(x)}{T} dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

Dziś zajmiemy się typowym równaniem hiperbolicznym
 równanie falowe (dla struny)

(oscylacje)



uwaga:

$$\tan(\alpha) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x$$

$$\tan(\beta) = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx}$$



$$-\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\rho(x)}{T} dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{dx} \left(\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_x \right) = \frac{\rho(x)}{T} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

\$dx \to 0\$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$c(x) = \sqrt{\frac{T}{\rho(x)}}$$

(prędkość rozchodzenia się drgań)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c – stałe: Ogólne rozwiązanie dla nieskończonego ośrodka (d’Alamberta)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) = 0$$

$$u(x, t) = f(x \pm ct) \longrightarrow$$

dowolna funkcja
drgania rozchodzące się bez zmiany kształtu
[brak dyspersji w równaniu falowym]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

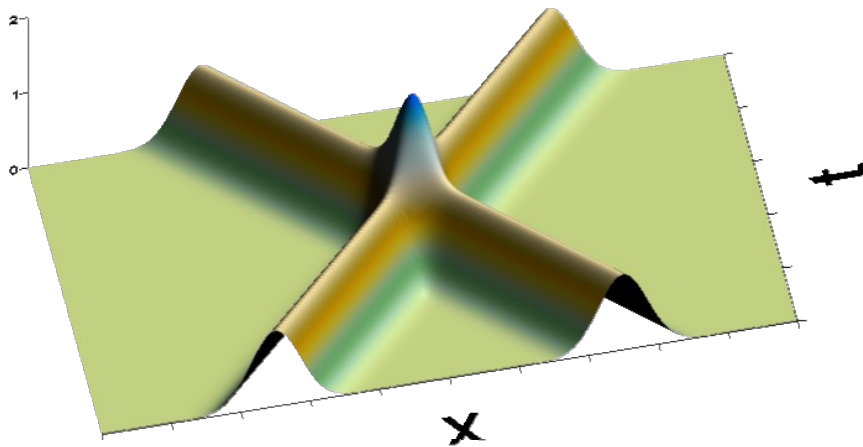
Liniowość równania:

$$\frac{\partial^2 (u + v)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (u + v)}{\partial x^2}$$

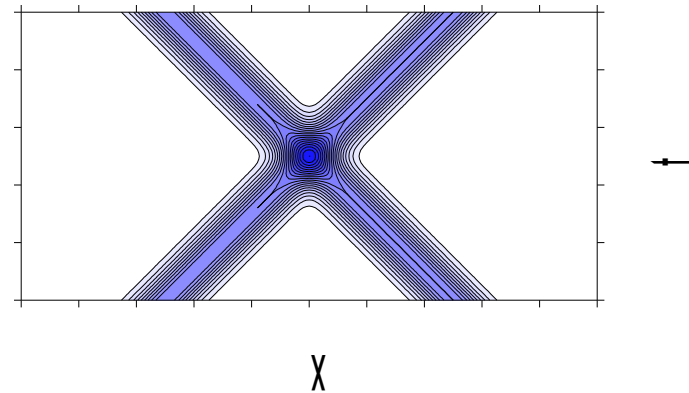
zasada superpozycji

Liniowość równania i zasada superpozycji:

Sygnały rozchodzą się niezależnie od siebie



$$F = \exp(-(x-0.5+ct)^2) + \exp(-(x+0.5-ct)^2)$$



Sygnały mijają się bez zmiany kształtu [(jedna fala przenika drugą.)]

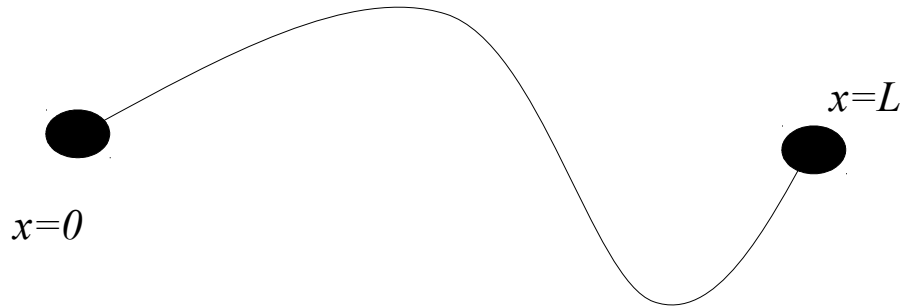
ponieważ równanie liniowe: jeśli wskażemy bazę zupełną funkcji ze znaną ewolucją czasową = problem rozwiązany

baza: mody normalne (fale stojące) (drżania własne)

baza: mody normalne (fale stojące) (drgania własne)

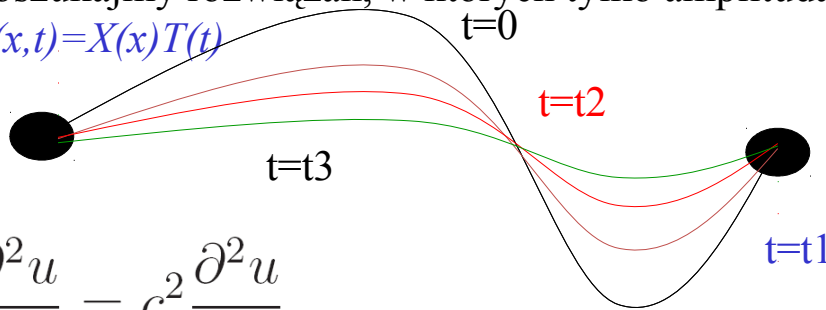
Dwupunktowe warunki brzegowe

$$u(0,t)=u(L,t)=0$$



Poszukajmy rozwiązań, w których tylko amplituda (a nie kształt fali) nie zależy od czasu:

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

$$T(t) = \cos(\omega t + \phi) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$$

[gdy gęstość struny zmienna c może być funkcją położenia]

Równanie na część przestrzenną fal stojących (drania własne, drgania normalne)

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\frac{\omega_n^2}{c^2(x)} X_n(x) \quad \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

Dla c niezależnego od x :

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -k_n^2 X_n(x)$$

k -liczba falowa, wektor falowy

$k = 2\pi / \lambda$ tutaj λ długość fali

$k = \omega / c$

$$X_n(x) = \sin(k_n x)$$

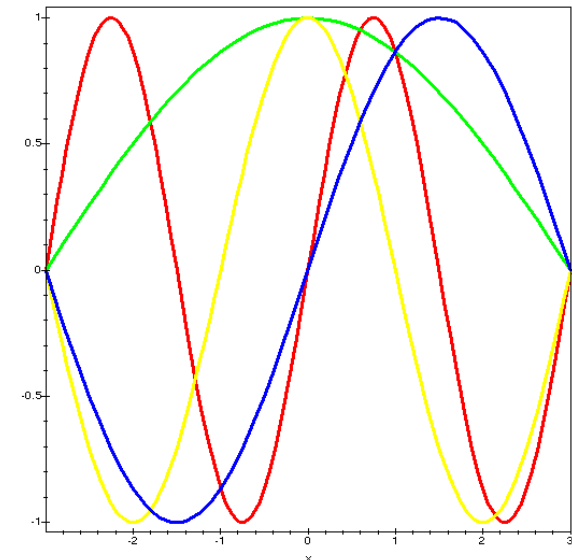
WB: spełnione, gdy $X(0) = X(L) = 0$

$$k_n = n\pi / L$$

$$L = \frac{n}{2} \lambda_n$$

Fale stojące:

Między warunkami brzegowymi całkowita liczba połówek długości fal..



0

L

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -k_n^2 X_n(x) \quad \text{warunki brzegowe: kwantyzacja } k \rightarrow \text{kwantyzacja } \omega$$

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

$$X_n(x) = \sin(k_n x), \quad T_n = \sin(\omega_n t), \quad \cos(\omega_n t)$$

$$k_n = n\pi / L$$

$$k = \omega / c \quad \longrightarrow \quad \omega_n = ck_n$$

przestrzenne drgania własne nie zależą od c ,
ale częstości tak.



$$c = \sqrt{T / \rho}$$

T oznacza naciąg struny

Wiemy, że niższe tony
dają struny o większej grubości [ρ].

Wiemy również, że
im silniej struna naciągnięta tym
wyższy dźwięk.

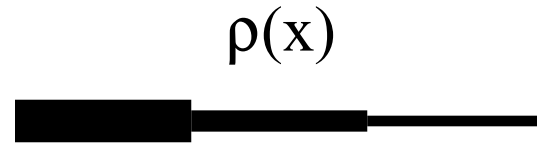
Drgania własne dla zmiennej gęstości struny

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\frac{\omega_n^2}{c^2(x)} X_n(x)$$

W przypadku ogólnym [$c=c(x)$] przyda się rachunek numeryczny. Wyliczyć X_n oraz ω_n

$$c(x) = \sqrt{T_0/\rho(x)}$$

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\rho(x) \frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x)$$



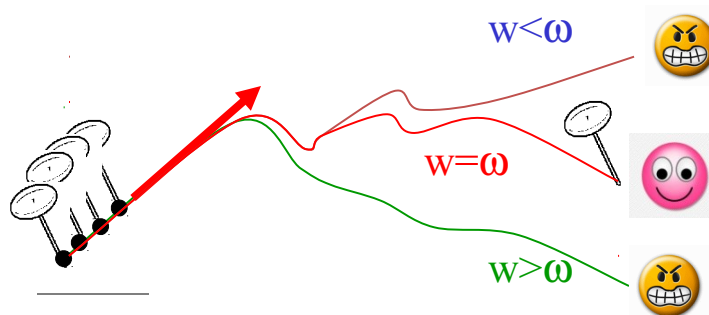
Dyskretyzujemy drugą pochodną, liczymy $X_n(x+dx)$

$$X_n(x + \Delta x) = -\Delta x^2 \rho(x) \frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x) - X_n(x - \Delta x) + 2X_n(x)$$

Równanie własne z warunkami brzegowymi: Metoda strzałów.

$$X_n(x + \Delta x) = -\Delta x^2 \rho(x) \frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x) - X_n(x - \Delta x) + 2X_n(x)$$

ω – parametr równania
 ω – dokładna wartość własna



w X_0 wstawić warunek brzegowy

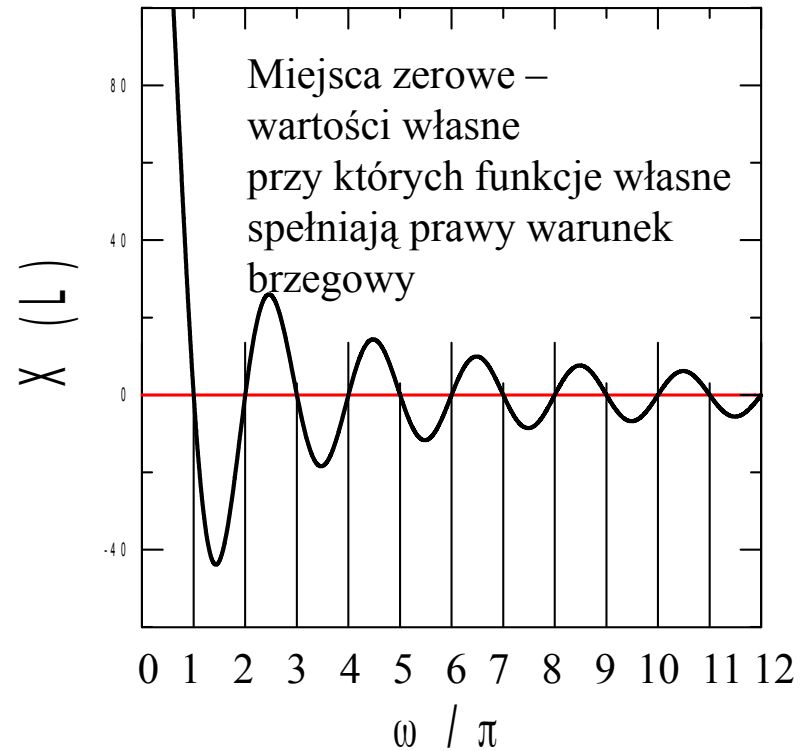
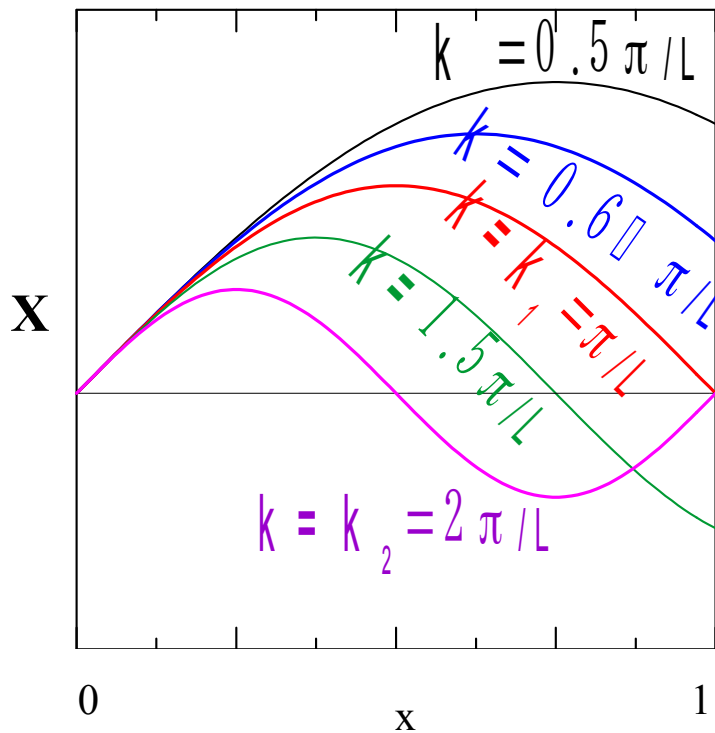
ale co wstawić za X_1 ?? (dla równania Poissona opisywanego dla metody Numerowa to był poważny problem)

dla drgań własnych wstawiamy cokolwiek
(równanie własne jest jednorodne rozwiązania określone co do stałej multiplikatywnej)

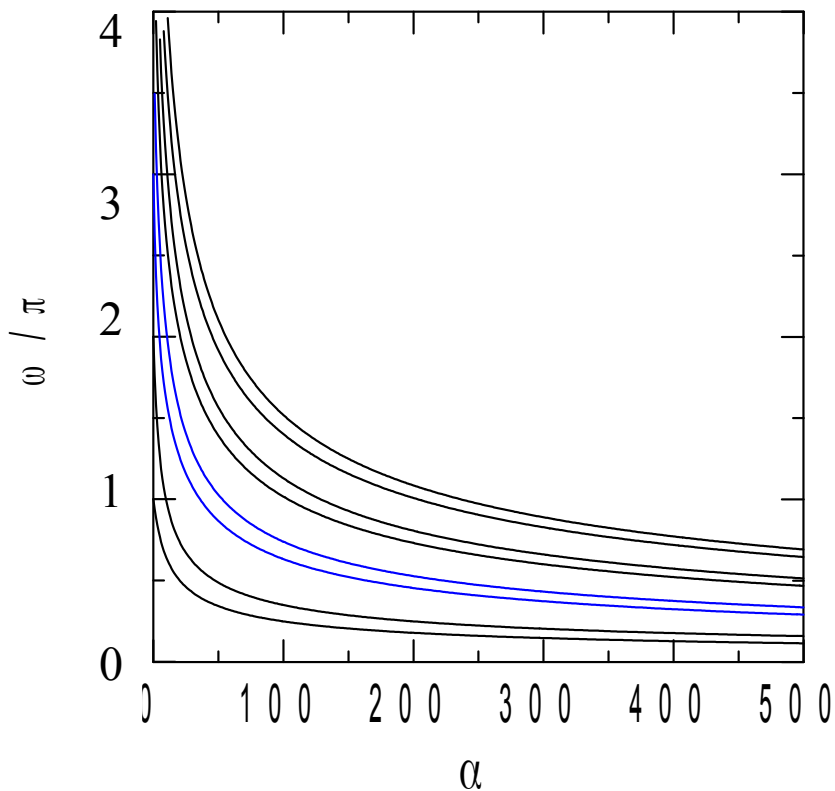
Test metody dla $\rho(x)=1$
 ($L=1, T_0=1$)

$$g(x) = \rho(x) \frac{\omega^2}{T_0}$$

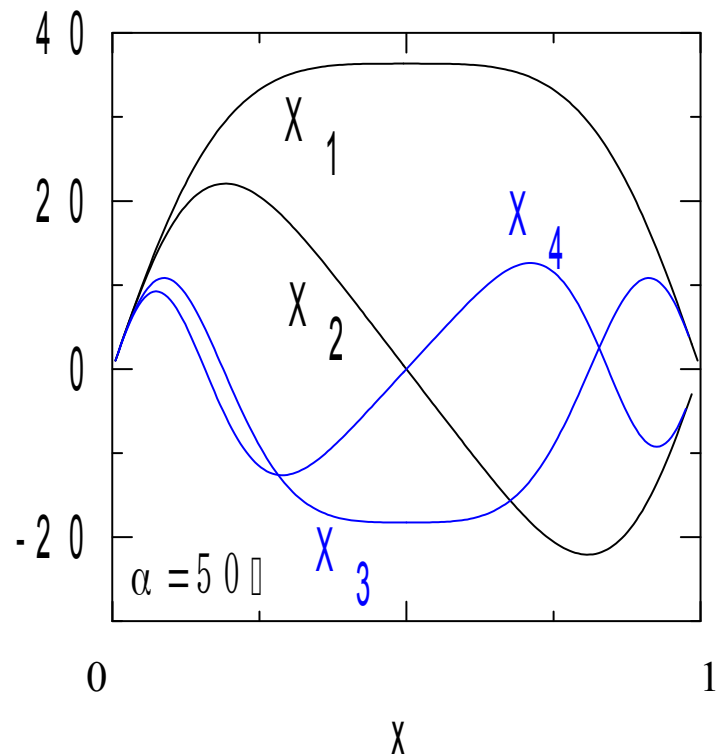
Analityczne: $k_n = n\pi/L$



Przykład: $\rho(x)=1+4\alpha(x-1/2)^2$ (struna cięższa przy mocowaniach)



$\alpha=0$ – częstości własne równoodległe
 Częstości własne maleją z α (cięższa struna)
 duże α – częstości grupują się w pary



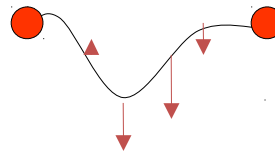
W każdej parze: funkcja parzysta i nieparzysta.
 Środek struny – prawie nieważki,
 na częstości wpływ ma kształt funkcji przy brzegach – a tam zbliżony dla każdej funkcji z pary

Równanie ogólne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Warunki początkowe:

$$u(x, t=0) \text{ oraz } v(x, t=0) = du/dt$$



Zadać wychylenie
i prędkości

rozłożyć warunki początkowe na drgania własne
problem zależności czasowych jest rozwiązany

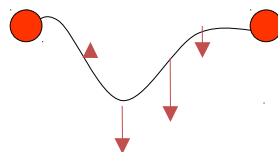
Drgania normalne a ogólne rozwiązania równania falowego

Równanie ogólne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Warunki początkowe:

$$u(x, t=0) \text{ oraz } v(x, t=0) = du/dt$$



Zadać wychylenie
i prędkości

rozłożyć warunki początkowe na drgania własne
problem zależności czasowych jest rozwiązany

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

$$v(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \omega_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \omega_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

w chwili $t=0$, za kształt struny odpowiadają współczynniki c_n
a za prędkość – współczynniki s_n

Superpozycja drgań własnych:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

Warunki początkowe $u(x, t = 0) = g(x)$

$$\frac{du(x, t = 0)}{dt} = h(x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x)$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \omega_n \sin(k_n x)$$

$$\longrightarrow \int_0^L \sin(k_m x) dx \times$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx$$

$$s_n = \frac{2}{L \omega_n} \int_0^L h(x) \sin(k_n x) dx$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

Uwaga: dla równań dyfuzji i adwekcji warunek początkowy był tylko jeden czasowy rząd równania był = 1. Dla równania drugiego rzędu w czasie, wartość $u(x, t=0)$ nie wystarczy dla jednoznacznego określenia rozwiązania.

dla drgań własnych jednorodnej struny:
Dyskretna sinusowa transformata Fouriera

rozkład na mody normalne

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \quad \text{na przedziale } (0,L)$$

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx$$

Rozwinięcie w szereg Fouriera:

$g(x)$ = okresowa, odcinkowo ciągła z okresem T :

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x)) \quad o_n = 2\frac{n\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(x) \cos(\omega_n x) dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T g(x) \sin(\omega_n x) dx$$

Rozkład na drgania normalne a szereg Fouriera:
drgania podległe warunkom brzegowym $g(0)=g(L)=0$.
dla naszego problemu L to długość struny i nie ma
interpretacji okresu (na strunie mieści się połowa długości fali).

Warunki Dirichleta zbieżności szeregu Fouriera

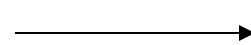
$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x))$$

Rozwinięcie Fouriera zbieżne w sensie jednorodnym

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_I \left| g(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^N (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x)) \right|^2 dx = 0$$

o ile $g(x)$ 1) całkowna w kwadracie

2) odcinkowo ciągła

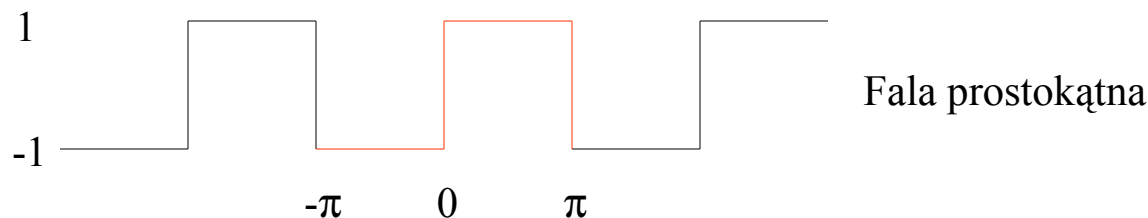


rozwinięcie Fouriera dąży do $g(x)$ „prawie wszędzie”
tzn. poza punktami dyskretnymi punktami
(rozwinięcie Fouriera jest wszędzie ciągłe!)

Twierdzenie Dirichleta: W punktach nieciągłości szereg Fouriera zbieżny
do $g(x) = [g(x-0) + g(x+0)] / 2$

tw. Dirichleta nie rozwiązuje wszystkich problemów

dla struny: pewien praktyczny problem z *kanciastymi* (nieróżniczkowalnymi) warunkami początkowymi.



$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x))$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(\omega_n x) dx = 0$$

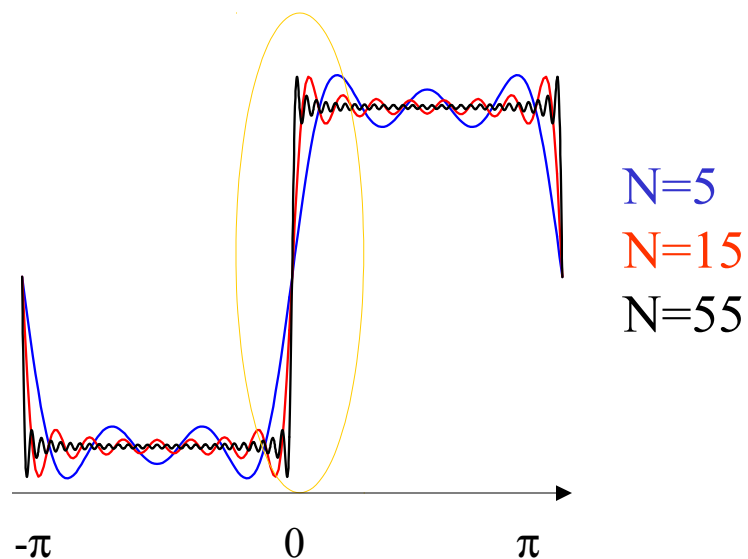
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\omega_n x) dx = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{dla } n \text{ nieparzystego} \\ 0 & \text{dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right)$$

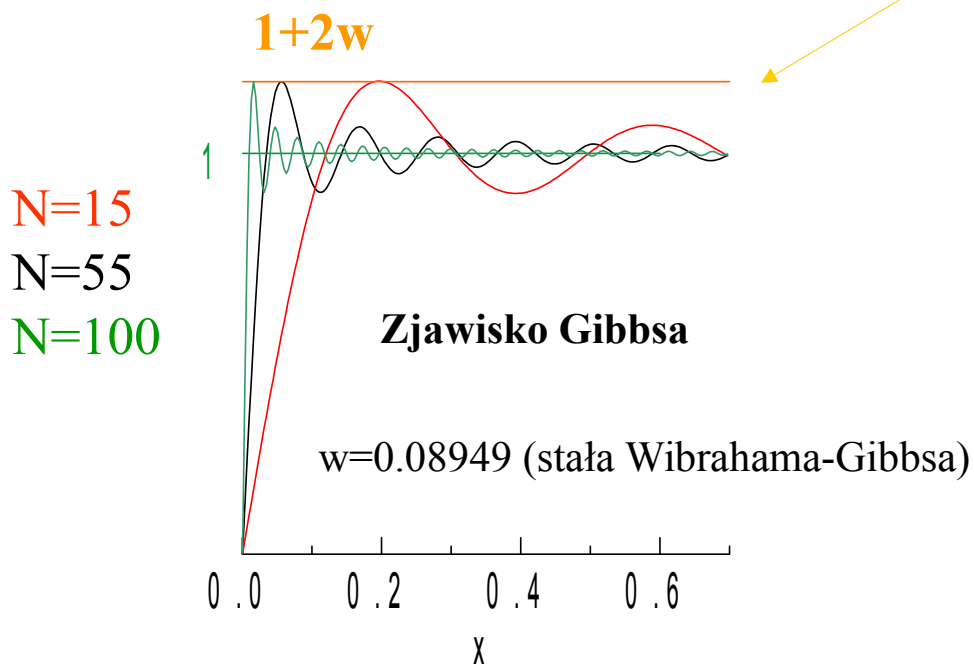
↑
W punkcie nieciągłości = $[g(0^-) + g(0^+)] / 2 = (-1 + 1) / 2 = 0$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$

Nad nieciągłością wartość schodka
przestrzelona o około 18%



N=5
N=15
N=55



Na PC pracujemy ze skończonymi bazami:

Równania różniczkowe przez rozkład
warunku początkowego na drgania własne
nie rozwiążemy dokładnie, jeśli
ten jest nieciągły.

Na PC pracujemy ze skończonymi bazami...

Zbieżność szeregu Fouriera w sensie bezwzględny

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x))$$

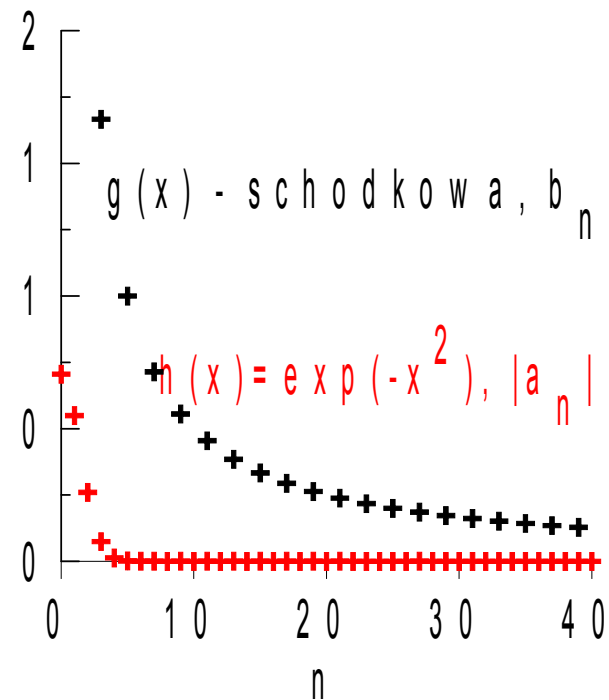
Szereg jest bezwzględnie zbieżny jeśli można go *obciąć* na pewnym wyrazie rozwinięcia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$$

Rozwinięcie fali prostokątnej nie jest bezwzględnie zbieżne:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \infty \quad \text{Bo ogólny szereg } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b} \text{ harmoniczny jest rozbieżny}$$

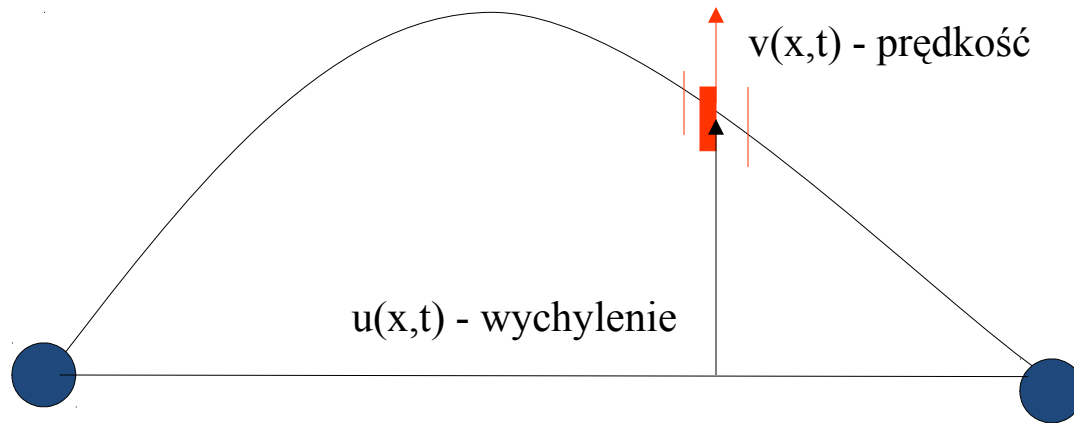
Wniosek: w skończonej bazie funkcji własnych możemy rozwiązywać tylko problemy z warunkiem początkowym, którego rozwinięcie w szereg Fouriera jest bezwzględnie zbieżne



Metoda różnic skończonych = uwalnia nas od problemu rozkładu na drgania własne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Rozwiązanie numeryczne: dzielimy strunę na N fragmentów,
dla każdego z nich rozwiązujemy równania Newtona
(zabieg odwrotny do wyprowadzenia równania różniczkowego)

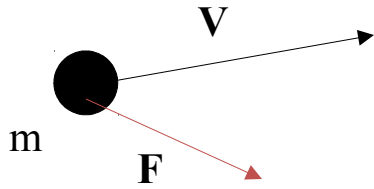


$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

z równania falowego:

$$a(x, t) = \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2}$$

Schemat Verleta (popularny dla symulacji dynamiki molekularnej)



$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Schemat Verleta

Phys. Rev. **159**, 98 (1967)

Pomysł: rozwinąć położenie \mathbf{r} w chwili $t+\Delta t$ i $t-\Delta t$ w szereg Taylora

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t - \Delta t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{v}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t) + \mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

tylko o jeden rząd
mniej dokładny niż RK4

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t) + \mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

Schemat Verleta

Jeśli chodzi nam tylko o tor ruchu: świetny schemat.

Nie używa *prędkości*, ale ta często potrzebna

np do wyliczenia energii, ale również : sił (np. oporu, Lorentza)

jeśli siły niezależne od prędkości, a informacja o nich potrzebna jest do innych celów
można - wykonać krok do $t+\Delta t$, a potem

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2) \leftarrow$$

rzęd błędu wyższy,
wciąż dokładnie dla ruchu
jednostajnie przyspieszonego
 a stałe między t a Δt

jeśli siły zależą od prędkości: nie wykonamy kroku do $t+\Delta t$, możemy co najwyżej:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t - \Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad \text{kiepsko: wynik dokładny tylko dla } a=0$$

prędkościowa wersja schematu Verleta (dający prędkości jednocześnie z położeniami)

Położenia – poświęcamy jeden rząd dokładności:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Potrzebny przepis na prędkość w chwili $t + \Delta t$ z błędem $O(\Delta t^2)$:

Rozwinąć \mathbf{r} w Taylora względem punktu $t + \Delta t$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{V}(t + \Delta t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t + \Delta t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Dodać stronami:

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t)) + O(\Delta t^2)$$

Wzory podkreślone na czerwono – Verlet prędkościowy.

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}(t + \Delta t) + \mathbf{a}(t)) + O(\Delta t^2)$$

Verlet prędkościowy

$$\mathbf{V}(t + \Delta t/2) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}(t)$$

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta t\mathbf{V}(t + \Delta t/2)$$



Inny (popularny) zapis wzorów w czerwonej ramce

$$\mathbf{V}(t + \Delta t) = \mathbf{V}(t + \Delta t/2) + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{a}(t + \Delta t)$$

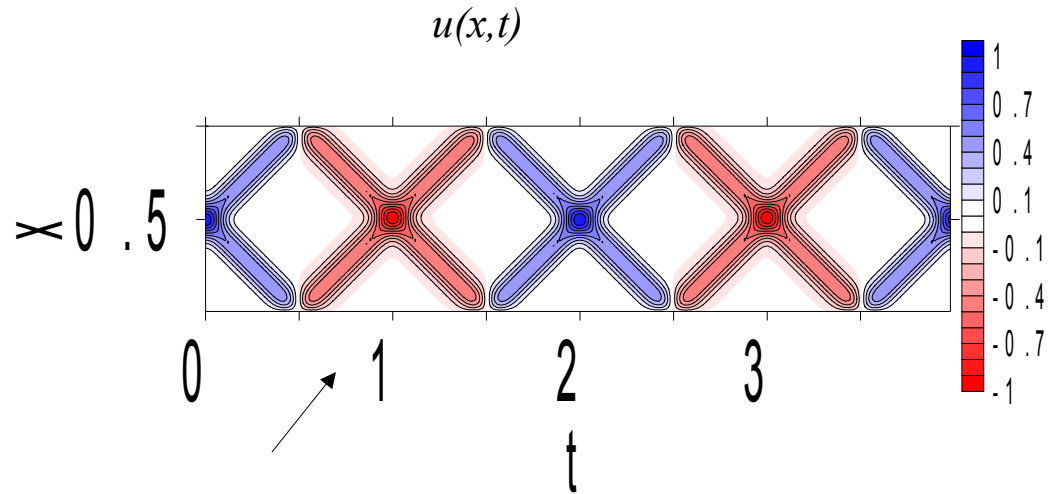
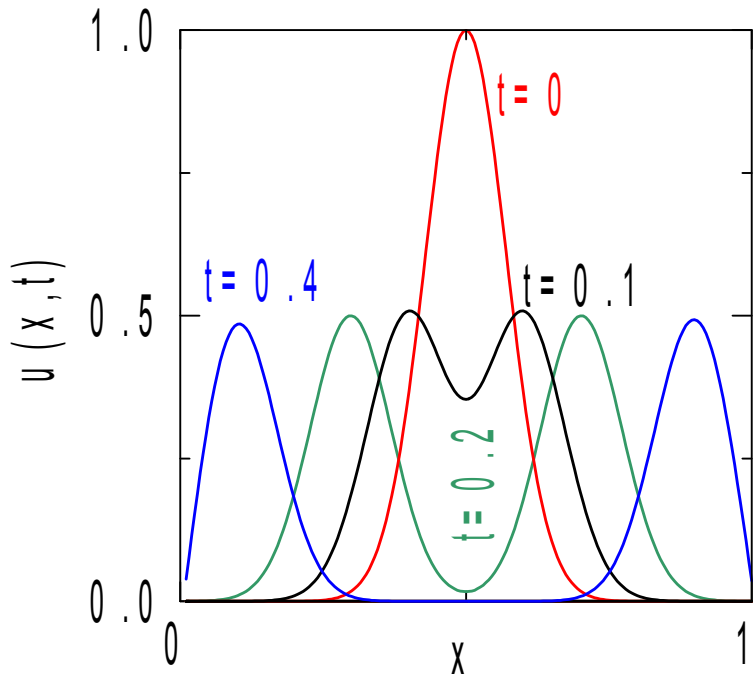
uwaga: jeśli siły (przyspieszenia) zależą od prędkości
ostatnie równanie jest niejawne

Rozwiązania numeryczne 1. (laboratorium)

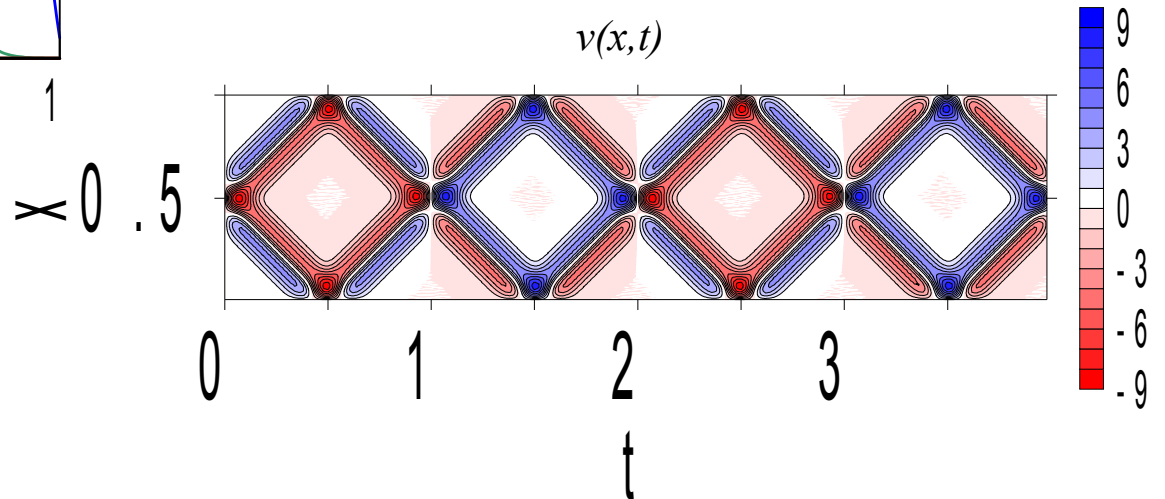
$L=1$

$$u(x,t=0) = \exp[-100(x-0.5)^2]$$

$$v(x,t=0) = 0$$

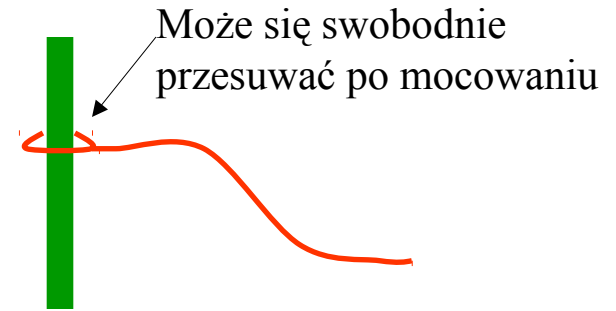


Odbicie ze zmianą fazy (idzie górą, wraca dołem)



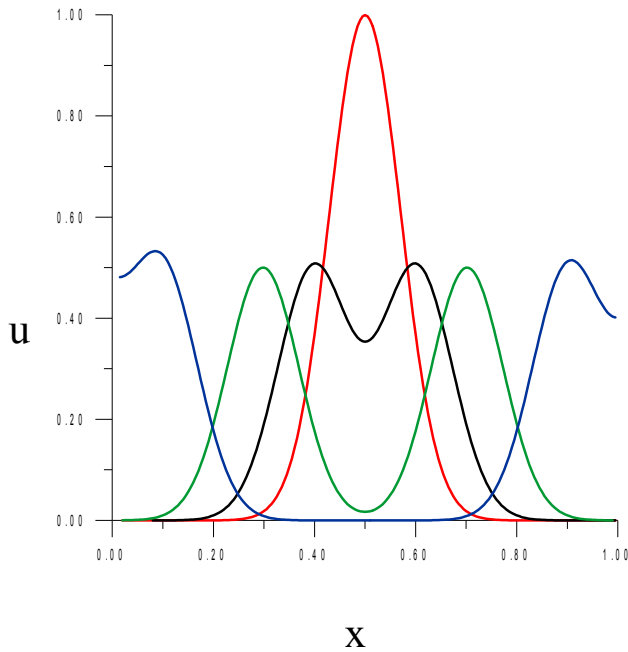
Rozwiązanie numeryczne 2.

Swobodne warunki brzegowe:
na brzegach na strunę nie działa żadna siła pionowa:

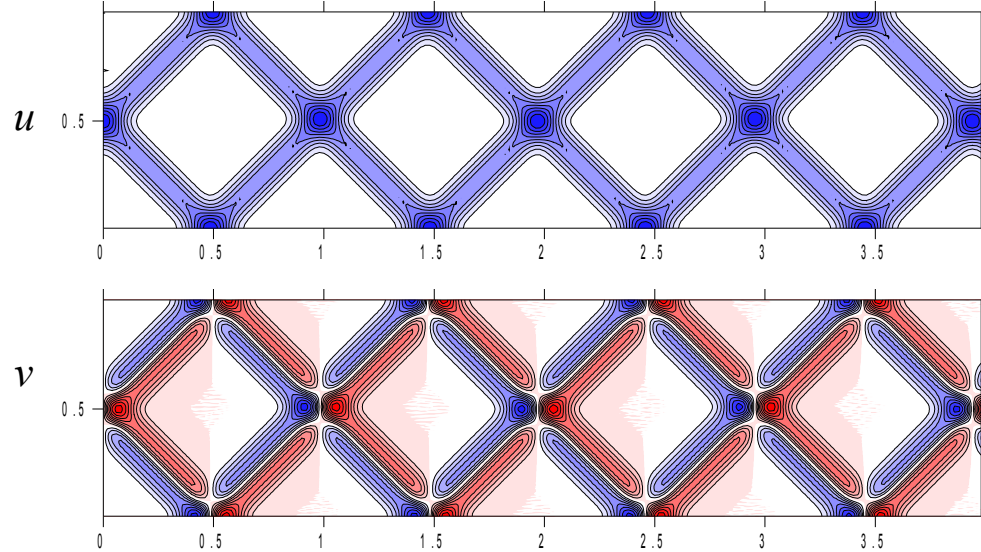


Warunek brzegowy
Neumana (na pochodną)
zamiast Dirichleta
(na wartość funkcji)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x=0,t)} = 0$$



Odbicie bez zmiany fazy: idzie górą, górą wraca



energia drgania:

$$dE = \frac{1}{2}\rho(x)dxv^2(x, t) + \frac{1}{2}T_0dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

kinetyczna

Potencjalna: odkształcenie struny

Dla $\rho(x)=\rho$

$$E = \frac{1}{2}\rho \int_0^L v^2(x, t)dx + \frac{1}{2}T_0 \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx$$

Dla pojedynczego modu własnego

$$u(x, t) = \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

$$E = \frac{\omega_n^2}{2}\rho \cos^2(\omega_n t) \int_0^L \sin^2(k_n x)dx + \frac{k_n^2}{2}T_0 \sin^2(\omega_n t) \int_0^L \cos^2(k_n x)dx$$

$$E = \frac{\omega_n^2}{2}\rho \cos^2(\omega_n t) \frac{L}{2} + \frac{k_n^2}{2}T_0 \sin^2(\omega_n t) \frac{L}{2}$$

$$\omega = kc$$
$$T_0 = \rho c^2$$

$$E = \frac{L}{4}(kc)^2 \rho (\cos^2(\omega_n t) + \sin^2(\omega_n t)) \leftarrow \text{Kinetyczna na potencjalną się zmienia, całkowita zachowana}$$

Analiza chwilowa drgania

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

Rozwiązując równanie falowe schematem Verleta można z zależności czasowych wydobyć częstości własne bez konieczności rozwiązywania równania własnego

Gdy drgania tłumione - częstość przestrzenna modów własnych nie ulega zmianie (zobaczmy), ale czasowa – tak.

Analiza chwilowa drgania na podstawie wychylenia zależności położeniowych = wychylenia $g(x)$ i prędkości $h(x)$ w *danej chwili*.

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k_n x) dx$$

$$s_n = \frac{2}{L\omega_n} \int_0^L h(x) \sin(k_n x) dx$$

Równanie fali tłumionej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{du}{dt} \quad \begin{array}{l} a > 0 = \text{stała tłumienia} \\ c \text{ niezależna od położenia} \end{array}$$

Opory związane z prędkością struny [np. powietrza]

Warunki brzegowe $u(x=0,t)=u(x=L,t)=0$

Warunki początkowe $u(x,t)$ oraz $v(x,t)$.

Mody normalne dla fali tłumionej:

Poszukajmy rozwiązania metodą separacji zmiennych $u(x,t)=X(x)T(t)$

$$XT'' = c^2 X''T - 2aT'X / : XT$$

$$\frac{T''}{T} + \frac{2aT'}{T} = \frac{c^2 X''}{X} = -\omega^2$$

część przestrzenna bez zmian!

$X_n(x) = \sin(k_n x)$

$$k_n = n\pi / L$$

$$k = \omega / c$$

Część przestrzenna:
$$\frac{T''}{T} + \frac{2aT'}{T} = -\omega_n^2 = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2$$

$$T'' + 2aT' + \omega_n^2 T = 0$$

wstawiamy $T = \exp(rt)$, równanie charakterystyczne: $\exp(rt) [r^2 + 2ar + \omega_n^2] = 0$,

szukamy rozwiązań na r

możliwe przypadki: 2 pierwiastki rzeczywiste, jeden podwójny, obydwa zespolone

Warunki początkowe: $T'(t = 0) = 0$ Struna spoczywa w chwili początkowej

$T(t = 0) = 1$ Rozwiązanie określone co do stałej multiplikatywnej (równanie jednorodne)

$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : \exp(-at) \left[\cosh\left(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh\left(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t\right) \right] \\ \omega_n = a : \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : \exp(-at) \left[\cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t\right) \right] \end{cases}$$

$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : & \exp(-at) \left[\cosh\left(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh\left(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t\right) \right] \\ \omega_n = a : & \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : & \exp(-at) \left[\cos\left(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin\left(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t\right) \right] \end{cases}$$

$$\omega_n = nc\pi/L$$

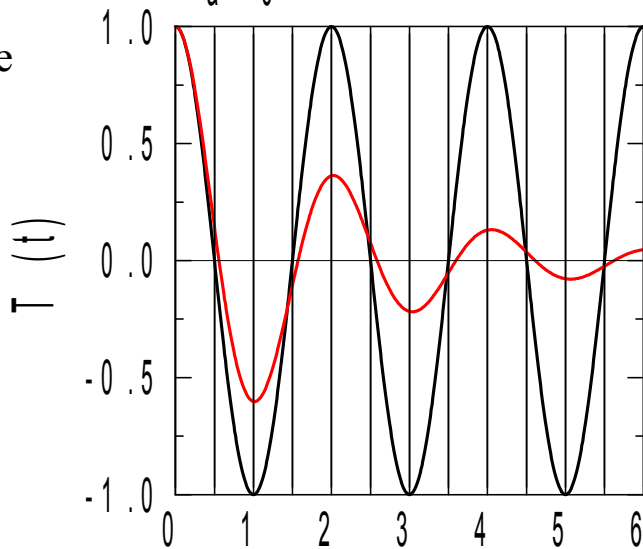
$$L=1, c=1, \omega_n = n\pi$$

Słabe tłumienie $a < \omega_1$

$$a = 0.5$$

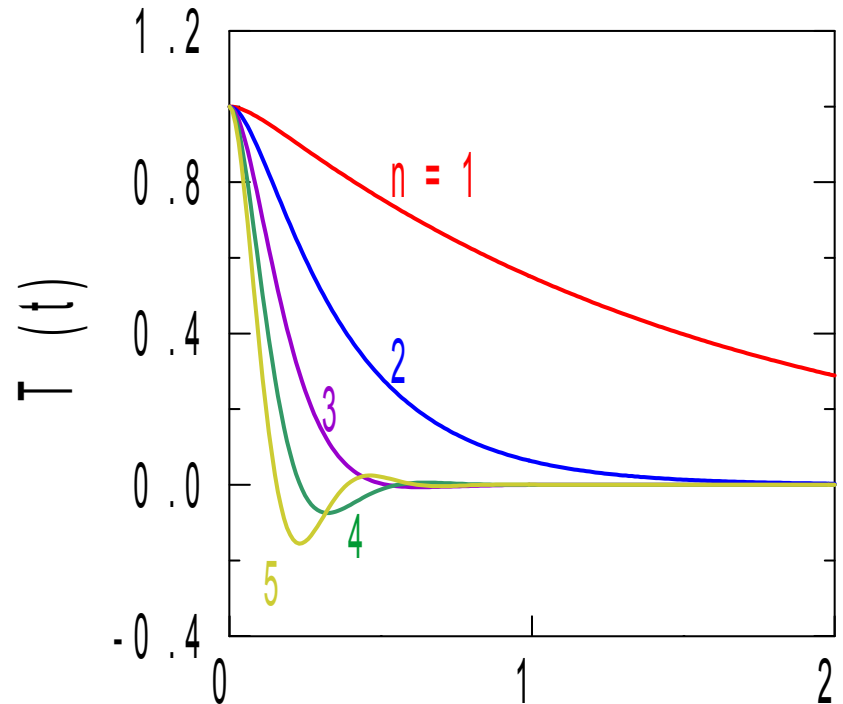
$$a = 0$$

Drganie
z ω_1



Poza zanikiem drgania
widzimy zmniejszenie częstości

$a=8$, ω_1 i ω_2 = „przetłumione”
pozostałe „tłumione”



Najpierw zgasną wyższe tłumienia

Rozwiązanie równania fali tłumionej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{du}{dt}$$

rozwiązanie ogólne:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(t) \sin(k_n x)$$

Położeniowa analiza Fourierowska

- rozkład na mody normalne w danej chwili : $c_n(t)$

= część przestrzenna nie zmienia się pod wpływem tłumienia.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

$$v(x, t) = -\omega_n \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

↙
w ogólności
zależne od czasu

$$\int_0^L u(x, t) \sin(k_n x) dx = c_n \frac{L}{2} \cos(\omega_n t)$$

$$\int_0^L v(x, t) \sin(k_n x) dx = -\omega_n c_n \frac{L}{2} \sin(\omega_n t)$$

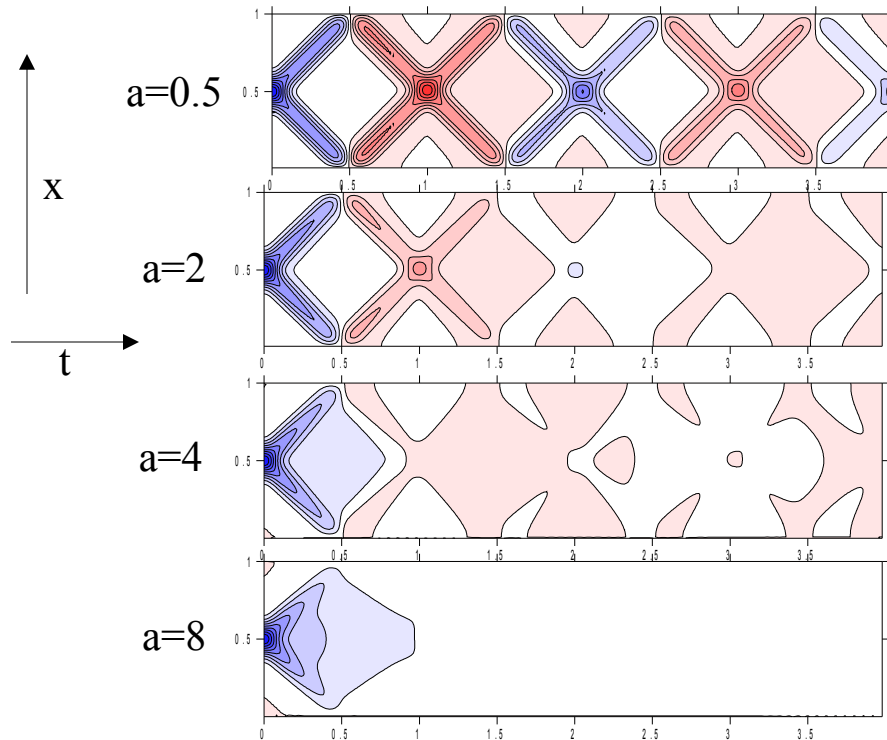
aby wydobyć c_n : drugie równanie
wydzielimy przez ω_n , podniesiemy
w kwadracie i dodamy

$$c_n^2 = \left(\frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin(k_n x) dx \right)^2 + \left(\frac{2}{L\omega_n} \int_0^L v(x, t) \sin(k_n x) dx \right)^2$$

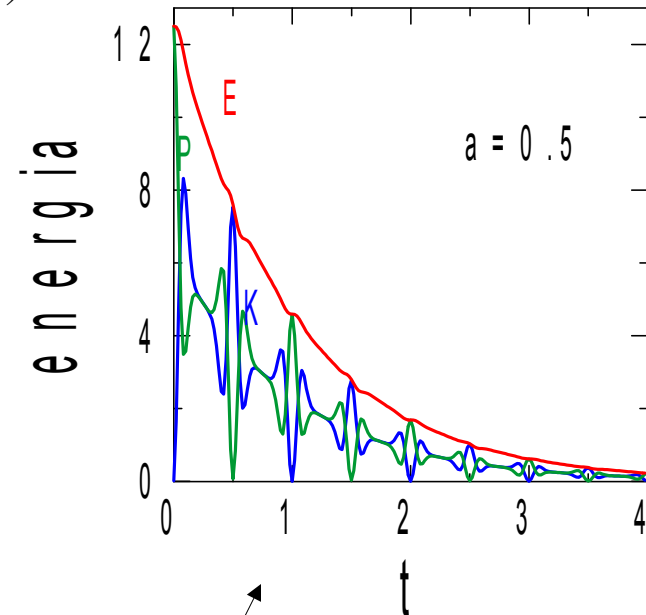
udział względny: $r_n^2 = \frac{c_n^2}{\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2}$

Przykład: $L=1$

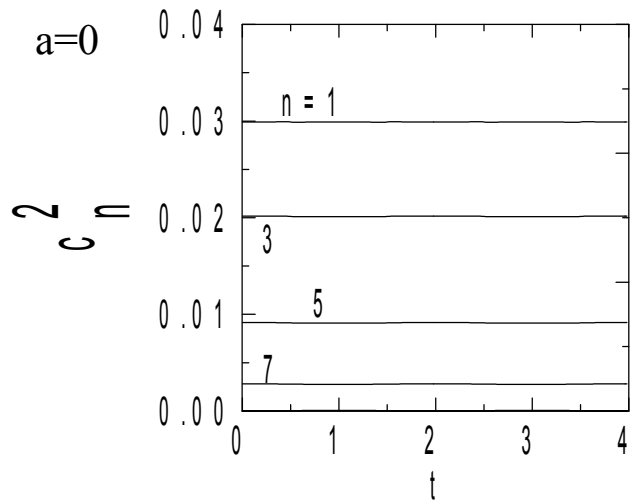
W chwili początkowej pakiet $f(x, t=0) = \exp(-100(x-0.5)^2)$



$E=K+P$ (kinetyczna+potencjalna)



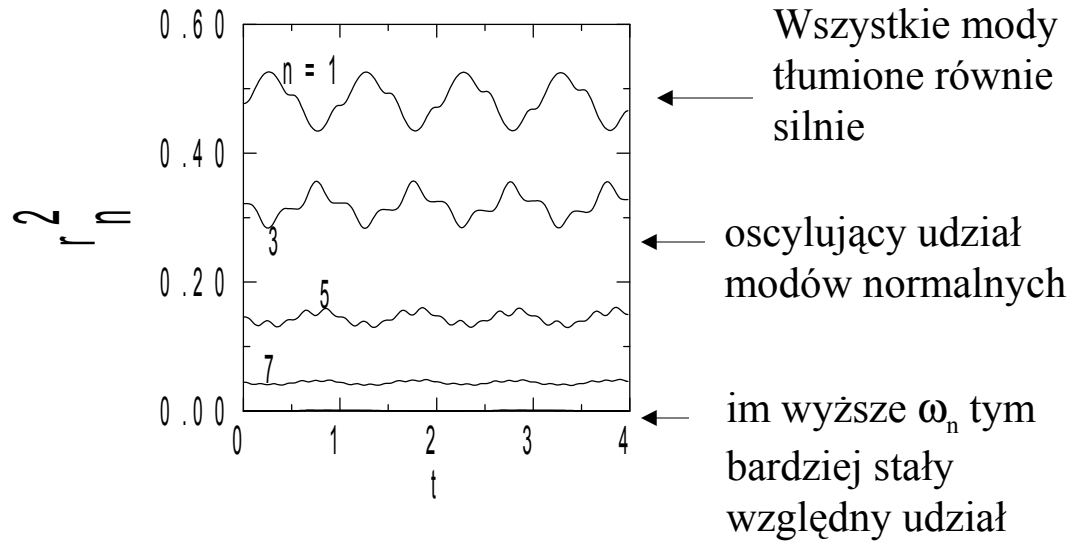
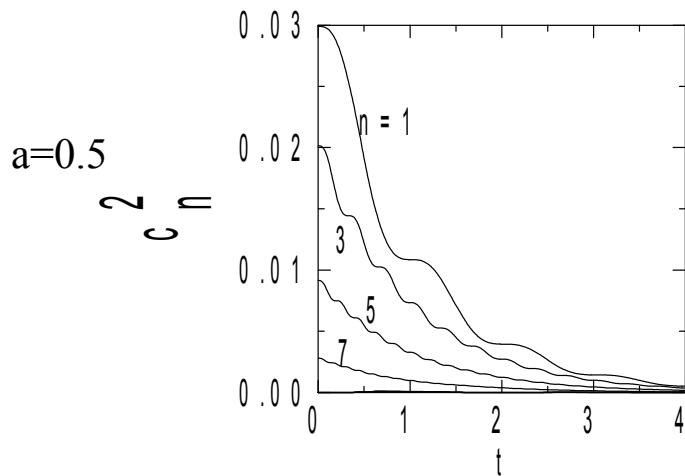
Spadek E najszybszy gdy K największe

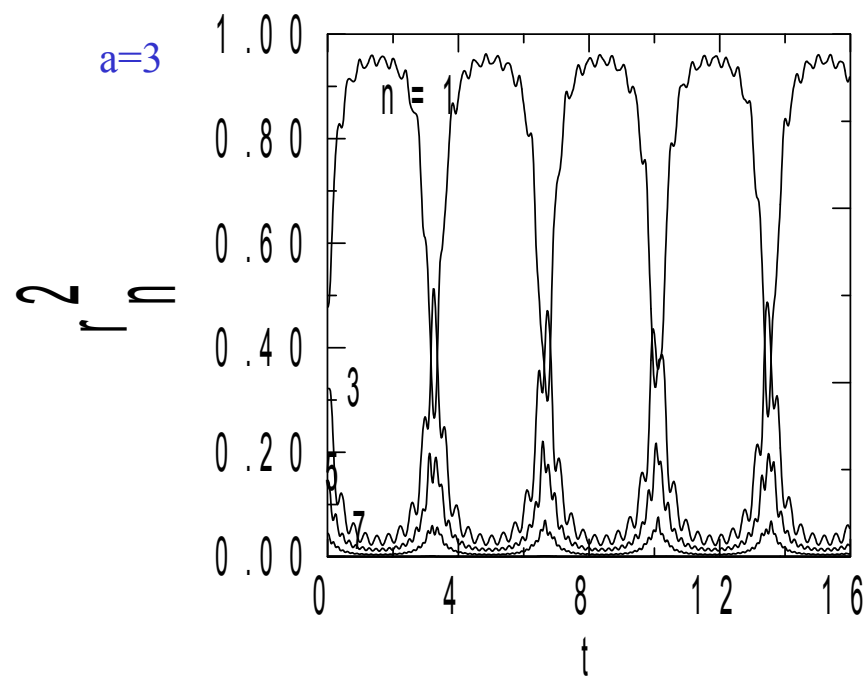
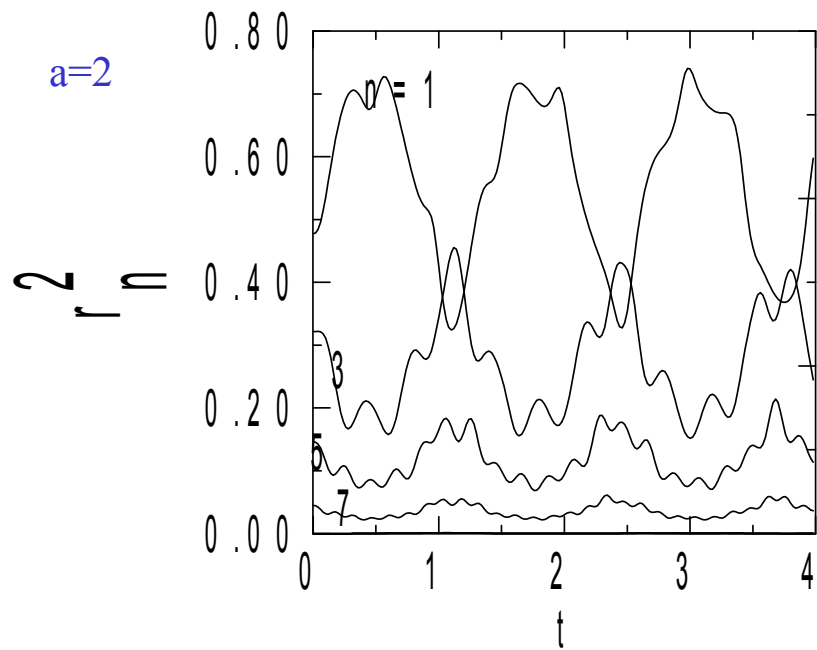


$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a : & \exp(-at) \left[\cosh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) + \frac{a}{\sqrt{a^2 - \omega_n^2}} \sinh(\sqrt{a^2 - \omega_n^2}t) \right] \\ \omega_n = a : & \exp(-at) [1 + at] \\ \omega_n > a : & \exp(-at) \left[\cos(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2 - a^2}} \sin(\sqrt{\omega_n^2 - a^2}t) \right] \end{cases}$$

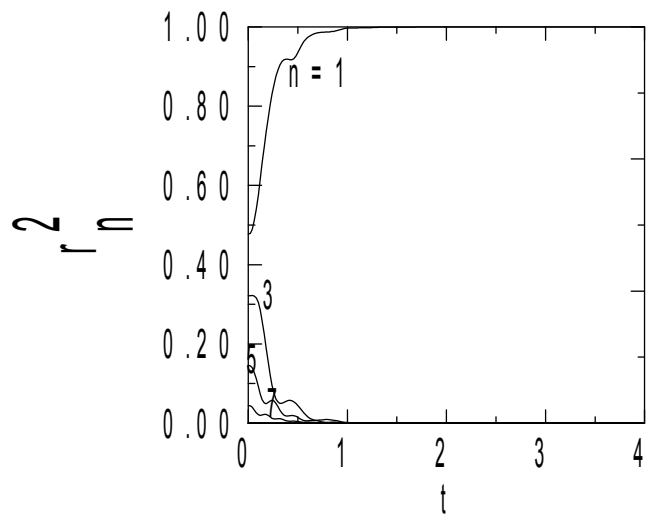
$$\omega_n = n\pi$$

Parzyste n nie wnoszą przyczynku (symetria)

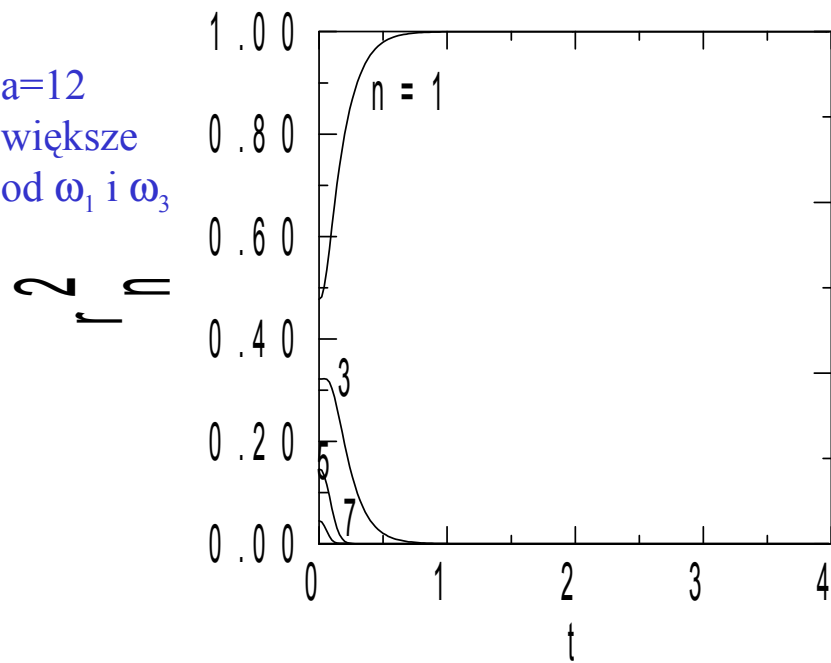




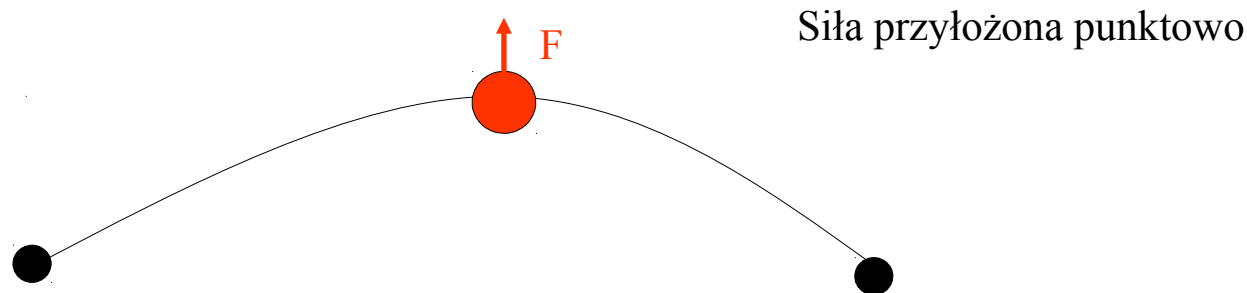
$a=4$, większe tylko od ω_1



$a=12$
większe
od ω_1 i ω_3



Laboratorium: R. hiperboliczne z niejednorodnością: Drgania tłumione z siłą wymuszającą



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a \frac{\partial u}{\partial t} + a_F(x, t) \leftarrow \text{niejednorodność}$$

$$a_F(x, t) = \begin{cases} \cos(\omega t) & \text{dla } x = x_0 \\ 0 & \text{w pozostałych punktach} \end{cases}$$

↑
wymuszenie periodycznie zmienne

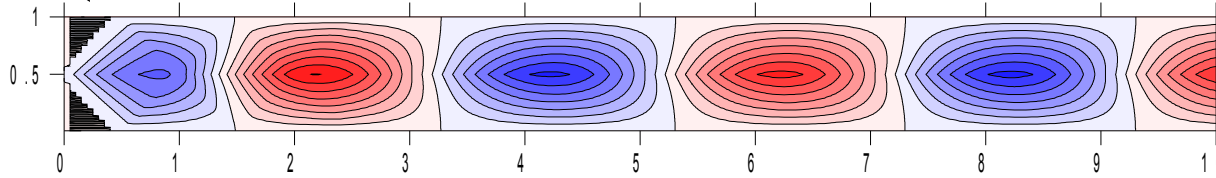
Dla $t=0$ struna spoczywa ($v(x,t)=0$) w położeniu równowagi ($u(x,t)=0$)

Prędkość dźwięku = 1

Siła przyłożona w środku struny $x_0=1/2$

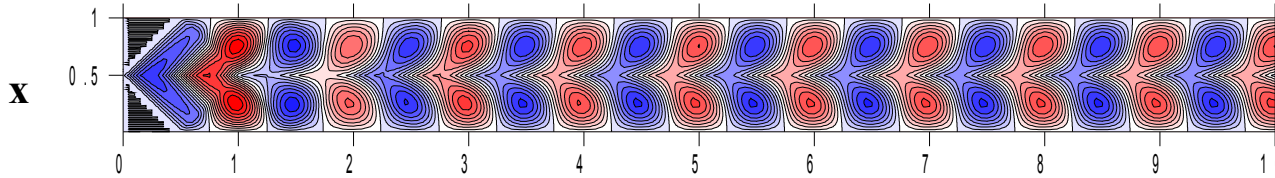
$u(x,t)$

$a=1$
 $w=0.5\pi$

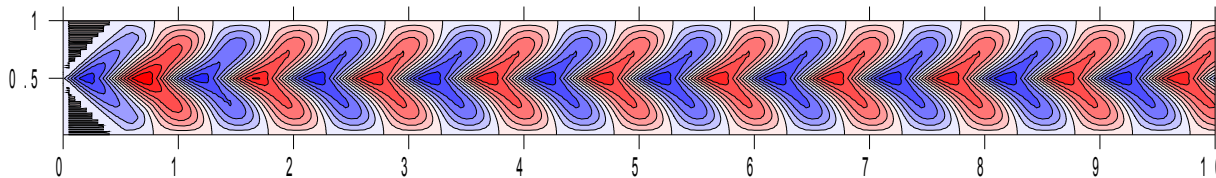


pojawia się „stan ustalony” = drgania periodyczne.

$a=1$
 $w=2\pi$



$a=3$
 $w=2\pi$

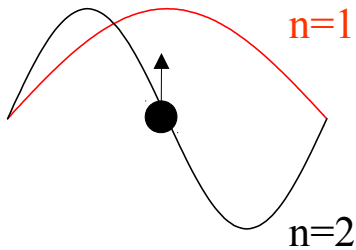


czas

W stanie ustalonym ruch jest periodyczny z okresem siły wymuszającej.

Stan ustalony a energia struny

Sila przyłożona w środku struny $x_0=1/2$

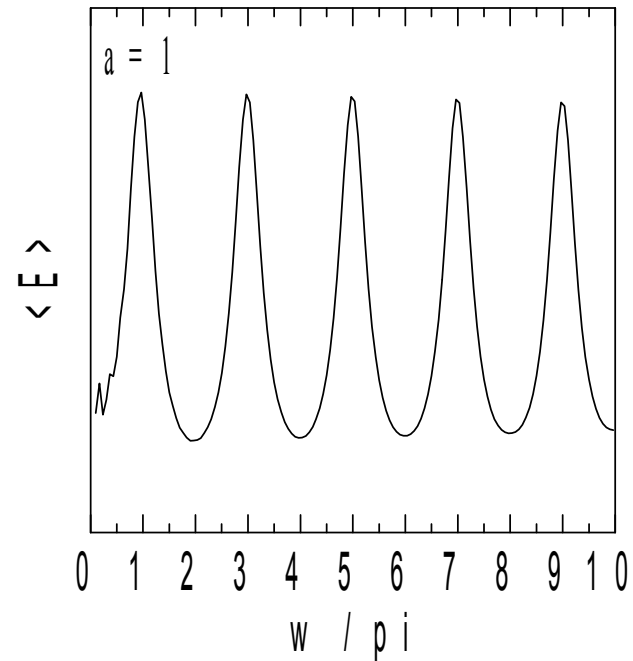


Brakuje w_{2n} ??

Średnia energia w stanie ustalonym:

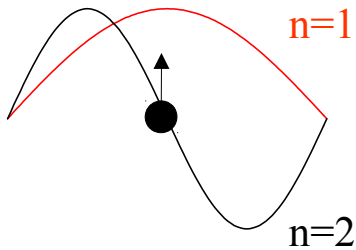
$$\langle E \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt,$$

Rezonans



Stan ustalony a energia struny

Sila przyłożona w środku struny $x_0=1/2$



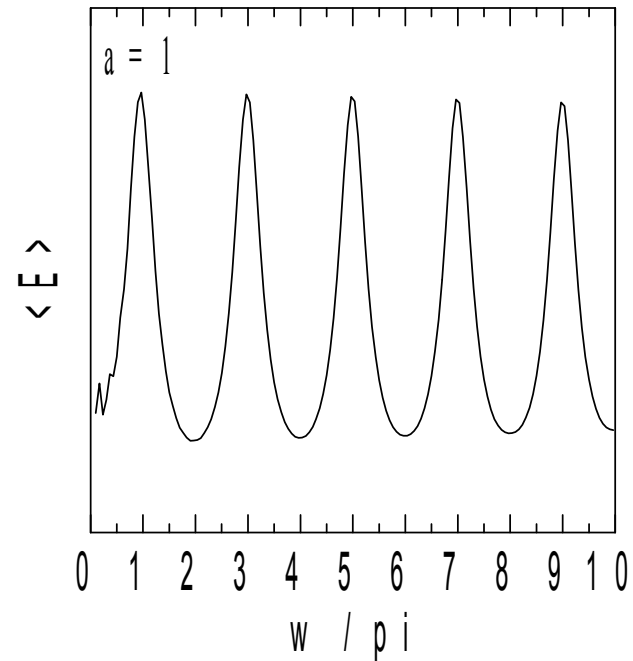
Brakuje w_{2n} ??

W środku
studni = węzeł
dla parzystych n

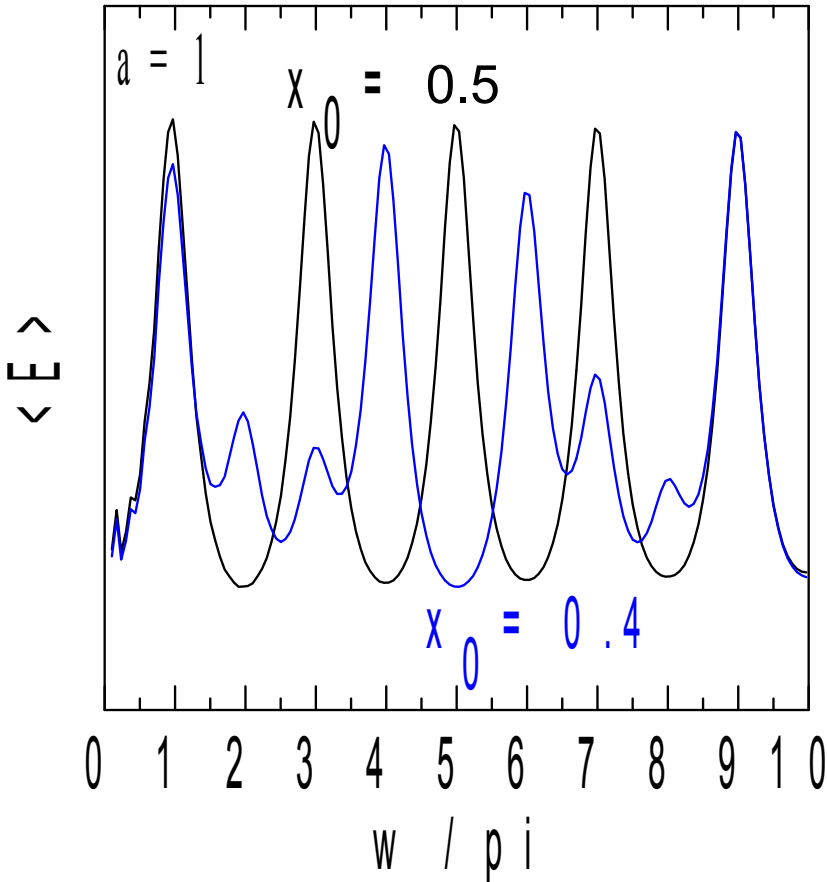
Średnia energia w stanie ustalonym:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt,$$

Rezonans



Mody z parzystym n wzbudzone gdy punkt przyłożenia przesunąć ze środka



Krzywa rezonansowa w przybliżeniu opisana przez sumę funkcji Lorentza

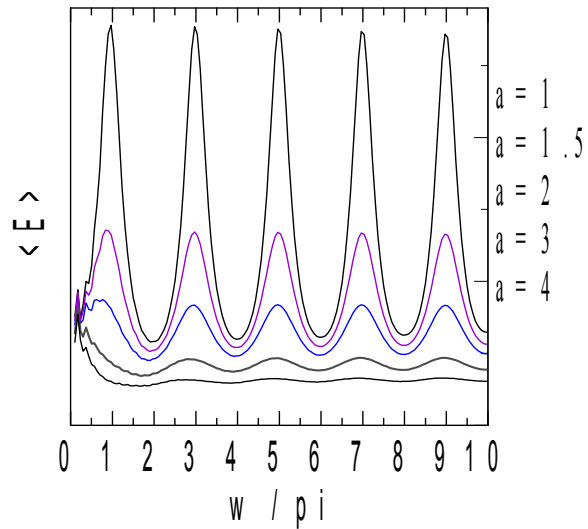
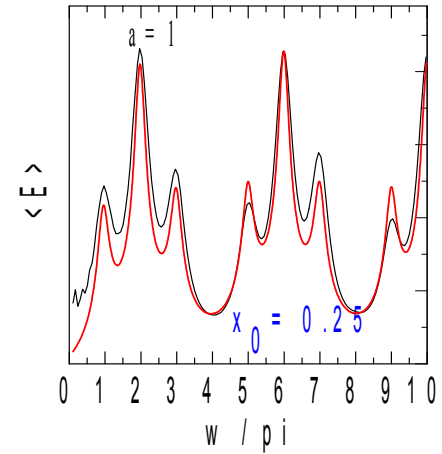
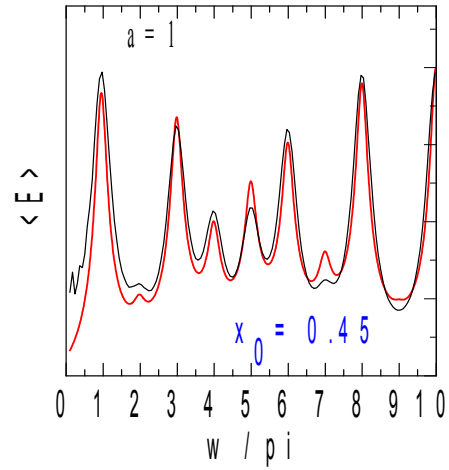
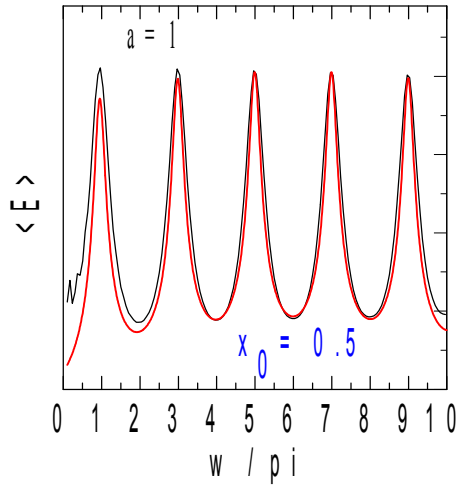
$$s(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{(w - w_i)^2 + (a/2)^2}$$

$$w_i = \sqrt{\omega_i^2 - a^2}$$

Siła sprzężenia = kwadrat wartości modu normalnego w miejscu przyłożenia siły:

$$c_i^2 = \sin^2(i\pi x_0)$$

Średnie energie stanu ustalonego a wzory lorentowskie



Rezonans a stała tłumienia

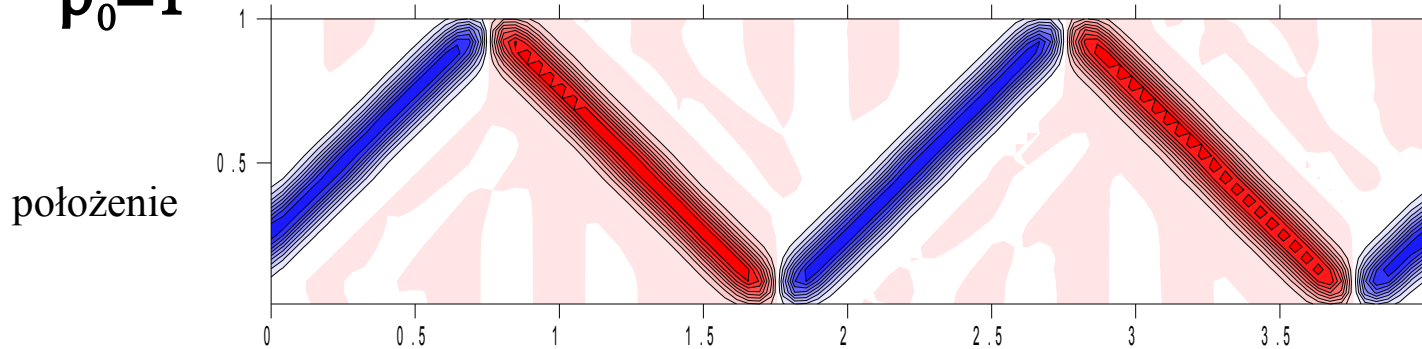
Laboratorium 2: odbicie pakietu od granicy ośrodków

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < \frac{1}{2} \\ \rho_0 & \text{dla } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u(x - Vt) = \exp(-100(x - Vt - 1/4)^2)$$

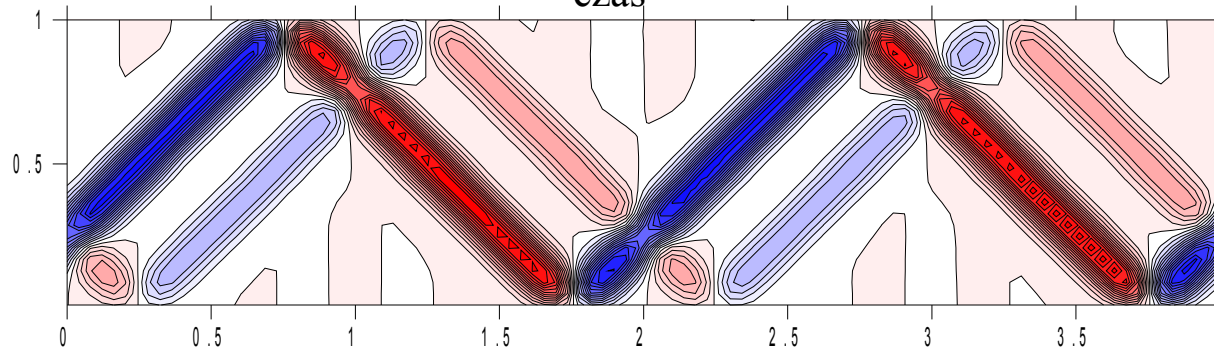
$V=1$

$\rho_0=1$



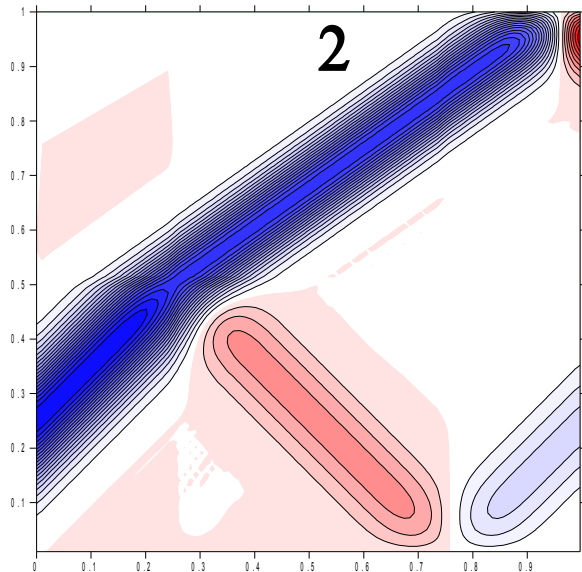
czas

$V=2$

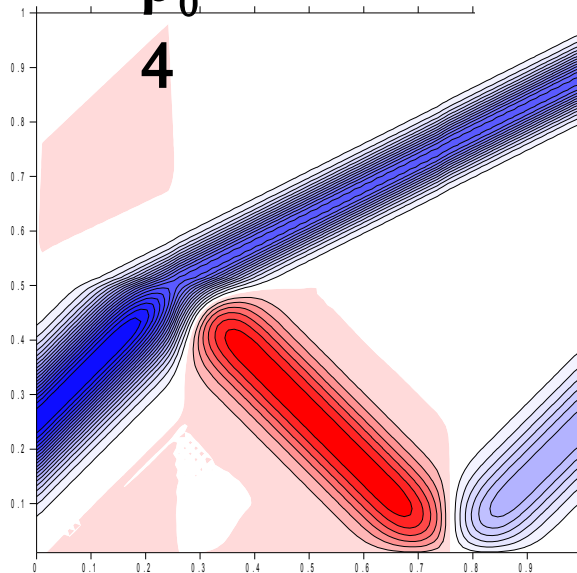


$V=1$

$\rho_0=2$

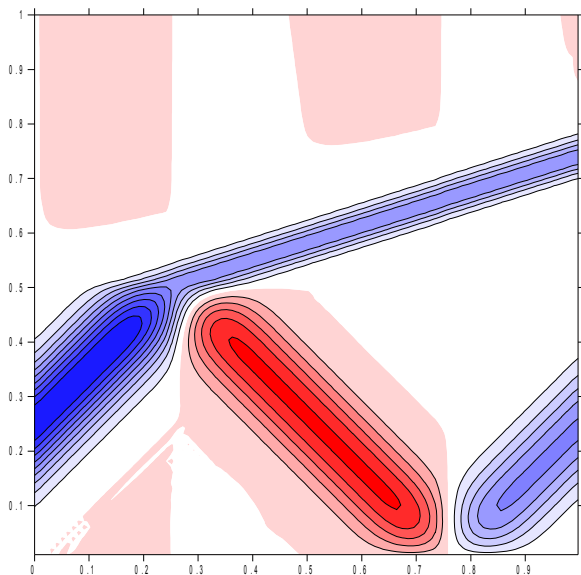


$\rho_0=4$

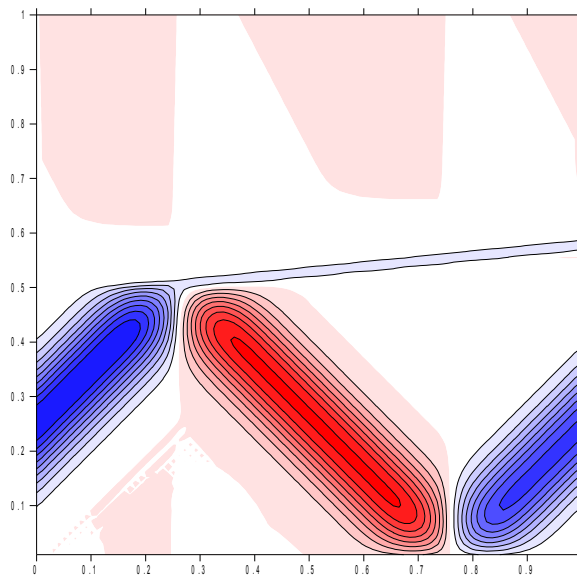


$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x < \frac{1}{2} \\ \rho_0 & \text{dla } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\rho_0=10$



$\rho_0=100$

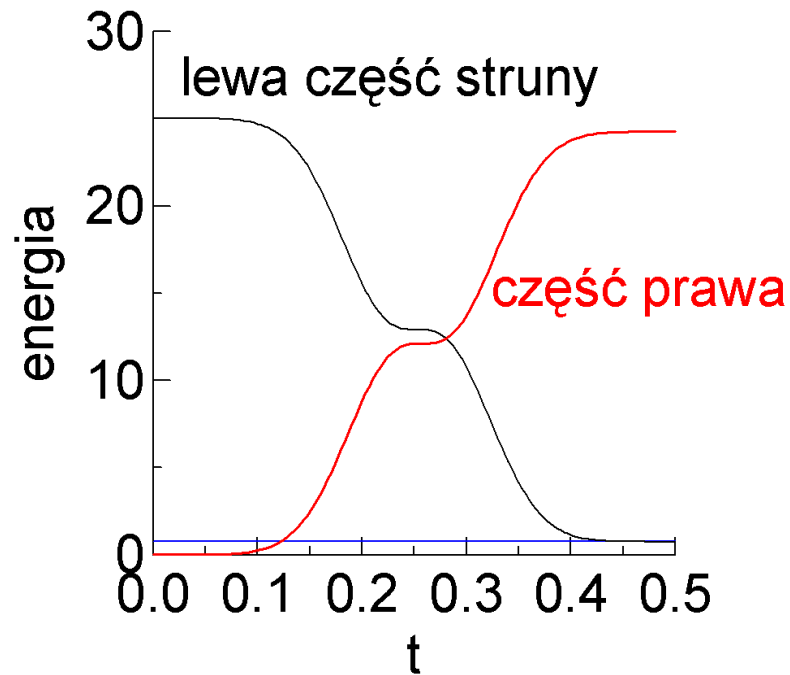


czas

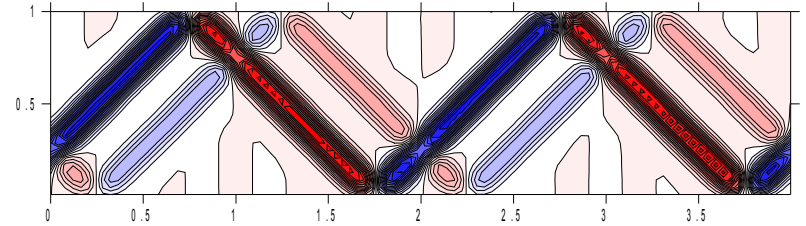
Część energii, która
pozostaje po lżejszej stronie struny $\rho=1$
po odbiciu

$$\left(\frac{1 - \sqrt{\rho_0}}{1 + \sqrt{\rho_0}} \right)^2$$

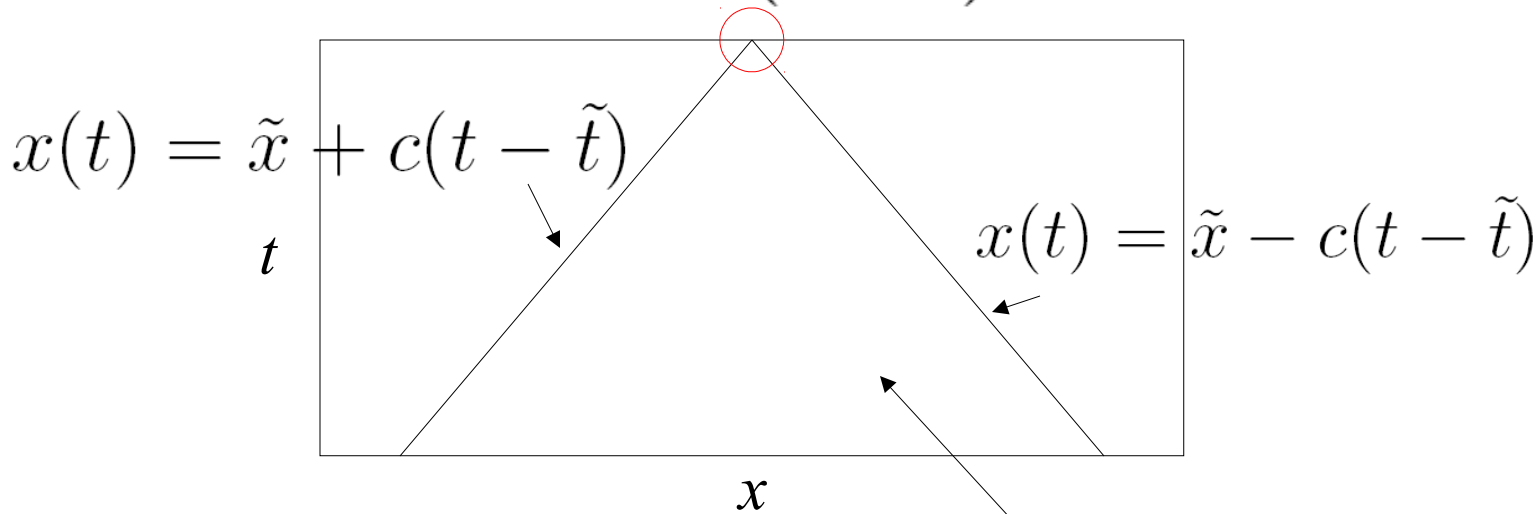
$$\rho_0 = \frac{1}{2}$$



Domena zależności (Domain of Dependence) i kryterium stabilności CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)



$$P(\tilde{x}, \tilde{t})$$



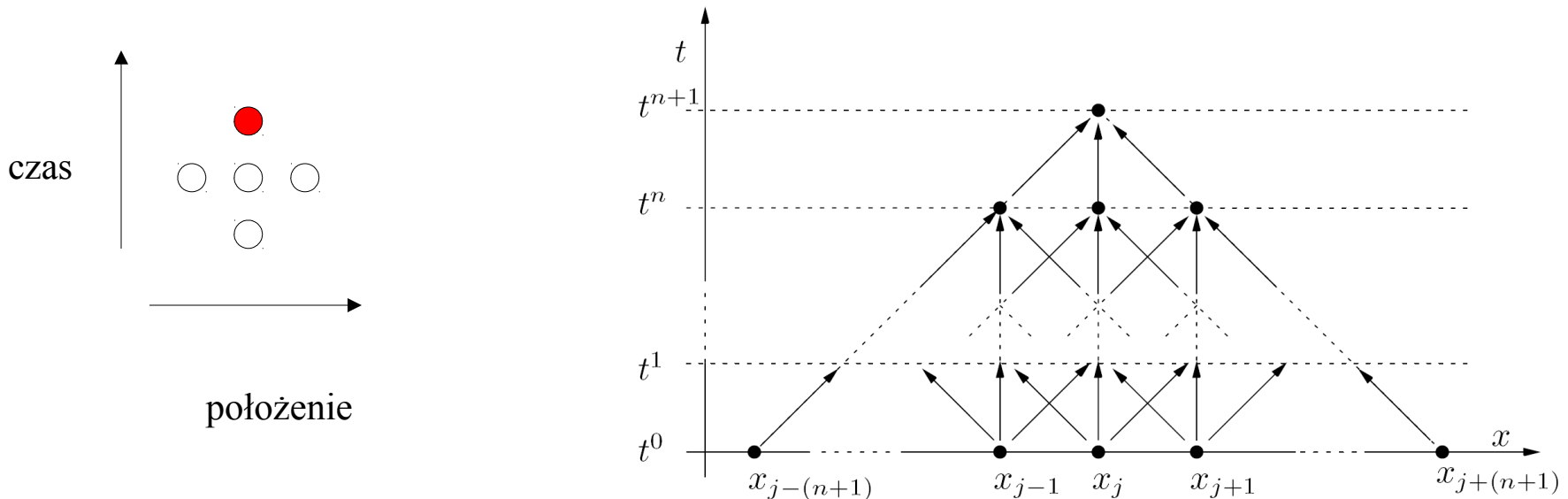
domena zależności:
tylko zdarzenia z trójkąta ograniczonego
charakterystykami mogą
mieć wpływ na rozwiązanie w punkcie P

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

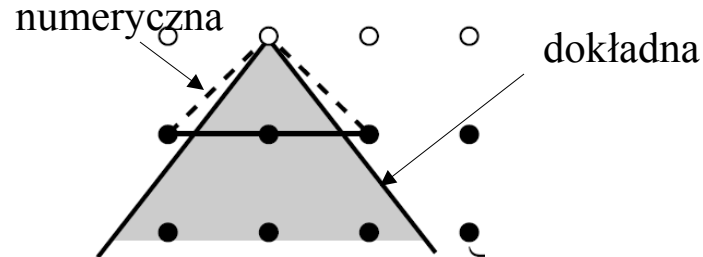
schemat Verleta dla przyspieszenia danego przez prawą stronę równania:

$$\frac{u(j, n+1) + u(j, n-1) - 2u(j, n)}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$u(j, n+1) = c^2 \Delta t^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} - u(j, n-1) + 2u(j, n) + O(\Delta t^4, \Delta x^2)$$



$$u(j, n+1) = c^2 \Delta t^2 \frac{u(j+1, n) + u(j-1, n) - 2u(j, n)}{\Delta x^2} - u(j, n-1) + 2u(j, n) + O(\Delta t^4, \Delta x^2)$$



$$cdt \leq dx$$

warunek: jak dla adwekcji

aby przekroczyć kryterium CFL (prędkość dźwięku): schematy niejawne dla równań mechaniki
standardowy schemat niejawny = schemat Newmarka
(dlaczego Crank-Nicolson się nie stosuje?)

algorytm Newmarka (uogólnienie prędkościowego Verleta,
standardowy chemat niejawni dla równań opisujących układy dynamiczne)

w Verlecie prędkościowym
używamy
przepisów:
z $\gamma=1/2$

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 a(t)$$

$$v(t+dt) = v(t) + dt [(1-\gamma)a(t) + \gamma a(t+dt)]$$

Czyli: w Verlecie: jawna formuła na położenie, potencjalnie niejawni na prędkość
ta nie wystarczy dla bezwzględnej stabilności przy kroku czasowym $cdt > dx$ (zobaczmy analizę v.Neumanna)

dla Newmarka: wprowadzamy niejawność (ważenie przyspieszeń z terażniejszości i przyszłości)
również do wzoru na położenia:

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

algorytm prędkościowy Newmarka

źródło: WJT DANIEL, computational mechanics **20** (1997) 272

zrobmy z tego formułę położeniową: bez prędkości, za to dwupoziomową (t+dt) względem t, t-dt
wyeliminować prędkości : ↓

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

(*)

$$v(t+dt) = v(t) + dt [(1-\gamma)a(t) + \gamma a(t+dt)]$$

dla kroku poprzedniego =

$$u(t) = u(t-dt) + v(t-dt)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t-dt) + 2\beta a(t)]$$

dla kroku poprzedniego =

$$v(t) = v(t-dt) + dt [(1-\gamma)a(t-dt) + \gamma a(t)]$$

$$u(t) = u(t-dt) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t-dt) + 2\beta a(t)] - dt^2 [(1-\gamma)a(t-dt) + \gamma a(t)]$$

$$u(t) = u(t-dt) + v(t)dt + dt^2/2 [(2\gamma - 2\beta - 1)a(t-dt) + (2\beta - 2\gamma)a(t)]$$

$$u(t-dt) = u(t) - v(t)dt - dt^2/2 [(2\gamma - 2\beta - 1)a(t-dt) + (2\beta - 2\gamma)a(t)] \quad (*)$$

dodamy stronami gwiazdki aby usunąć prędkość ze schematu

$$u(t+dt) = u(t) + v(t)dt + dt^2/2 [(1-2\beta)a(t) + 2\beta a(t+dt)]$$

+ stronami

$$u(t-dt) = u(t) - v(t)dt + dt^2/2 [(-2\gamma + 2\beta + 1)a(t-dt) + (2\gamma - 2\beta)a(t)]$$

↓ skasujemy prędkość

$$u(t-dt) + u(t+dt) = 2u(t) + dt^2/2 [2\beta a(t+dt) + (1-4\beta + 2\gamma)a(t) + (-2\gamma + 2\beta + 1)a(t-dt)]$$

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma)a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2)a(t-dt)]$$

algorytm Newmark = wersja położeniowa, dwa parametry γ, β

dla porównania Verlet położeniowy dla struny

$$u(t + dt) = dt^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u(t) - u(t - dt)$$

wagi przy przyspieszeniu: $\beta + 1/2 - 2\beta + \gamma - \gamma + \beta + 1/2 = 1$

(wszystkie wybory dają schemat, który w granicy małego dt redukuje się do Verleta)

Newmark sprowadza się do Verleta dla skończonego dt gdy $\gamma = 1/2$, $\beta = 0$

rola γ, β – zobaczymy jak się sprawdzają w praktyce

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma) a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2) a(t-dt)]$$

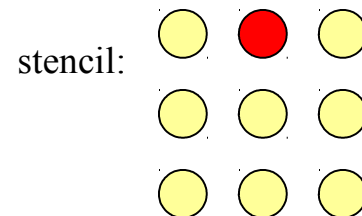
$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + \alpha a(t) + \delta a(t-dt)]$$

jak wykonać krok czasowy?

sposób rozwiązywania zależy od wyrażenie na a
dla struny:

$$U_j^{n+1} = 2U_j^n - U_j^{n-1} + \frac{dt^2}{dx^2} \left[\beta \left(U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} \right) + \alpha \left(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n \right) + \delta \left(U_{j+1}^{n-1} + U_{j-1}^{n-1} - 2U_j^{n-1} \right) \right]$$

Po przegrupowaniu wyrazów:
układ równań liniowych z macierzą trójprzekątniową

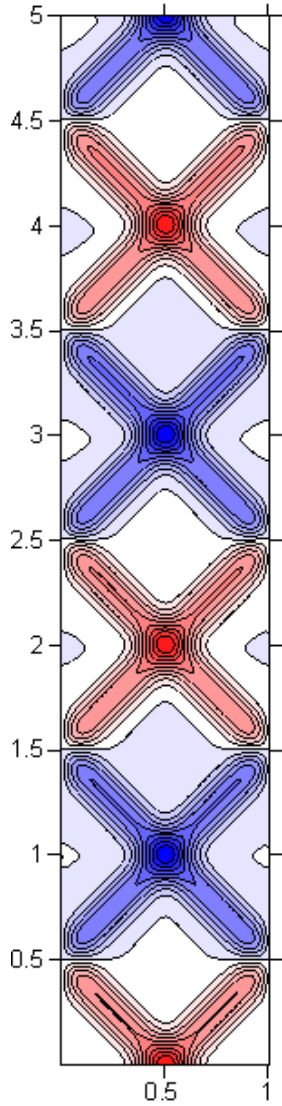


schemat Newmark MRS, struna

$dt=dx$

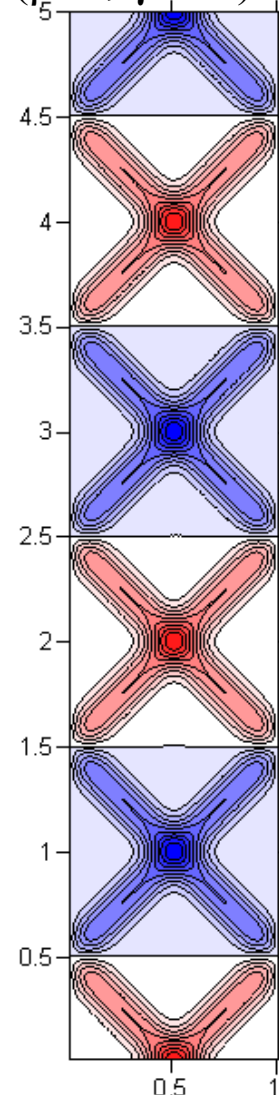
101 węzłów

dokładny

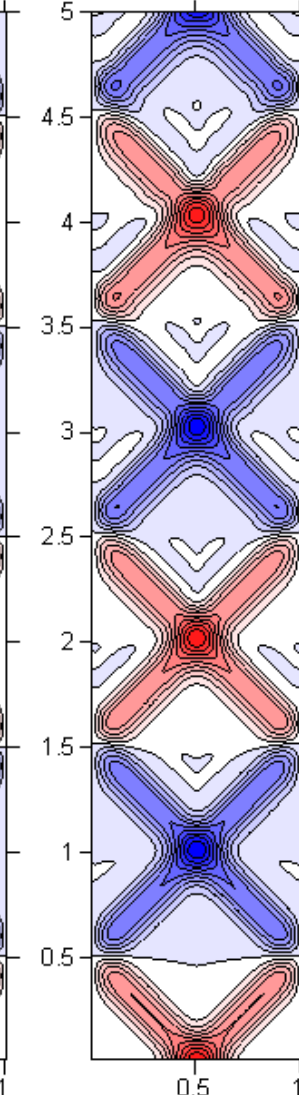


Verlet

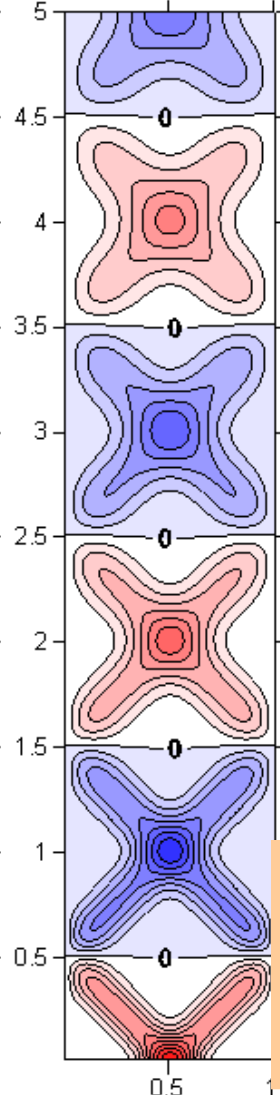
$(\beta=0, \gamma=1/2)$



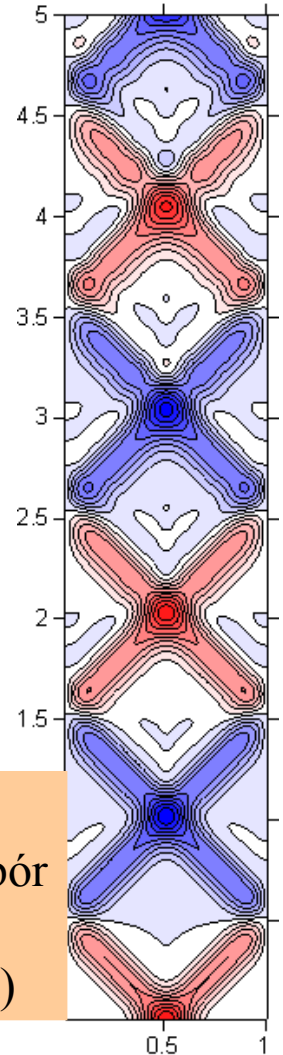
$(\beta=1/2, \gamma=1/2)$



$(\beta=1/2, \gamma=1)$



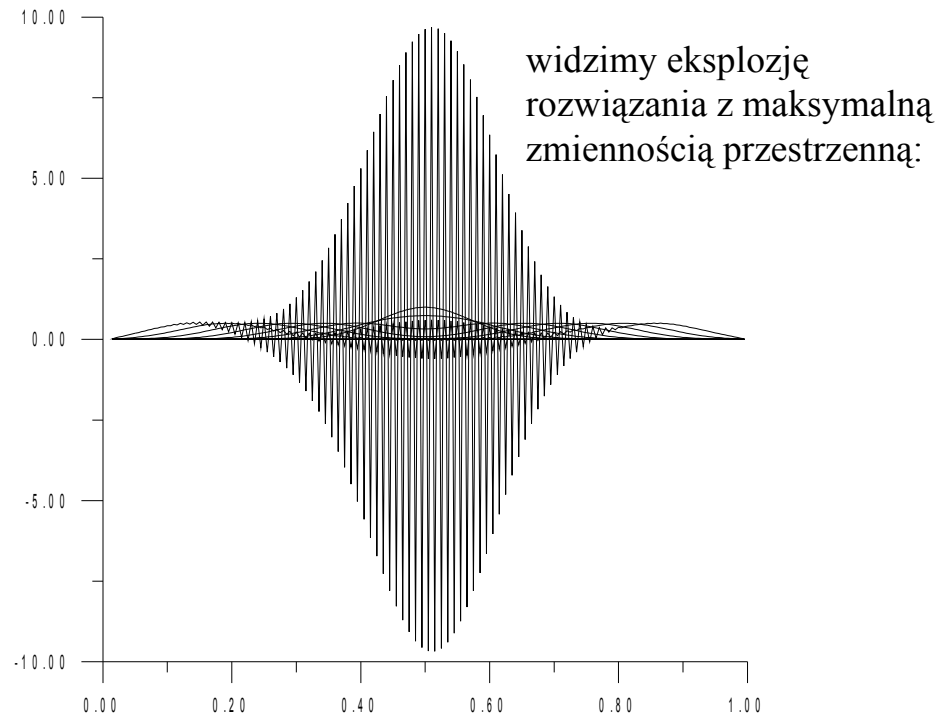
$\beta=.9$
 $\gamma=1/2$



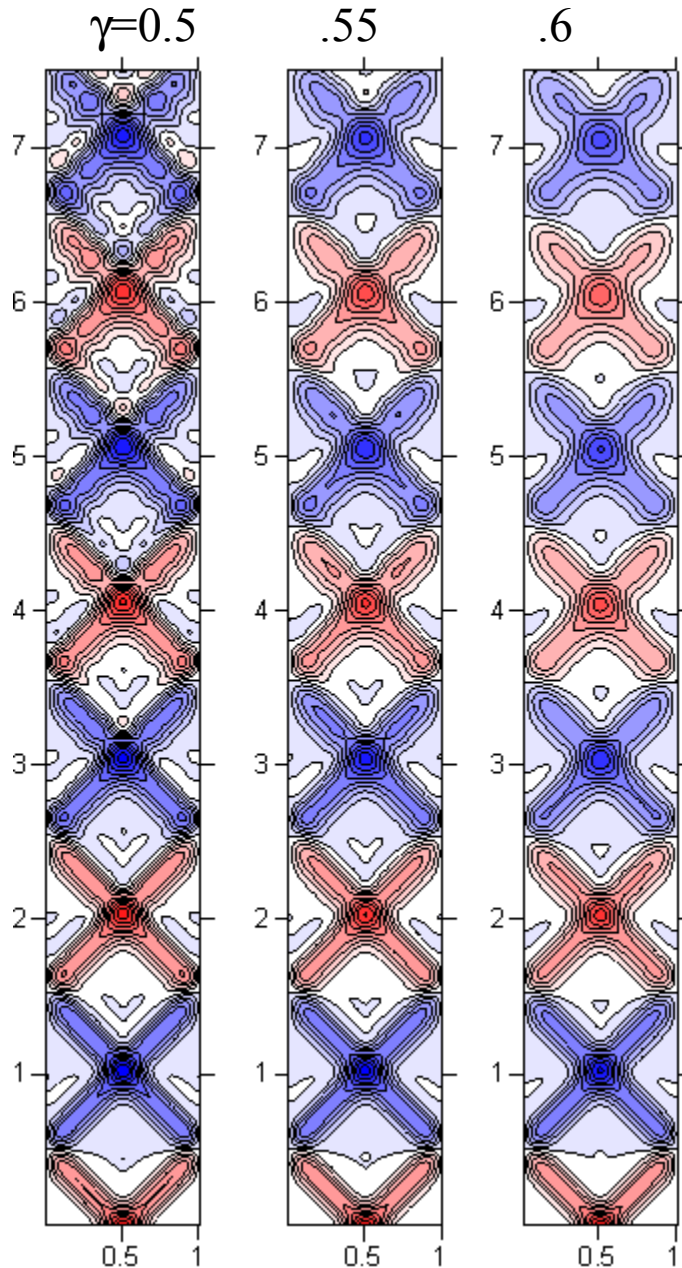
dla $dt=dx$
najlepszy wybór
 $\beta=0, \gamma=1/2$
(jawny, Verlet)

dla $dt=dx$
najlepszy wybór
 $\beta=0, \gamma=1/2$
(jawny, Verlet)

Verlet
dla $dt=dx*1.01$



Newmark jest po to aby przekroczyć kryterium CFL

rola γ ($dt=1.5dx$, $\beta=0.5$)

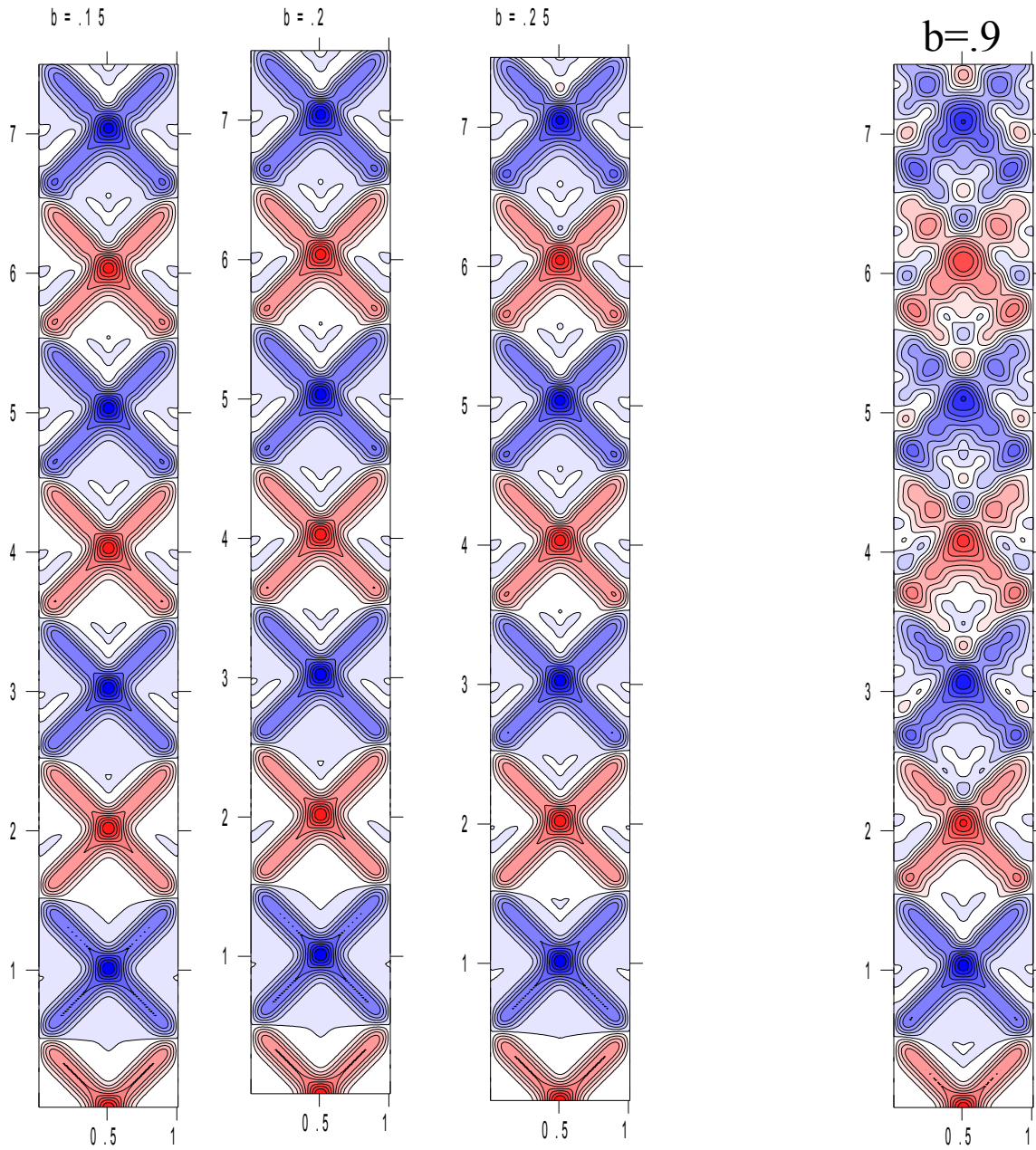
MRS: schemat Newmark
rola parametrów metody

$\beta > 0$ – wynosi stabilność poza kryterium CFL,
kosztem generacji wyższych częstotliwości
przestrzennych

$\gamma > 1/2$ ogranicza
wzmacnianie
wyższych częstotliwości
kosztem dyssypacji
(zaniku całego pakietu)

$\gamma < 1/2$ – schemat jest niestabilny

zostawmy $\gamma = 1/2$ (jak dla Verleta)
i manipulujmy β

poza CFL: $dt > cdx$ $dt=1.5dx$, $\gamma=0.5$, schemat staje się stabilny dla $\beta > 0.15$ 

rosnące β generuje
wyższe częstotliwości
wniosek:
najlepszy minimalne
 β przy którym
schemat jeszcze stabilny

czy można je wyznaczyć
analitycznie?

Projektowanie schematu Newmarka dla zadanego kroku czasowego.

dobrać minimalne β aby metoda była stabilna dla danego dt ?

Będziemy wiedzieli, że po wyższe β nie warto sięgać.

analiza von Neumanna dla $\gamma=1/2$

$$u(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [\beta a(t+dt) + (1/2 - 2\beta + \gamma) a(t) + (-\gamma + \beta + 1/2) a(t-dt)]$$

$$u(t+dt) - dt^2 \beta a(t+dt) = 2u(t) - u(t-dt) + dt^2 [(1 - 2\beta) a(t) + \beta a(t-dt)]$$

Ansatz von Neumanna:

$$A_k^n = \lambda^{n+1} A_k^0$$

$$\lambda^2 \left[1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} (\cos(k\Delta x) - 1) \right] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} \left[\lambda(1 - 2\beta) 2 (\cos(k\Delta x) - 1) + \beta 2 (\cos(k\Delta x) - 1) \right]$$

$$\lambda^2 \left[1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} \left[\lambda(1 - 2\beta) 2c + \beta 2c \right]$$

$$\lambda^2 \left[1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2} \left[\lambda(1 - 2\beta)2c + \beta 2c \right]$$

$$\lambda^2 \left[1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right] - 2\lambda \left[1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \right] + 1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c = 0$$

$$\Delta = 4 \left[1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \right]^2 - 4 \left[1 - 2\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right]^2$$

$$\Delta = 4 \frac{dt^2}{dx^2} c \left(2 + \frac{dt^2}{dx^2} c - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right)$$

$$\lambda = \frac{1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \pm \frac{dt}{dx} \sqrt{c \left(2 + c \frac{dt^2}{dx^2} - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c \right)}}{1 - 2\beta c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

Sytuacja będzie taka: dopóki $\Delta < 0$: 2 pierwiastki, o module nie większym od 1
 gdy $\Delta > 0$ metoda stanie się niestabilna

$$\lambda = \frac{1 + (1 - 2\beta) \frac{dt^2}{dx^2} c \pm \frac{dt}{dx} \sqrt{c(2 + c \frac{dt^2}{dx^2} - 4\beta \frac{dt^2}{dx^2} c)}}{1 - 2\beta c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$-2 < c < 0$ zawsze

żeby pod pierwiastkiem liczba ujemna
potrzeba aby:

$$2 + \frac{dt^2}{dx^2} c(1 - 4\beta) > 0 \quad \longrightarrow \quad \beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$|\lambda|^2 < 1$?

daje ten sam wynik

$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

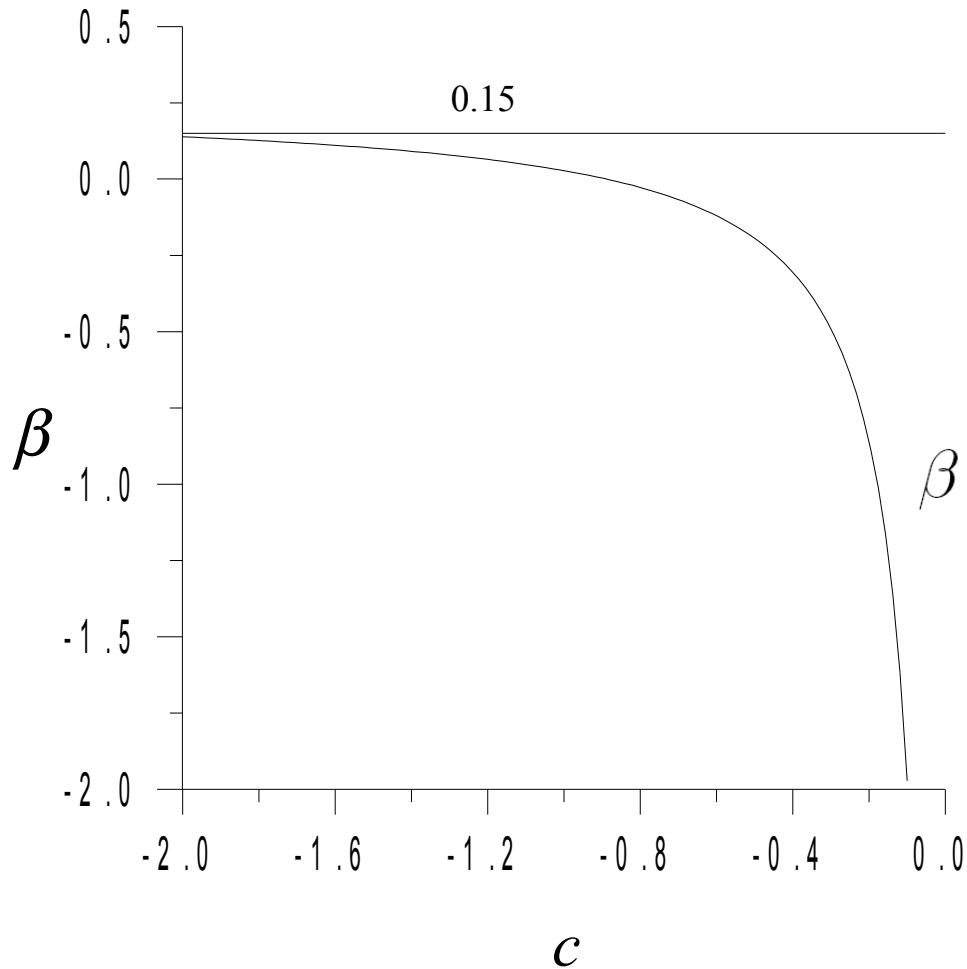
$\beta > 1/4$ – metoda stabilna dla dowolnego t [ponieważ $c < 0$]

uwaga: możemy sobie teraz

sprawdzić stabilność Verleta dla $dt=dx$ oraz $\beta=0$, $1/4 + 1/(2c) < 0$ [ok.]

dobór beta zapewniającego
stabilność schematu Newmark
w MRS dla zadanego kroku czasowego

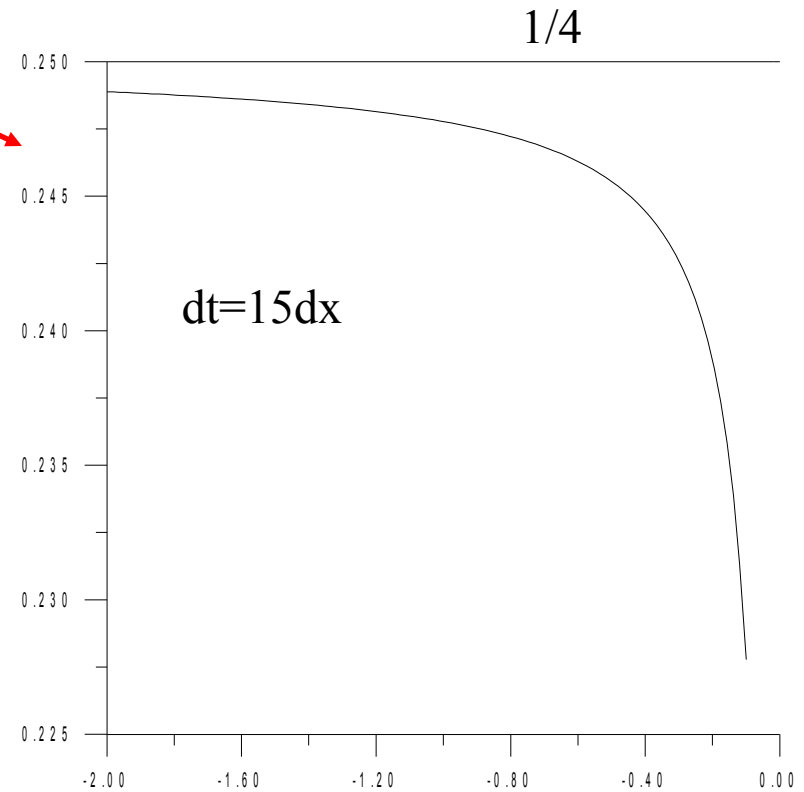
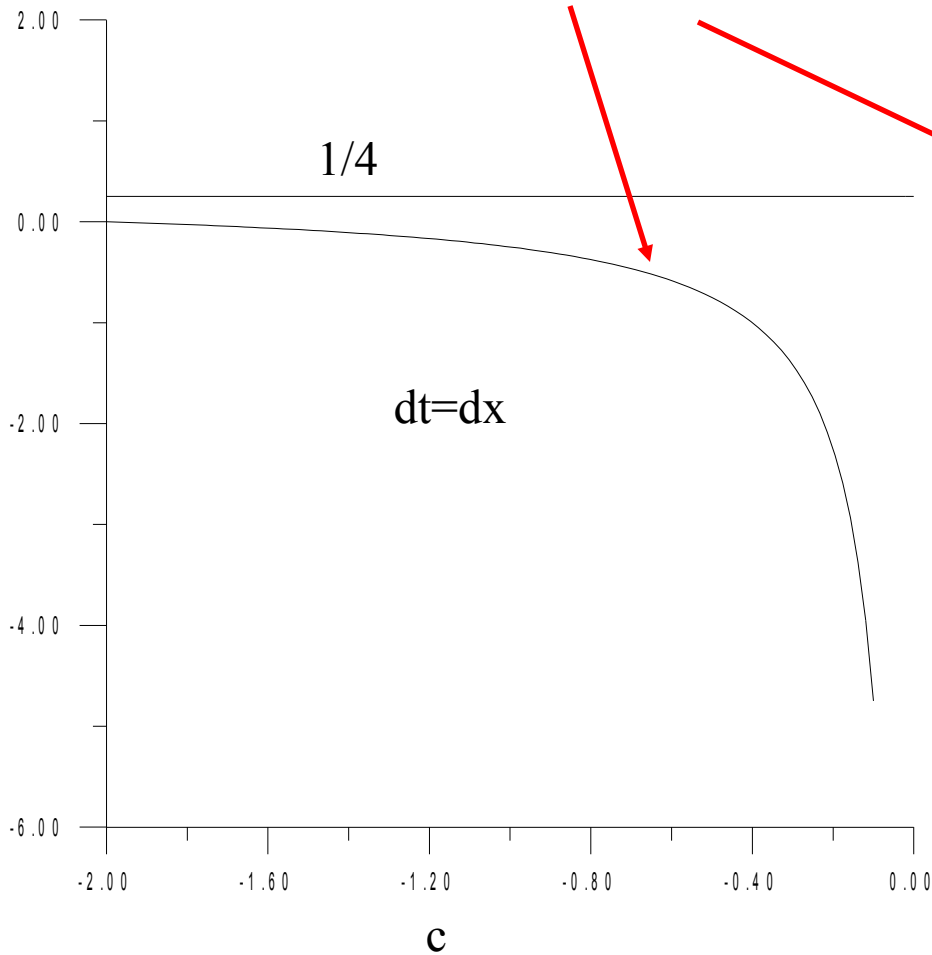
dt=1.5 dx



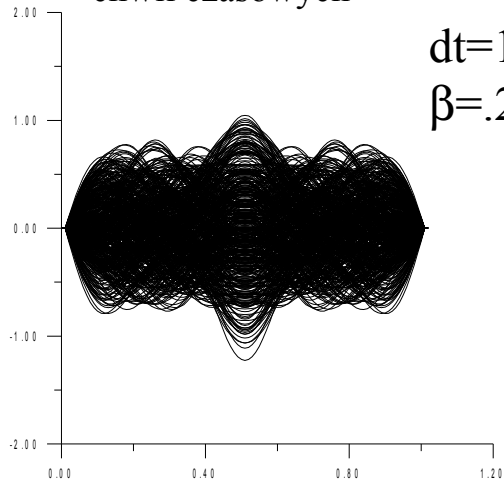
$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c \frac{dt^2}{dx^2}}$$

dobór beta zapewniającego
stabilność schematu Newmark
w MRS dla danego kroku czasowego



struna, b. wiele
chwil czasowych



$dt=15dx$
 $\beta=.25$

MRS, Newmark, $\gamma=1/2$

bo beta była zbyt mała:

