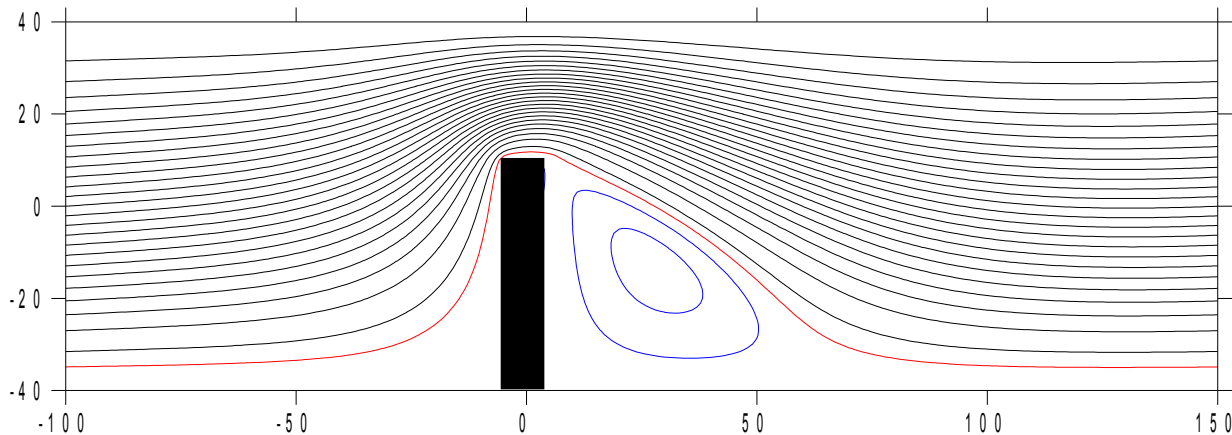


# Równanie adwekcji (najprostsze cząstkowe zależne od czasu. posłuży do wprowadzenia analizy rozwiązań numerycznych równań cząstkowych)

linie strumienia ( $\psi = \text{const}$ ) dla cieczy lepkiej, nieściśliwej



rozwiązania równań Naviera-Stokesa  
(czeka nas laboratorium i wykład na ten temat)

gradient ciśnienia i kierunek przepływu

$(u, v)$



$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

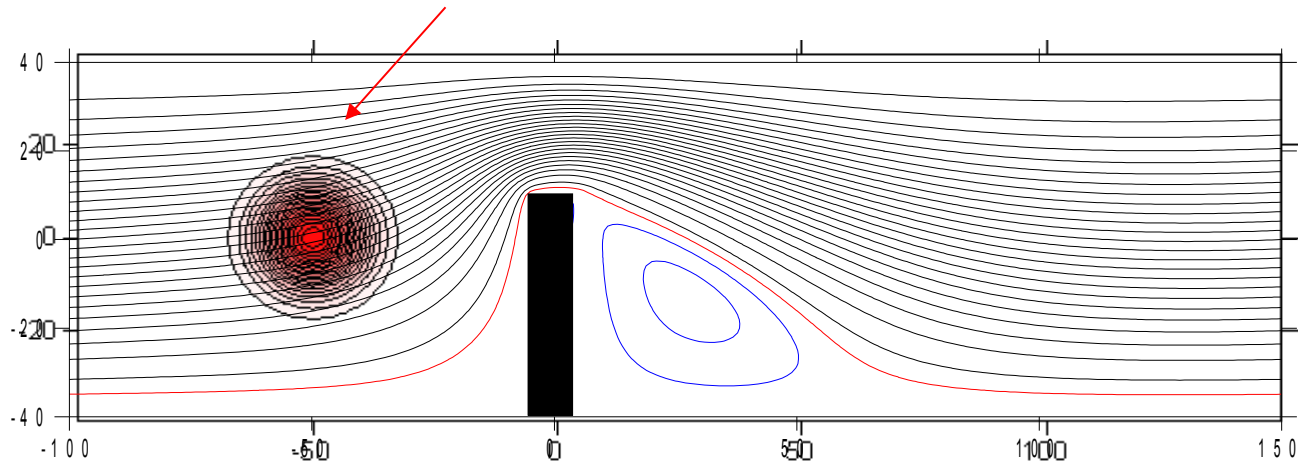
$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

im gęściej poziomicie  $\psi$  w  $y$   
tym większa szybkość w  $x$

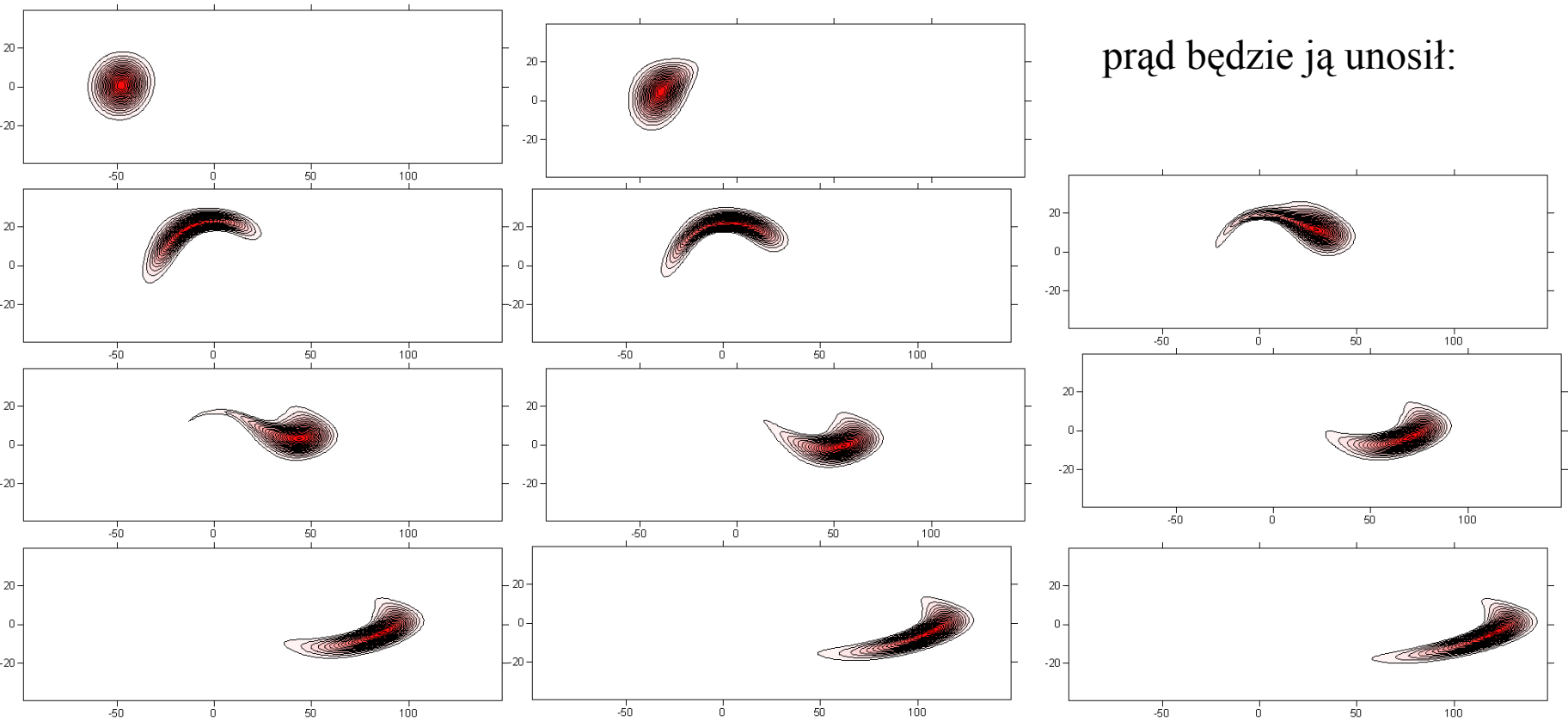
lepka: na brzegach prędkość znika  
nieściśliwa:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

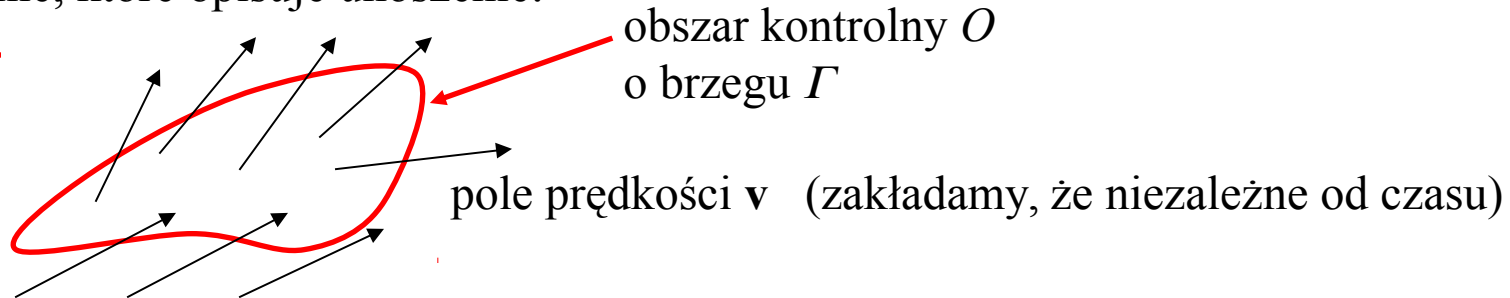
# rozlana plama z oleju



prąd będzie ją unosił:



Równanie, które opisuje unoszenie:



zasada zachowania masy

$$\frac{d}{dt} \int_O d^3r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = - \int_{\Gamma} d^2r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

minus: bo w całce powierzchniowej  
mnożymy całkowany wektor skalarnie  
z normalnym do powierzchni (wychodzącym  
z powierzchni)

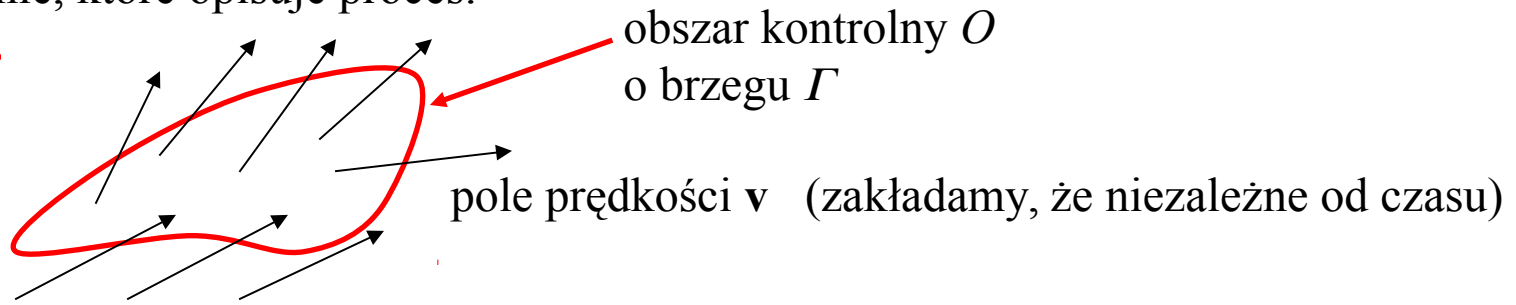
prawo Gaussa:

$$\int_{\Gamma} d^2r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \int_O d^3r \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0$$

równanie adwekcji:  
opisuje unoszenie wielkości  
skalarnej przez stacjonarne  
pole wektorowe

Równanie, które opisuje proces:



zasada zachowania masy

$$\frac{d}{dt} \int_O d^3r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = - \int_{\Gamma} d^2r \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) \mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0$$

wersja

1D:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t) v(x)] = 0$$

## 1D: prawo zachowania jako równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho(x, t)v(x)] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \cancel{\rho \frac{\partial v}{\partial x}} = 0$$

zajmiemy się problemem modelowym, w którym  $v = \text{const}$   
(np jednowymiarowy przepływ cieczy nieściśliwej)

$$u \equiv \rho \quad \longrightarrow \quad u_t + u_x = 0$$

$v=1$ :

---

chcemy wprowadzić pojęcie *charakterystyki równania*: linia  $x(t)$ , taka, że  $u(x(t), t) = \text{const}$

różniczka zupełna:  $du = u_t dt + u_x dx = (u_t + u_x dx/dt) dt$

gdy  $dx/dt = 1$        $du = 0 dt$

czyli:  $u$  spełniające równanie adwekcji jest stałe  
na charakterystykach  $x = t + c$

czyli  
:

$$u(x, t) = f(x - t)$$

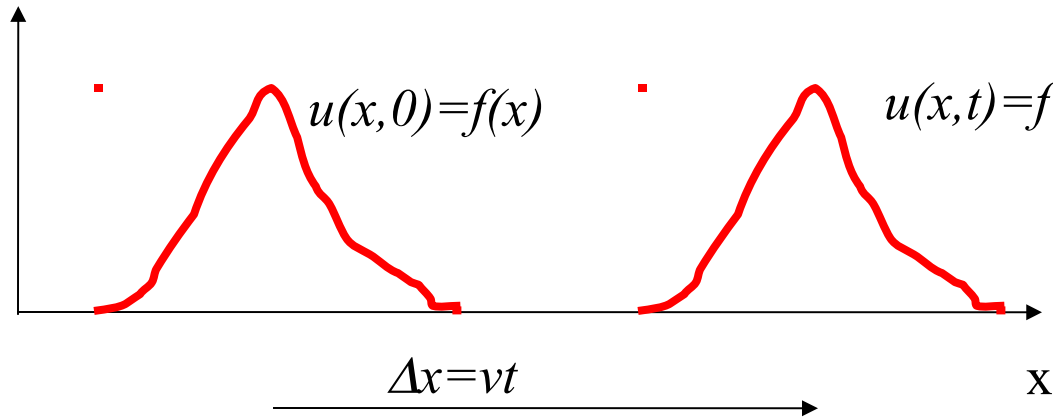
sprawdzić, że

$$u(x,t) = f(x-t)$$

(rozwiązanie d'Alamberta)

spełnia:  $u_t + u_x = 0$

(warunek początkowy „unoszony” z prędkością  $v$  bez zmiany kształtu)



równanie adwekcji 1D:  $u_t + vu_x = 0$

ośrodek nieskończony, warunek początkowy:  $u(x, 0) = \phi(x)$

rozwiązanie dokładne:  $u(x, t) = \phi(x - vt)$

Po co rozwiązanie numeryczne skoro analityczne tak proste?

1) Numeryczne potrzebne, gdy pole prędkości nieznane (zmienne, będące wynikiem pomiarów lub innych rachunków).

2) Czynniki adwekcyjny (konwekcyjny) ważny w bardziej złożonych problemach transportu masy / ciepła

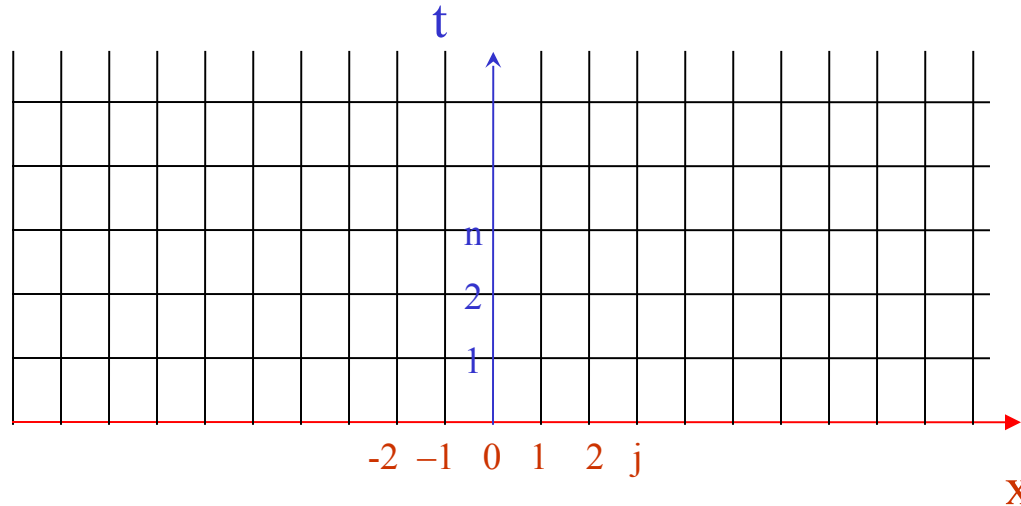
3) Najprostsze równanie:

posłuży do wprowadzenia analizy numerycznej równań cząstkowych

schematy jawne/niejawne, analiza stabilności, dyfuzja i dyspersja numeryczna

$$u_t + v u_x = 0 \quad u(x, t) = \phi(x - vt)$$

metoda różnic skończonych



poszukujemy rozwiązania na siatce o stałych krokach  $\Delta x$  i  $\Delta t$ .

rozwiązanie dokładne

$$u_j^n \equiv u(j\Delta x, n\Delta t)$$

rozwiązanie metody różnic skończonych

$$U_j^n \simeq u_j^n$$

W rachunkach numerycznych na siatce ośrodek musi być skończony:

- 1) wystarczająco duży aby w interesującym nas czasie pakiet nie doszedł do końca
- 2) lub okresowe warunki brzegowe



$$u_j^n \equiv u(j\Delta x, n\Delta t)$$

$$U_j^n \simeq u_j^n$$

równania różnicowe na  $U$  : z rozwinięcia Taylora

wartość  $u$  w funkcji  $u$  oraz pochodnych punktu sąsiedniego, ta sama chwila czasowa

$$u_{j+1}^n = u_j^n + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n \Delta x + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^n \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right)_j^n \Delta x^k + \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x^{k+1}}\right)_{j+\xi}^n \Delta x^{k+1}$$

zatrzymajmy dwa pierwsze wyrazy

i wyliczmy pochodną  $u$  po  $x$  w punkcie  $j$  (przedni iloraz różnicowy.)

$\xi$  w  $(0,1)$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{1}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n \Delta x \quad \longrightarrow \quad (U_x)_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}$$

jeśli rozwiniemy  $u_{j-1}$  w  $j$  dostaniemy wsteczny iloraz różnicowy

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j^n = \frac{u_{j-1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} (u_{xx})_{j-\eta}^n \Delta x \quad \longrightarrow \quad (U_x)_j^n = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}$$

na czerwono: błędy dyskretyzacji wzorów po prawej

iloraz centralny:

$$(U_x)_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad \text{z błędem dyskretyzacji}$$

$$\tau_j^n = -\frac{1}{6} (u_{xxx})_{j+\xi}^n \Delta x^2$$

z (-1,1)

---

podobnie skonstruujemy przybliżone wyrażenia na pochodną czasową:

$$(U_t)_j^n = \frac{U_j^n - U_j^{n-1}}{\Delta t} \quad \text{z błędem dyskretyzacji:} \quad \tau_j^n = -\frac{1}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} \Delta t$$

z(0,1)

$$u_t + vu_x = 0$$

najprostszy wybór: czasowa i przestrzenna pochodna zastąpione  
przednim ilorazem różnicowym

rozwiązanie dokładne :

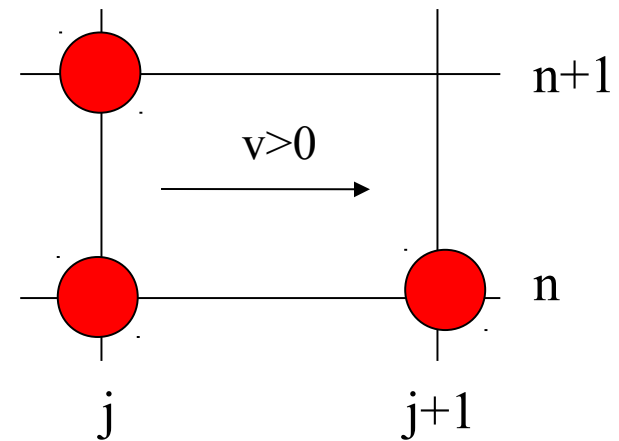
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = (u_t)_j^n + v(u_x)_j^n + \frac{\Delta t}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} + v \frac{\Delta x}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n$$

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x} = 0$$

liczba Courant'a  $\alpha = \frac{v \Delta t}{\Delta x}$

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

„szablon (*stencil*) obliczeniowy”  
„molekuła obliczeniowa”



dla  $v > 0$  : schemat nazywa się *downwind*

schemat jest *spójnym przybliżeniem* równania różniczkowa jeśli jego przepis w granicy zerowych kroków czasowych dąży do równania różniczkowego

spójność definiowana wg. błędu dyskretyzacji:

nasza metoda: minimalnej akceptowalnej dokładności

mówimy, że metoda **spójna** jeśli:

błędy dyskretyzacji czasowy i przestrzenny rzędu co najmniej pierwszego:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = \cancel{(u_t)_j^n + v(u_x)_j^n} + \frac{\Delta t}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} + v \frac{\Delta x}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n$$

---

błąd dyskretyzacji

schemat jest spójnym przybliżeniem równania różniczkowa jeśli jego przepis w granicy zerowych kroków czasowych dąży do równania różniczkowego

spójność definiowana wg. błędu dyskretyzacji:

nasza metoda: minimalnej akceptowalnej dokładności

mówimy, że metoda **spójna** jeśli:

błędy dyskretyzacji czasowy i przestrzenny rzędu co najmniej pierwszego:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + v \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} = \cancel{(u_t)_j^n + v(u_x)_j^n} + \frac{\Delta t}{2} (u_{tt})_j^{n+\theta} + v \frac{\Delta x}{2} (u_{xx})_{j+\xi}^n$$

błąd dyskretyzacji

często wygodniej używać: lokalnego błędu dyskretyzacji (błędu obcięcia, błędu lokalnego)

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x)$$

błąd lokalny: przestrzenny błąd lokalny takiego rzędu jak błąd dyskretyzacji  
czasowy błąd lokalny: jeden rząd wyżej niż błąd dyskretyzacji

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n + O(\Delta t^2) + O(\Delta x)$$

błąd lokalny: czasowy rzędu  $\Delta t^2$ , przestrzenny rzędu  $\Delta x$

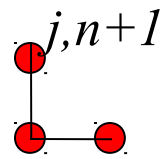
schemat ma szansę być zbieżny

nasza metoda: minimalnej akceptowalnej dokładności  
mówimy, że metoda **spójna** jeśli:

lokalny błąd czasowy rzędu co najmniej 2  
a lokalny przestrzenny rzędu co najmniej 1

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



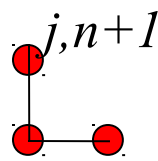
*dla  $v > 0$*   
*tzw. downwind*

błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

---

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



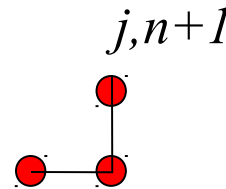
dla  $v > 0$   
tzw. *downwind*

błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

---

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



dla  $v > 0$   
tzw. *upwind*

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

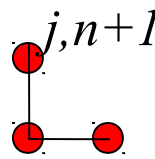
błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

---



przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



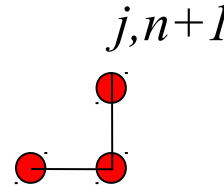
dla  $v > 0$

tzw. *downwind*

błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



dla  $v > 0$

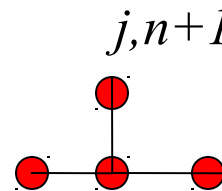
tzw. *upwind*

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

przedni iloraz czasowy, centralny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x^2)$

jak się sprawdzają?

przedni iloraz czasowy, przedni iloraz przestrzenny

$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha)U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$



dla  $v > 0$   
tzw. *downwind*

błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

przedni iloraz czasowy, wsteczny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$



dla  $v > 0$   
tzw. *upwind*

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha)U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x)$

przedni iloraz czasowy, centralny iloraz przestrzenny

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + v \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$



$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

błąd lokalny:  $O(\Delta t^2), O(\Delta x^2)$

jak się sprawdzają?

jak się sprawdzają?

ten sam błąd czasowy,  
przestrzenny: błąd dyskretyzacji  $O(\Delta x^2)$ , wsteczny i przedni  $O(\Delta x)$

wydawać się może      1) że centralny zawsze lepszy niż pozostałe  
2) że *upwind* i *downwind* równie dobre

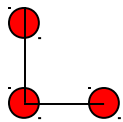
sprawdźmy:

rachunek numeryczny:  $\nu=1$

$\Delta t=1/20, \Delta x=1/10, \alpha=1/2$

warunek początkowy  $\phi(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

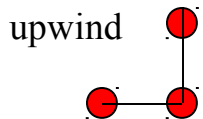
		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
rozwiązanie	5	-0.650	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000
dokładne	4	-0.600	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000
(ruch konika szachowego	3	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000
dwa do góry jeden w prawo).	2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000	0.000
	0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000



downwind

5	-0.647	-0.591	-0.253	-0.759	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-0.600	-0.506	-0.338	-0.506	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	-0.550	-0.450	-0.338	-0.338	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.225	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

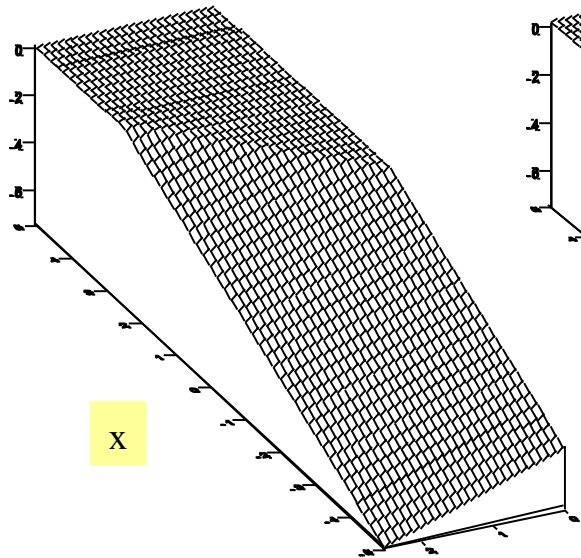
$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$  po lewej stronie: nawet nieźle, niestety pakiet nie przechodzi na stronę  $x>0$   
niepokojący zachowanie dla  $j=-1$



wygląda rozsądnie

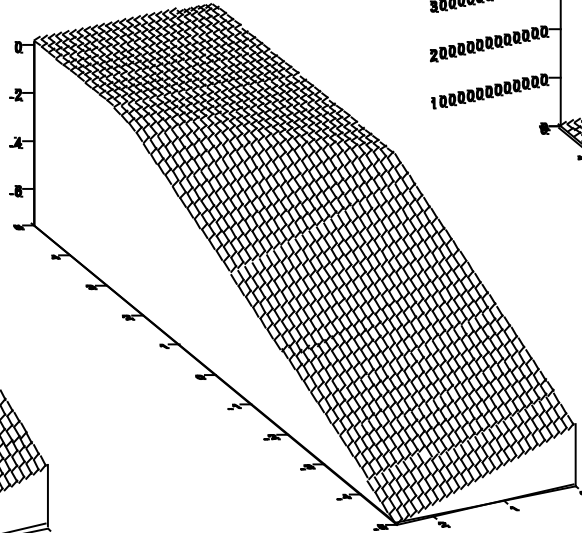
5	-0.650	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.153	-0.072	-0.022	-0.003
4	-0.600	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.106	-0.038	-0.006	0.000
3	-0.550	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.063	-0.013	0.000	0.000
2	-0.500	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	-0.025	0.000	0.000	0.000
1	-0.450	-0.350	-0.250	-0.150	-0.050	0.000	0.000	0.000	0.000
0	-0.400	-0.300	-0.200	-0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

dokładny



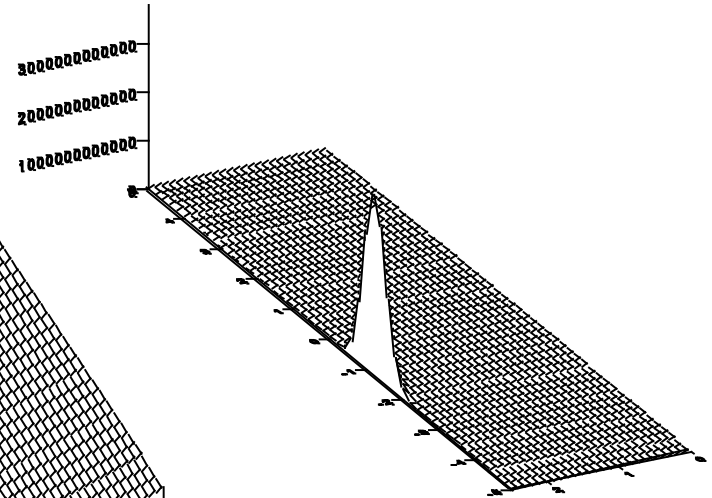
x

upwind



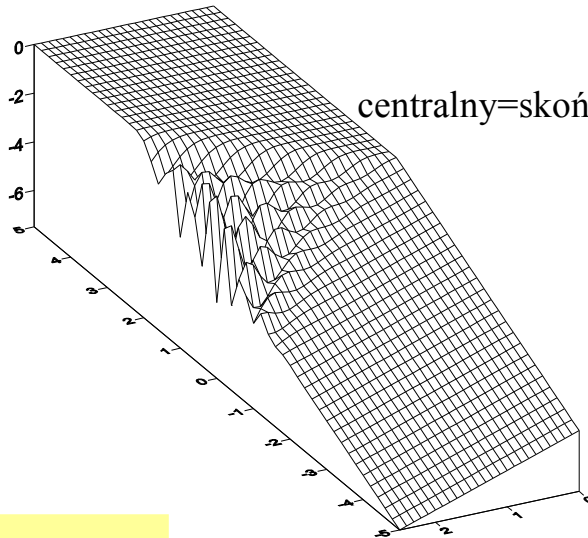
t

downwind



niestabilny ☹️

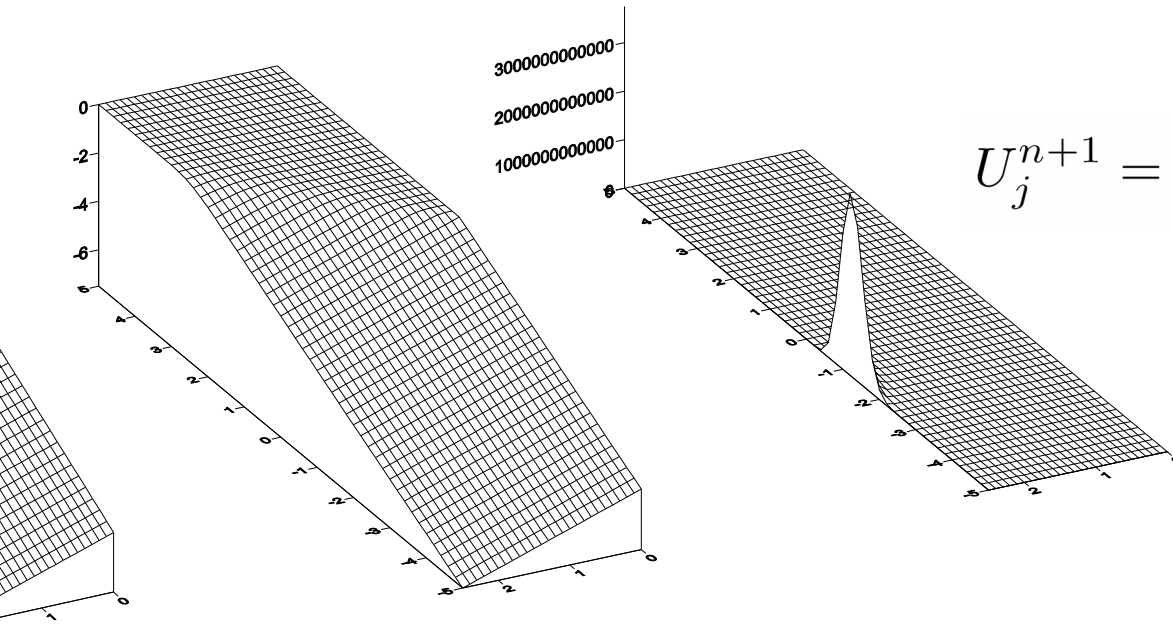
centralny=skończy się eksploizją!



$\Delta t=1/20, \Delta x=1/10, \alpha=1/2$

upwind

downwind



$$U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$$

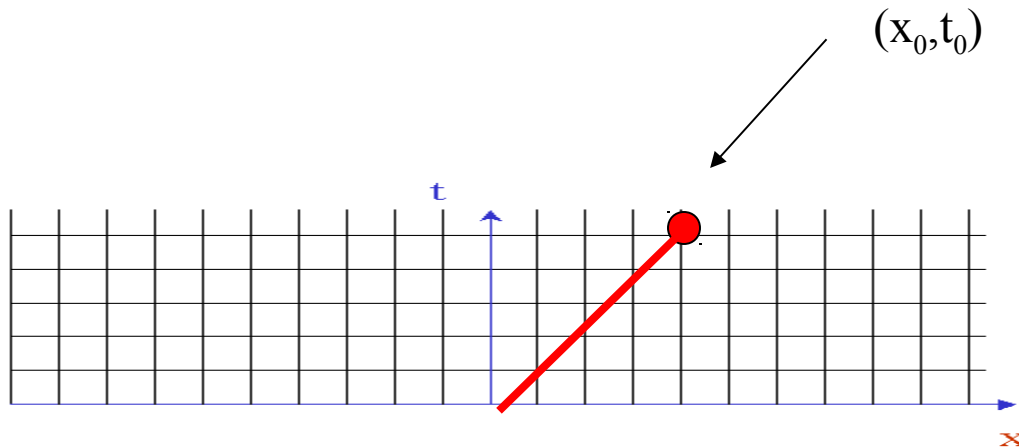
$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

Podobne formuły, dlaczego tak różne działanie?

domena zależności: dla punktu  $(x_0, t_0)$  zbiór wszystkich punktów które mają wpływ na wartość rozwiązania w  $u(x_0, t_0)$

domena zależności: dla równania adwekcji

$$u_t + v u_x = 0 \quad v=1$$

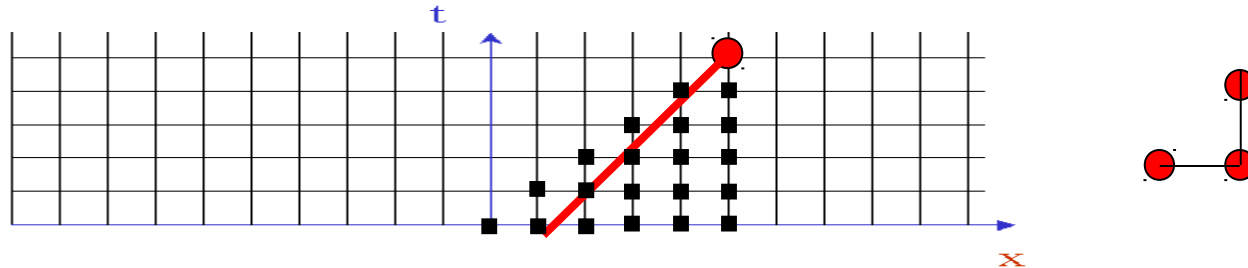


domena zależności to charakterystyka równania adwekcji  
dana formułą  $t=x+C$  z  $C=t_0-x_0$

numeryczna domena zależności punktu  $(j_0, n_0)$

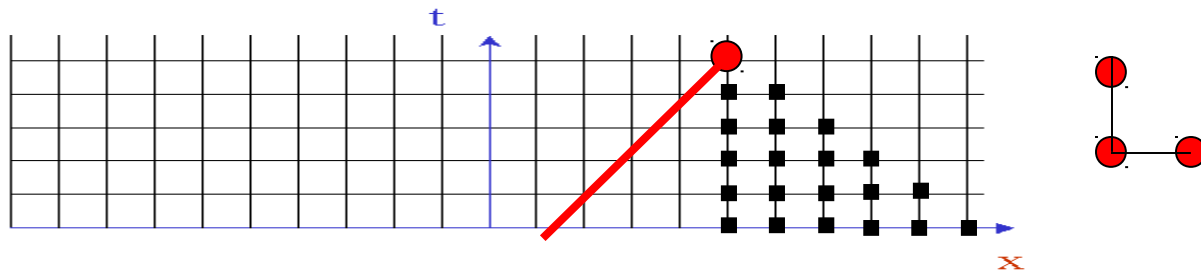
zbiór oczek siatki, które mają wpływ na rozwiązanie w tym punkcie

pod wiatr



domena numeryczna zawiera w sobie  
dokładną domenę zależności

z wiatrem



schemat *downwind* zbiera informacje z kierunku przeciwnego  
niż dokładny

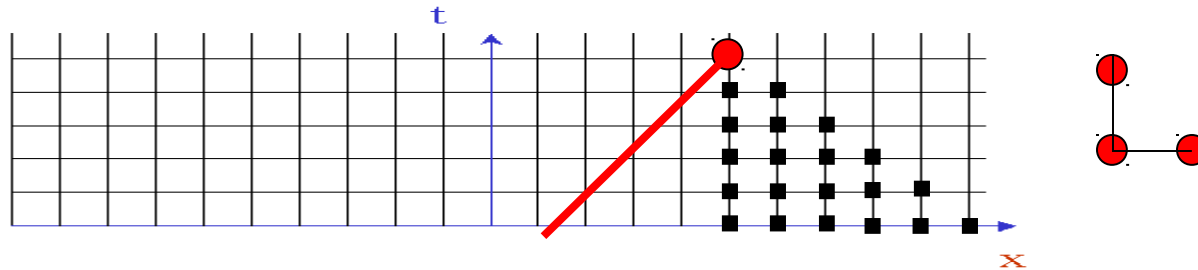
nie może dać dobrego wyniku bo: warunek początkowy nie ma  
żadnego wpływu na rezultat

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w  $0 < t < T$  jeśli:

$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$

$\|*\|$  - norma wektora

z wiatrem

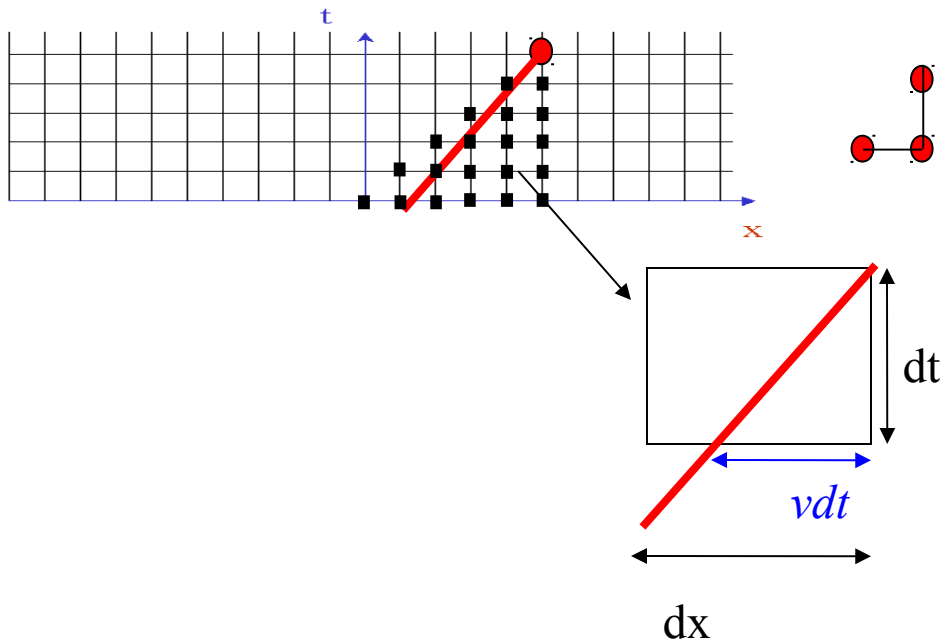


zagęszczanie siatki w  $dx$  i  $dt$  nie zmieni faktu, że numeryczna domena zależności obejmuje prawy trójkąt zamiast lewej prostej



tw. Courant-Friedrich-Lewy:  
warunkiem koniecznym zbieżności schematu różnicowego  
(dla dowolnego warunku początkowego) jest aby jego numeryczna domena zależności  
zawierała w sobie (fizyczną) domenę zależności równania różniczkowego.

zagęszczanie siatki nie pomoże jeśli domena fizyczna pozostaje na zewnątrz numerycznej



upwind: spełnia warunkowo tw. CFL:  
numeryczna dom.zal. zawiera fizyczną  
jeśli:  $vdt \leq dx \rightarrow \alpha \leq 1$

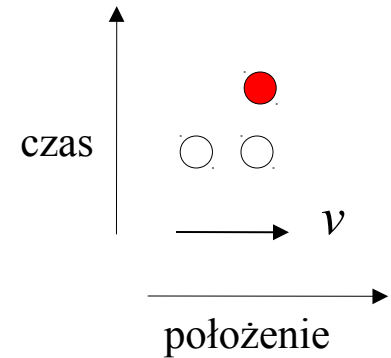
skok siatki przestrzennej nakłada ograniczenie na skok siatki czasowej  
uwaga: jeśli ustalimy  $\Delta t$  a zagęszczać będziemy siatkę w  $x$ : grozi nam złamanie kryt. CFL

*upwind* spełnia kryterium CFL gdy :  $0 \leq \alpha \leq 1$  ( $v > 0$ )  
*downwind* gdy ( $v < 0$ ) :  $-1 \leq \alpha \leq 0$

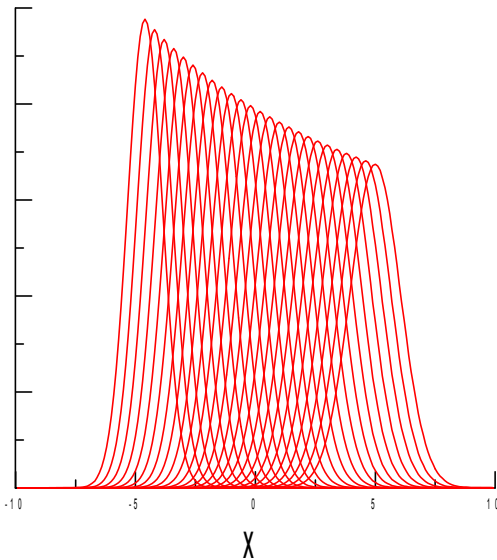
## Schemat *upwind* zastosowanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x}$$

równanie adwekcji  
schemat pod wiatr



$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j, n) - u(j - 1, n)}{\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x)$$



$\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.04$   
*upwind*  $\alpha = 0.4$

bez eksplozji ale pakiet się rozplywa = dyfuzja numeryczna  
(w dokładnym rozwiązaniu pakiet zachowuje kształt)

**spójność, zbieżność, stabilność** (podstawowe pojęcia dla problemów zależnych od czasu)

spójność implikuje, że równanie różnicowe jest „dobrym” przybliżeniem równania różniczkowego

zbieżność: że rozwiązanie dokładne w granicy zerowego kroku czasowego / przestrzennego

stabilność: że rozwiązanie numeryczne nie jest zbyt czułe na zaburzenia (np. warunku pocz.)

dobry schemat ma być spójny, stabilny i zbieżny

związek między pojęciami daje: **twierdzenie o ekwiwalencji Laxa**

(odpowiednik tw. Dahlquist dla równań zwyczajnych)

mamy liniowe równanie różniczkowe i jego spójne przybliżenie różnicowe:  
warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności jest stabilność schematu

jaka stąd nauka?

np. upwind nie może być zbieżny dla  $\alpha > 1$  (CFL)

jest spójny, musi więc być niestabilny dla  $\alpha > 1$

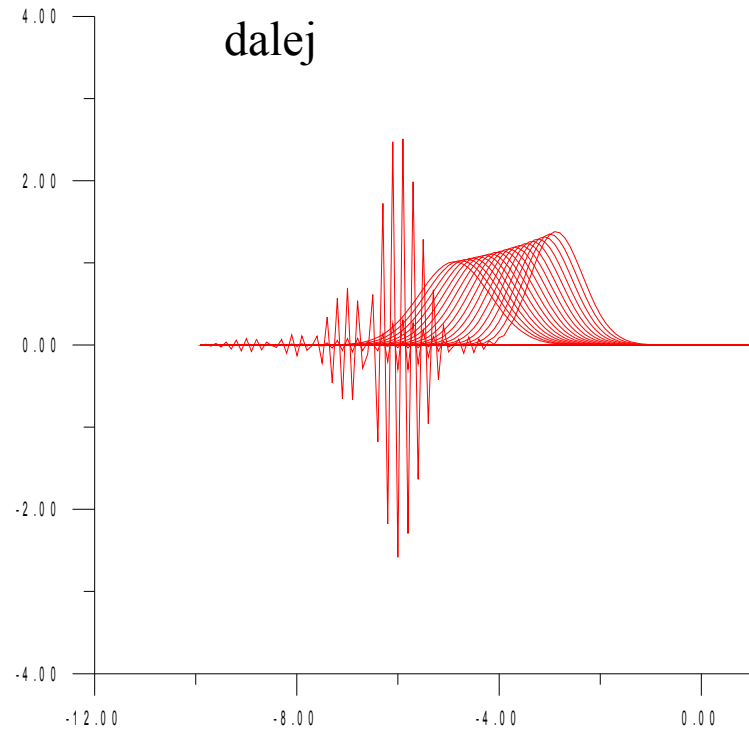
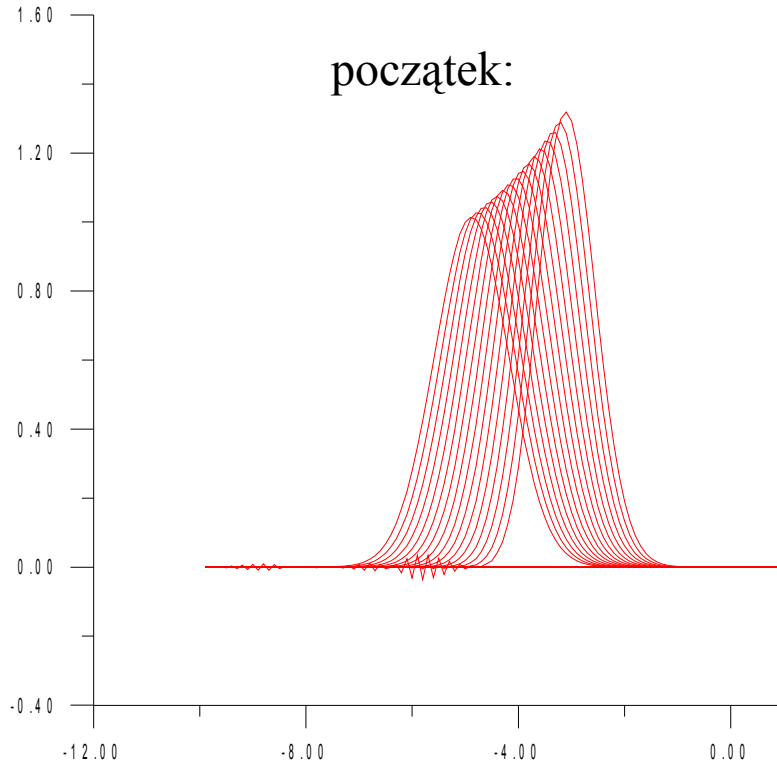
stąd CFL używane dla spójnych jako jak kryterium stabilności

upwind  $\alpha=1.1$   
 $dx=0.1$   
 $vdt=.11$

jaka stąd nauka?

np. upwind nie może być zbieżny dla  $\alpha>1$  (CFL)

jest spójny, musi być więc niestabilny dla  $\alpha>1$   
stąd użycie CFL jak kryterium stabilności



## ku ścisłej definicji zbieżności i stabilności

rozwiązanie w chwili  $n$   
w całej przestrzeni możemy przedstawić jako wektor

$$\mathbf{U}^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_N^n \end{pmatrix}$$

powiedzmy, że równanie różniczkowe jest liniowe i jednorodne  
wtedy jeden krok schematu różnicowego można przedstawić jako mnożenie  
wektora i pewnej macierzy (dla niejednorodności  $f$  byłoby  
z prawej strony  $+\mathbf{f}^n$ )

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_{\Delta} \mathbf{U}^n$$



## definicji zbieżności

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w  $0 < t < T$  jeśli:

$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$

norma: przyporządkowanie wektor  $\rightarrow$  skalar

- 1) dodatnio określone  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ ,  $\|\mathbf{u}\| = 0$ , jeśli  $\mathbf{u}$  – wektor zerowy
- 2) rozłączne z mnożeniem przez skalar  $\|a\mathbf{u}\| = |a| \|\mathbf{u}\|$
- 3) spełniające nierówność trójkąta  $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

norma max:

$$\|\mathbf{U}^n\|_{\infty} \equiv \max_j |U_j^n|,$$

norma euklidesowa (długość wektora):

$$\|\mathbf{U}^n\|_2 \equiv \left[ \sum_j (U_j^n)^2 \right]^{1/2}.$$

Upwind: wiemy, że spójny

wiemy, że dla  $\alpha > 1$  niezbieżny, więc niestabilny

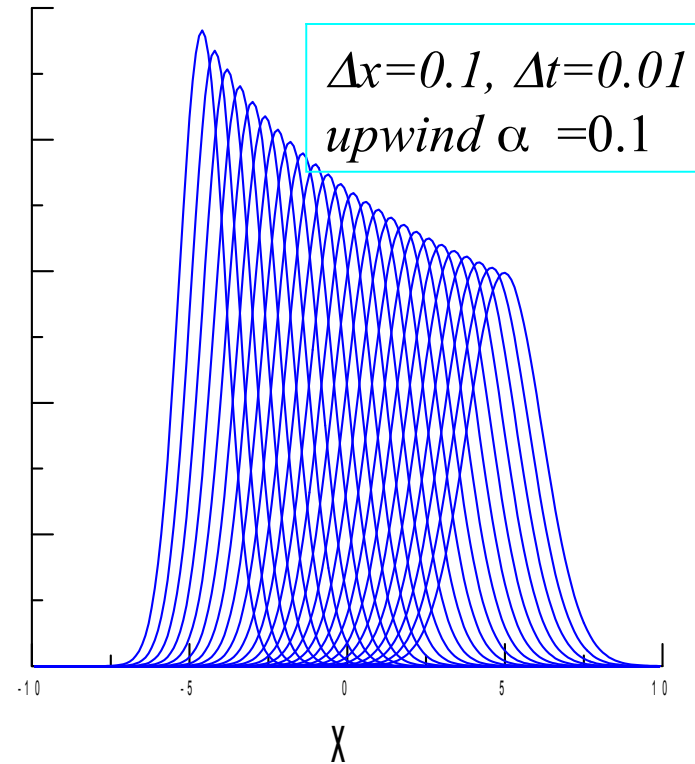
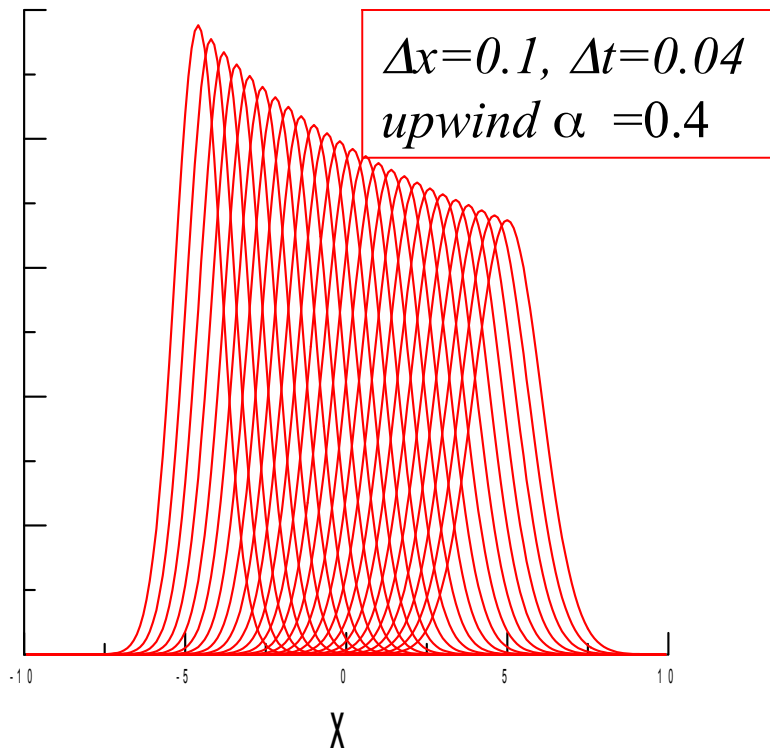
czy zbieżny dla  $\alpha \leq 1$  ? jeśli zbieżny to stabilny  
czy stabilny dla  $\alpha \leq 1$  ? jeśli stabilny to zbieżny

sprawdźmy doświadczalnie czy zbieżny



Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w  $0 < t < T$  jeśli:

$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$



zmniejszamy krok czasowy, wynik równie zły a miał być zbieżny!

[zobaczymy, że dla upwind współczynnik dyfuzji numerycznej proporcjonalny jest do  $\Delta x$  i niezależny od  $\Delta t$ ]

Schemat różnicowy jest zbieżny do rozwiązania równania różniczkowego w  $0 < t < T$  jeśli:

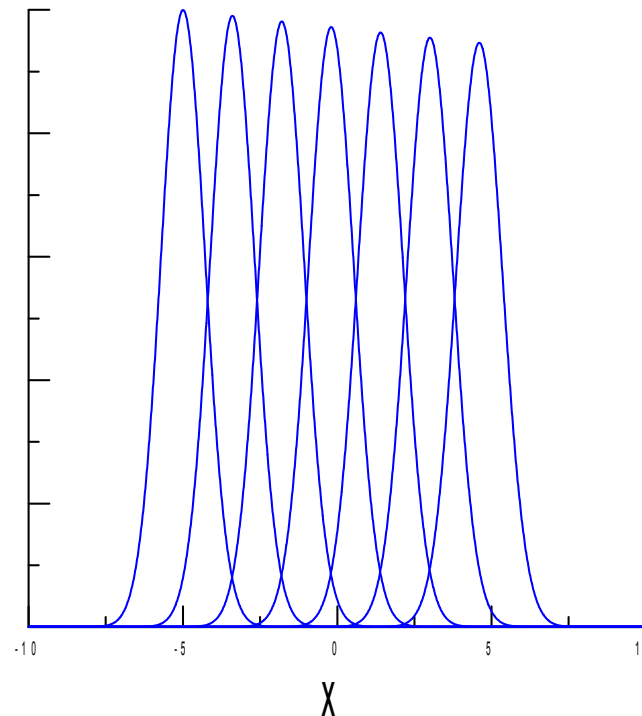
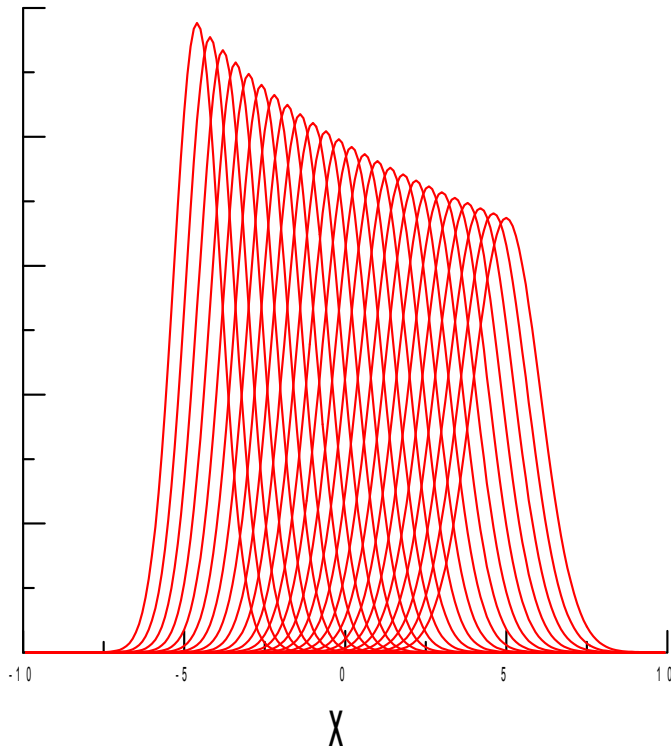
$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{U}^n \| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$

$$\Delta x = 0.1, \Delta t = 0.04$$

*upwind  $\alpha = 0.4$*

$$\Delta x = 0.01, \Delta t = 0.004$$

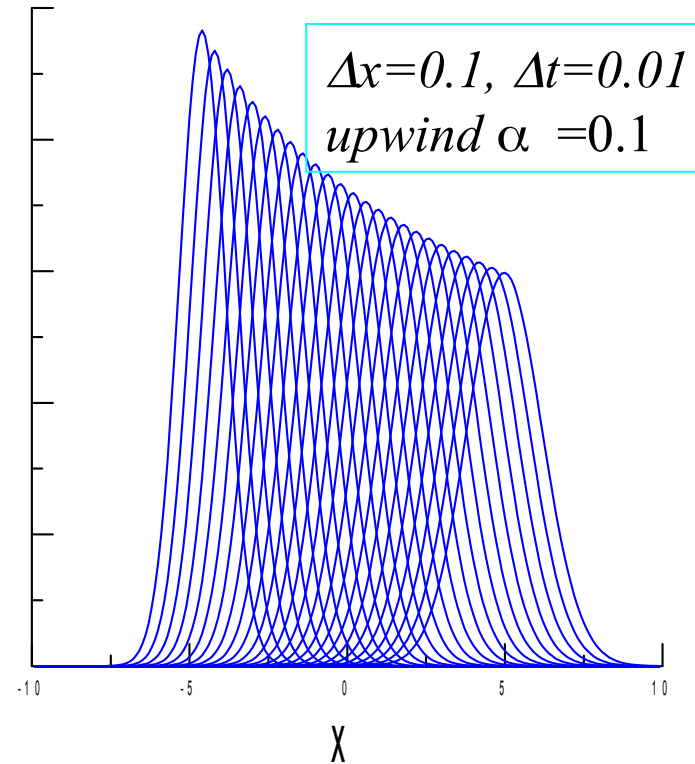
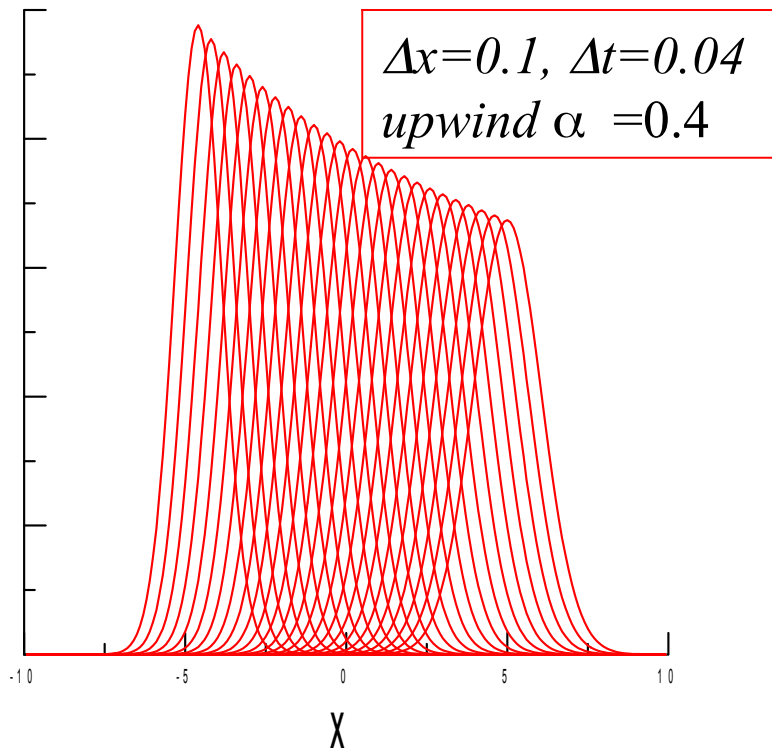
*upwind  $\alpha = 0.4$*



zbieżność dla równań cząstkowych:  $\Delta t$  do zera, **ale również  $\Delta x$  do zera**  
zmniejszenie tylko jednego z kroków **nie** gwarantuje poprawy

wniosek: upwind wygląda na zbieżny

aby podać ścisły dowód – zamiast eksperymentów numerycznych – wykazać stabilność



zmniejszamy krok czasowy przy stałym  $dx$ , a brak poprawy wyniku

[zobaczymy, że dla upwind współczynnik dyfuzji numerycznej proporcjonalny jest do  $\Delta x$  i niezależny od  $\Delta t$ ]

## definicji stabilności

mamy liniowe jednorodne równanie różniczkowe.  
oraz schemat różnicowy (z odpowiednią macierzą  $\mathbf{L}$ )

schemat różnicowy jest **stabilny** jeśli skończone zaburzenie warunku początkowego prowadzi do skończonej różnicy między rozwiązaniami:

to jest: jeśli istnieje takie  $C$  (niezależne od kroku siatki)  
że dla każdej pary warunków początkowych

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_{\Delta} \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U}^0 = \phi,$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_{\Delta} \mathbf{V}^n, \quad \mathbf{V}^0 = \psi.$$

$$\|\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n\| \leq C \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0\|$$

dla:  $n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$

## alternatywna definicji stabilności

dla liniowych schematów różnicowych

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U}^0 = \phi,$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{V}^n, \quad \mathbf{V}^0 = \psi.$$

$$\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta (\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n)$$

przy oznaczeniu  $\mathbf{W} = \mathbf{U} - \mathbf{V}$  warunek

$$\|\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n\| \leq C \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0\|$$

zapiszemy jako:

$$\|\mathbf{W}^n\| \leq C \|\mathbf{W}^0\|$$

całkiem dowolny WP

czytać: schemat jest stabilny jeśli norma pozostaje skończona przy

$$n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$$

def 2:

$$\|W^n\| \leq C \|W^0\|$$

czytać: schemat jest stabilny jeśli norma pozostaje skończona

dla:  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $n\Delta t \leq T$

Uwaga: dla stabilności nie wystarczy zmniejszyć  $\Delta t$   
przy stałym  $\Delta x$  i uzyskać skończone rozwiązanie dla  $t < T$ .  
Również  $\Delta x$  ma dążyć do zera.

---

def 1:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{U}^n, \quad \mathbf{U}^0 = \phi,$$

definicje równoważne  
dla problemów liniowych

$$\mathbf{V}^{n+1} = \mathbf{L}_\Delta \mathbf{V}^n, \quad \mathbf{V}^0 = \psi.$$

dla równań nieliniowych:  
każda ma inny sens.

$$\|\mathbf{U}^n - \mathbf{V}^n\| \leq C \|\mathbf{U}^0 - \mathbf{V}^0\|$$

pokażmy, że schemat *upwind* jest stabilny dla liczby Courant'a spełniającej kryterium CFL  $\alpha$  z  $(0,1]$

wykorzystamy definicję 2:  $\|W^n\| \leq C \|W^0\|$

oraz normę maksimum

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

średnia ważona!

$$|U_j^{n+1}| \leq \|U^n\|_\infty$$

z def normy max

$$\begin{aligned} |U_j^n| &\leq \|U^n\|_\infty \\ |U_{j-1}^n| &\leq \|U^n\|_\infty \end{aligned}$$

dla każdego  $j$ , więc:

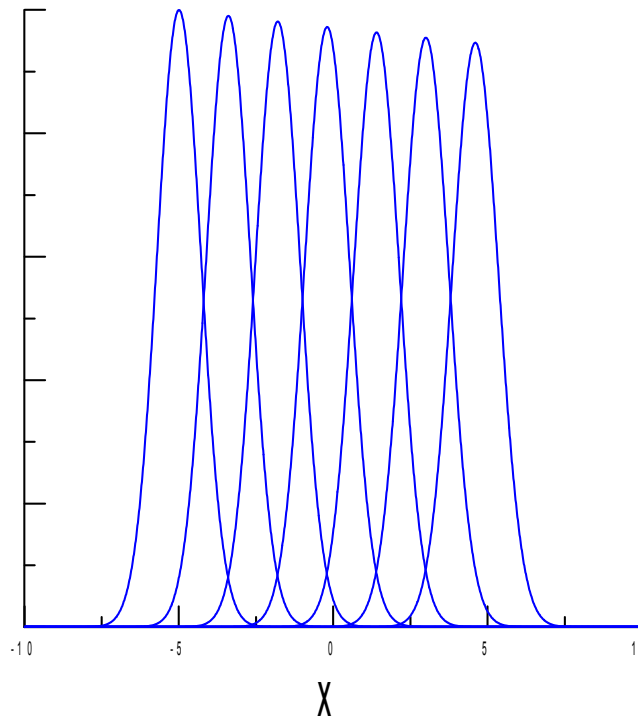
$$\|U^{n+1}\|_\infty \leq \|U^n\|_\infty$$

cbdu

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

średnia ważona: nie ma punktu, w którym schemat upwind wygenerowałby większą wartość w kolejnym kroku czasowym

$\Delta x = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.004$   
*upwind*  $\alpha = 0.4$





Uogólnienie: warunkiem wystarczającym aby schemat typu:

$$U_j^{n+1} = \sum_{|s| \leq S} c_s U_{j+s}^n$$

**zasada maximum  
(ogólne r.r.cz., nie tylko adwekcji)**

był stabilny wg normy max jest aby: wszystkie współczynniki  $c$  były dodatnie i sumowały się do jedynki

dowód: podobny do wyżej pokazanego

dla adwekcji:

upwind:  $U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$

downwind:  $U_j^{n+1} = (1 + \alpha) U_j^n - \alpha U_{j+1}^n$

centralny:  $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$

sumę do 1 mamy  
zawsze (spójność),  
ale dla  $v > 0$  tylko upwind  
z  $0 \leq \alpha \leq 1$   
spełnia założenie  
tw. o zasadzie maksimum

**stabilność** schematu: dotyczy małych kroków oraz skończonych czasów  
 $n \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, n\Delta t \leq T$

**stabilność bezwzględna** schematu dla równania cząstkowego:  
wyniki mają pozostawać skończone dla stałego  $\Delta t$  i  $\Delta x$  i dla nieskończonego  $n$

**w: praktyce to stabilność bezwzględna jest ważna**

stabilność bezwzględna jest silniejszym warunkiem niż stabilność  
(znaczy: schemat stabilny bezwzględnie jest zawsze stabilny  
a stabilny nie zawsze jest bezwzględnie stabilny)

## Analiza stabilności bezwzględnej von Neumanna

zakładamy, że rozwiązanie schematu różnicowego  $U_j$  jest periodyczne w  $j$  z okresem  $J$

w praktyce nie jest to ważne - można przyjąć, że  $J \gg$  obszar, który nas interesuje

$U$  – funkcja w przestrzeni położeń

$A$  – funkcja w przestrzeni częstości (przestrzennych) [wektora falowego]

$$U_k^n = \sum_k A_k^n \exp(ikx)$$

$k$ -wektor falowy  $2\pi/\lambda$

dyskretna TF

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J - 1$$

$$w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

uwaga: dla  $U$  i  $A$ :  $n$  w indeksie górnym to chwila czasowa, dla  $w$  – indeks górny to potęga

$$A_k^n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n (w_j^k)^*$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad A_k^n = \frac{1}{J} \sum_{j=0}^{J-1} U_j^n (w_j^k)^* \quad w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

↑  
wielkość fizyczna  
w przestrzeni  $r$

wielkość w przestrzeni  $k$

normy euklidesowe wektorów  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{A}$  wiąże twierdzenie Parsewala:

$$\|\mathbf{U}^n\|_2^2 = J \|\mathbf{A}^n\|_2^2$$

$$\|\mathbf{A}^n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{J-1} |A_k^n|^2$$

analiza stabilności von Neumanna:

jeśli pokażemy że norma transformaty Fouriera jest skończona to wystarczy dla udowodnienia stabilności (i np. wybrania bezpiecznego kroku czasowego)

analiza w przestrzeni  $k$  jest bardzo prosta

Przykład: analiza von Neumanna dla schematu upwind z  $\alpha$  z  $(0,1]$

$$U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

$$w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = (1 - \alpha) \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k + \alpha \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_{j-1}^k$$

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = \sum_{k=0}^{J-1} [(1 - \alpha) A_k^n w_j^k + \alpha A_k^n w_j^k \exp(-2\pi i k / J)]$$

równość ma być dla każdego  $A_k^0$  (dla wszystkich warunków początkowych)  
co oznacza, że wyrazy w sumie po  $k$  muszą być identyczne

$$\cancel{A_k^{n+1} w_j^k} = [(1 - \alpha) + \alpha \exp(-2\pi i k / J)] \cancel{A_k^n w_j^k}$$

$$A_k^{n+1} = \underline{M_k} A_k^n \quad \text{wsp. wzmocnienia modu } k$$

$$A_k^{n+1} = M_k A_k^n \quad \text{wsp. wzmocnienia modu } k$$

$$A_k^{n+1} = (M_k)^{n+1} A_k^0$$

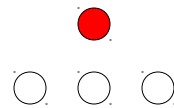
norma transformaty pozostanie skończona gdy  $|M_k| \leq 1$  dla każdego  $k$

$$M_k = 1 - \alpha + \alpha \exp(-2\pi i k / J)$$

$$|M_k| \leq |1 - \alpha| + |\alpha| = 1 \quad (\text{nierówność trójkąta})$$

nie ma modu który by rósł: wniosek -  
schemat *upwind* jest stabilny dla  $\alpha$  z  
(0,1]

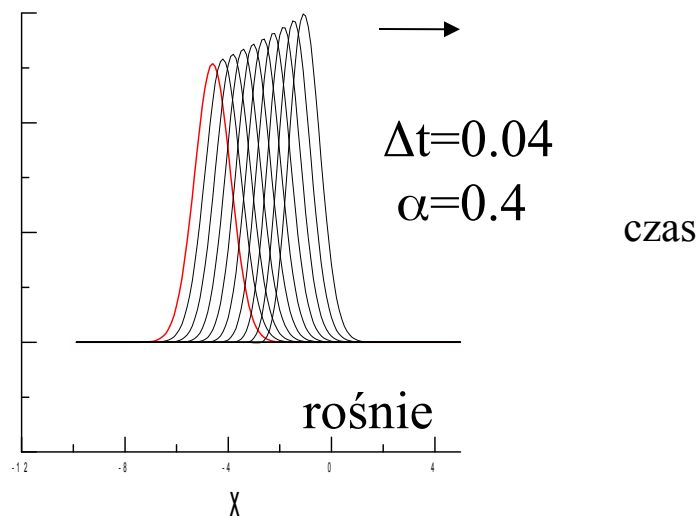
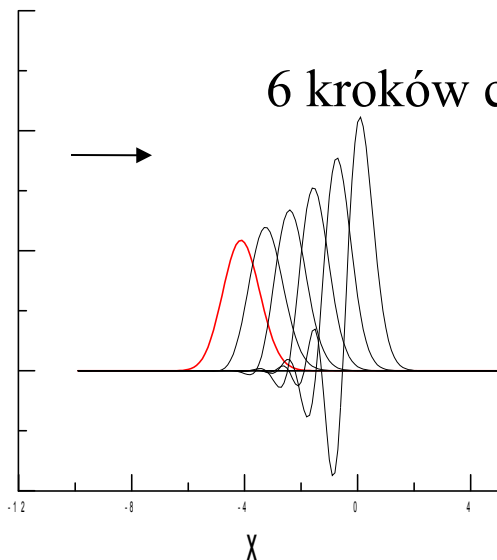
dokładniejszy schemat: Eulera z centralnym ilorazem  
przestrzennym:



$$\frac{u(j, n + 1) - u(j, n)}{\Delta t} = -v \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2) \quad \xrightarrow{\text{położenie}}$$

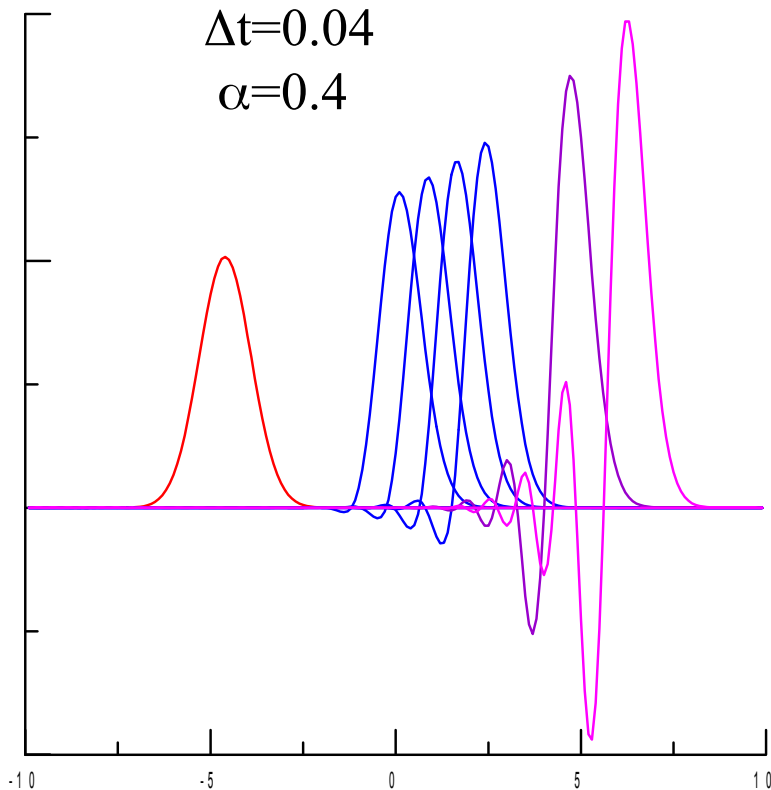
$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

Weźmy  $\Delta x = 0.1$



tu niedobrze

# Euler z centralnym ilorazem przestrzennym

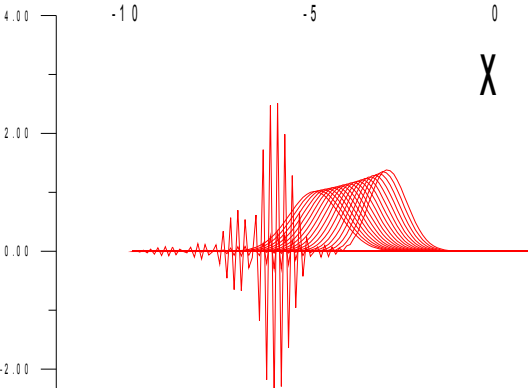


drastyczna zmiana kształtu pakietu  
nastąpiła, tylko później

ujemne wartości gęstości ☹

upwind: zmienia kształt,  
ale dyfuzyjnie (na ujemne wartości nie przechodzi,  
nie eksploduje)

dokładniejszy – centralny – fajerwerki i eksplozja



Uwaga: widzimy, że wyższe częstotliwości są wzmacniane i że  
spóźniają się za pakietem: zrozumiemy to przy analizie  
dyfuzji w przestrzeni  $k$  oraz przy relacji dyspersji numerycznej

Symulacja dla odpowiednio wysokiego  $t$ : zawsze skończy się eksplozją  
można zaryzykować twierdzenie, że schemat centralny nie jest bezwzględnie stabilny dla r.adw.



# analiza von Neumanna dla schematu z centralną pochodną przestrzenną

$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$U_k^0(x) = \sum_k A_k^0 \exp(ikx)$$

$$U_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 \exp(ijk\Delta x)$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J - 1$$
$$w_j = \exp(2\pi i j / J)$$

$\Delta x = 2\pi / J$

$$A_k^1 = A_k^0 - \frac{\alpha}{2} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) A_k^0$$

$$M_k = 1 - \frac{\alpha}{2} (2i \sin(k\Delta x))$$

$$|M_k|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \longrightarrow$$

widzimy, że mody  $k$  na ogół są wzmacniane  
wyobraźmy sobie gęstą siatkę ( $dx$  małe):  
wzmacniane będą większe  $k$ , co widzieliśmy  
w numerycznym eksperymencie  
metoda = niestabilna bezwzględnie i dlatego  
bezużyteczna w praktycznym zastosowaniu

Ustaliliśmy, że do rozwiązywania równania adwekcji lepiej nadaje się mniej dokładny schemat upwind niż ten z ilorazem centralnym

upwind:  $U_j^{n+1} = (1 - \alpha) U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$

centralny:  $U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$

warunek wystarczający dla stabilności wg. normy max:  
wszystkie współczynniki dodatnie i sumują się do jedynki

w centralnym = sumują się do jedynki, ale nie są dodatnie

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

zastąpić średnią arytmetyczną sąsiadów

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

schemat Laxa-Friedrichsa

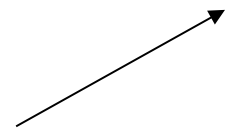
$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^n \frac{1 + \alpha}{2} + U_{j-1}^n \frac{1 - \alpha}{2}$$

dla  $\alpha \in (-1, 1)$  spełnione WW stabilności  
w sensie normy max

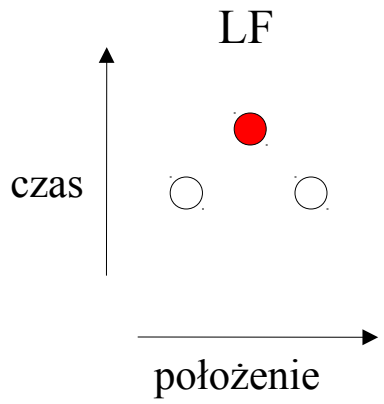
Ale czy spójna?

$$u(j, n + 1) = -v\Delta t \frac{u(j + 1, n) - u(j - 1, n)}{2\Delta x} + u(j, n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

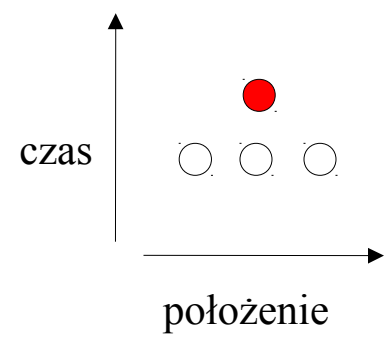
$$u(j, n) = \frac{1}{2} (u(j - 1, n) + u(j + 1, n)) + O(\Delta x)$$



metoda pozostanie spójna, obniżymy rząd dokładności przestrzennej zyskamy stabilność



zamiast



metoda Laxa-Friedrichsa : analiza von Neumanna

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

$\Delta x = 2\pi/J$   
 $w_j = \exp(2\pi i j / J)$

$$A_k^{n+1} = \left[ \frac{\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x)}{2} - \frac{\alpha}{2} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) \right] A_k^n$$

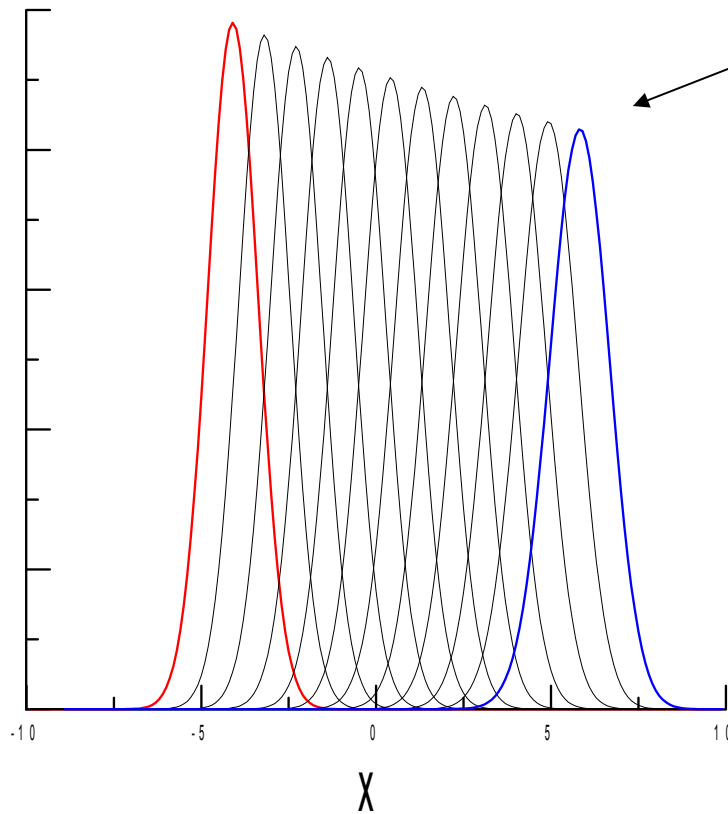
$$M_k = \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x)$$

$$|M_k|^2 = \cos^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)$$

$$|M_k|^2 \leq 1 \quad \text{gdy} \quad \alpha^2 \leq 1 \quad \text{Kryterium CFL !}$$

## Metoda Laxa-Friedrichsa = zastosujmy

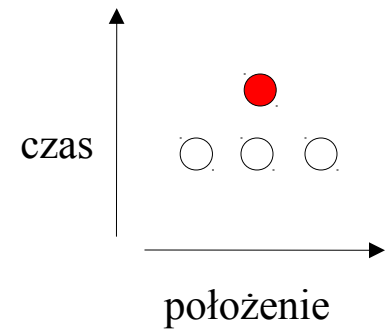
$\Delta t = 0.09$



stabilna (uniknęliśmy eksplozji),  
ale pakiet nie zachowuje się jak powinien.

niebieski z czerwonego rozplął się  
(większa szerokość kosztem wysokości)  
**dyfuzja numeryczna.**

## schemat Laxa-Wendroffa



$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{a})$$

ma być jednokrokowy i z błędem lokalnym  $\Delta x^2$ ,  $\Delta t^3$

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_j, t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x_j, t} + O(\Delta t^3)$$

pochodne czasowe zastępujemy równaniem (a)

$$u(x_j, t + \Delta t) = u(x_j, t) - v \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x_j, t} + v^2 \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x_j, t} + O(\Delta t^3)$$

z centralnymi ilorazami pochodnych:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2} (U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n)$$

błąd p:  $O(\Delta x^2)$

Wynik:

