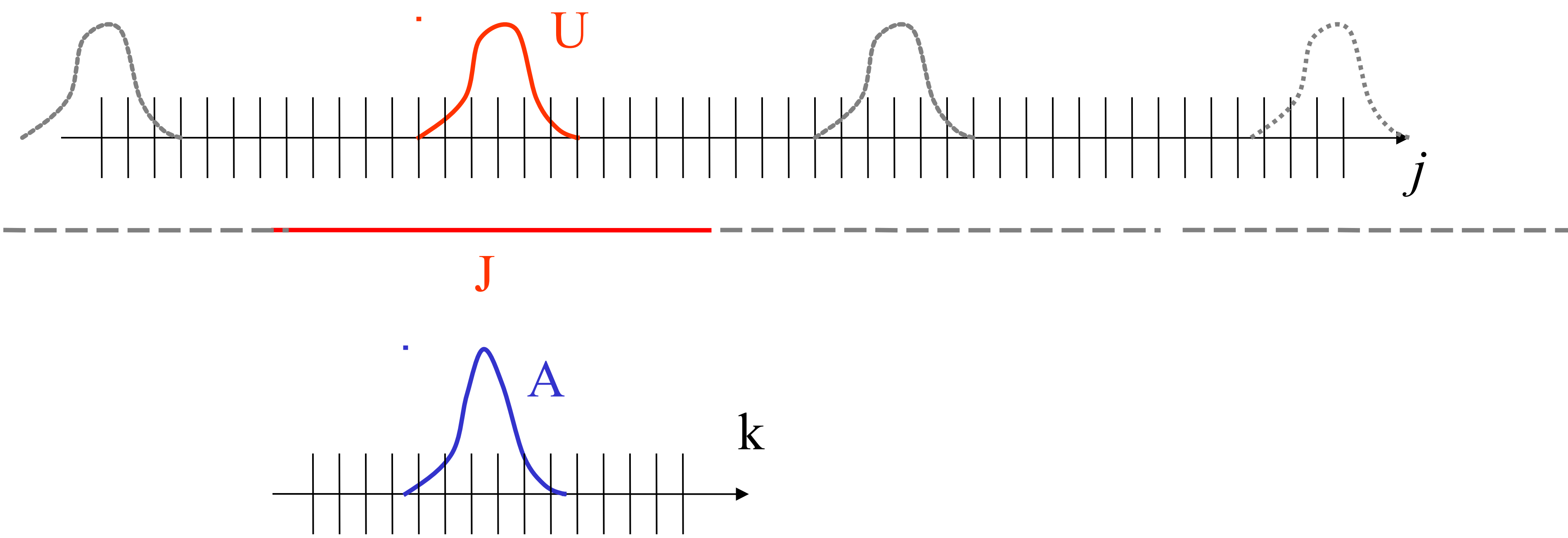
zasada maximum: daje tylko WW dla bezwzględnej stabilności.
WKW produkuje analiza w przestrzeni odwrotnej - von Neumanna

zakładamy, że rozwiązanie schematu różnicowego U_j jest periodyczne w j z okresem J *(periodyczne warunki brzegowe)*
w praktyce nie jest to ważne - można przyjąć, że J >> obszaru, który nas interesuje

U – funkcja w przestrzeni położeń
A – funkcja w przestrzeni częstości (przestrzennych) [wektora falowego]



zasada maximum: daje tylko WW dla bezwględnej stabilności.
WKW produkuje analiza w przestrzeni odwrotnej - von Neumanna

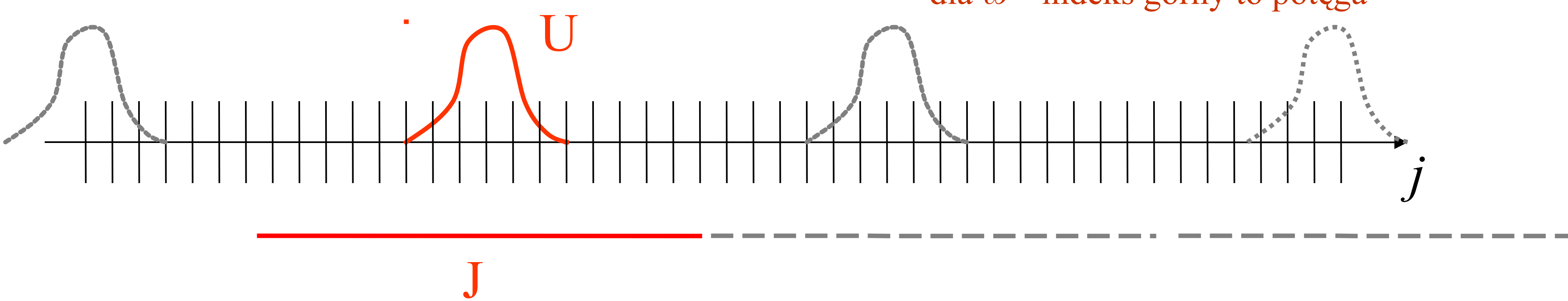
dyskretna TF

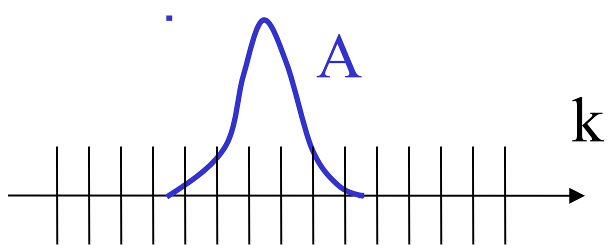
$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \ldots, J-1$$

$$w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

$$A_k^n = \frac{1}{J}\sum_{j=0}^{J-1} U_j^n \left(w_j^k\right)^*$$

uwaga: dla U i A:
n w indeksie górnym to chwila czasowa,
dla ω – indeks górny to potęga





$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \qquad A_k^n = \frac{1}{J}\sum_{j=0}^{J-1} U_j^n \left(w_j^k\right)^* \qquad w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

wielkość fizyczna
w przestrzeni *r*

wielkość w przestrzeni *k*

normy euklidesowe wektorów **U** oraz **A** wiąże twierdzenie Parsevala:

$$||\mathbf{U}^n||_2^2 = J||\mathbf{A}^n||_2^2$$

$$||\mathbf{A}^n||_2^2 = \sum_{k=0}^{J-1} |A_k^n|^2$$

analiza stabilności von Neumanna:
jeśli pokażemy że norma transformaty Fouriera jest skończona dla n→∞
to wystarczy dla udowodnienia stabilności bezwzględnej
(i np. wybrania bezpiecznego kroku czasowego)

... co jest użyteczne, bo analiza w przestrzeni *k* jest bardzo prosta

Przykład: analiza von Neumanna dla schematu upwind z α z (0,1]

$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\,U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

$$w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \ldots, J-1$$

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = (1-\alpha) \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k + \alpha \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_{j-1}^k$$

$$\sum_{k=0}^{J-1} A_k^{n+1} w_j^k = \sum_{k=0}^{J-1} \left[(1-\alpha)\,A_k^n w_j^k + \alpha A_k^n w_j^k \exp(-2\pi i k/J)\right]$$

równość obowiązuje dla każdego A_k^0 (dla wszystkich warunków początkowych)
co oznacza, że wyrazy w sumie po k muszą być identyczne

$$A_k^{n+1} \cancel{w_j^k} = \left[(1-\alpha) + \alpha \exp(-2\pi i k/J)\right] A_k^n \cancel{w_j^k}$$

$$A_k^{n+1} = \underline{M_k} A_k^n$$

wsp. wzmocnienia modu k

$$A_k^{n+1} = M_k A_k^n$$ wsp. wzmocnienia modu k

$$A_k^{n+1} = (M_k)^{n+1} A_k^0$$

norma transformaty pozostanie skończona gdy $|M_k| \leq 1$ dla każdego k

$$M_k = 1 - \alpha + \alpha \exp(-2\pi i k/J)$$

$$|M_k|^2 = (1 - \alpha + \alpha \cos(2\pi k/J))^2 + \alpha^2 \sin^2(2\pi k/J)$$

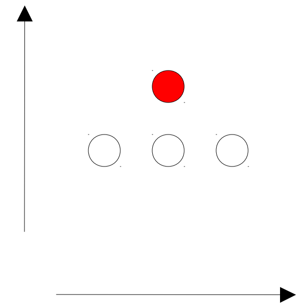
$$|M_k|^2 = \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha) cos(2\pi k/J)$$

$$|M_k|^2 = 1 + 2\alpha(\alpha - 1)(1 - \cos(2\pi k/J)) \leq 1$$

dla α z (0,1]

nie ma modu który by rósł: wniosek - **schemat *upwind* jest bezwzględnie stabilny dla α z (0,1]**

no to teraz
spójrzmy na nadokładniejszy ze schematów poznanych
do tej pory: z centralnym ilorazem przestrzennym:



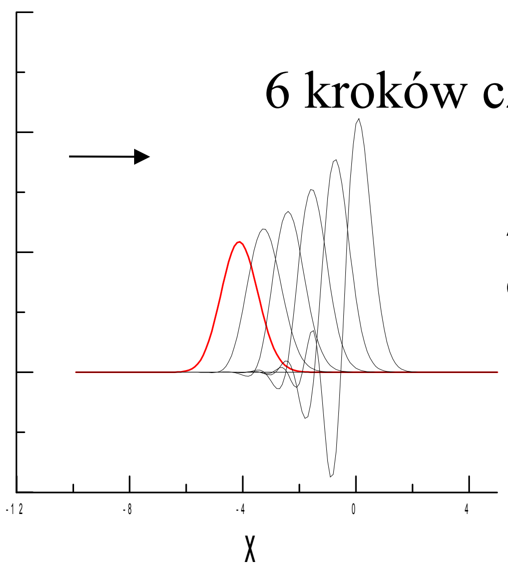
położenie

$$\frac{u(j,n+1)-u(j,n)}{\Delta t} = -v\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

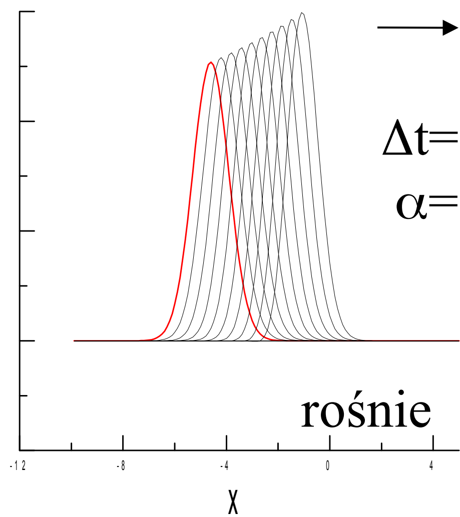
$$u(j,n+1) = -v\Delta t\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + u(j,n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

Weźmy Δx=0.1

6 kroków czasowych:



Δt=0.09
α=0.9



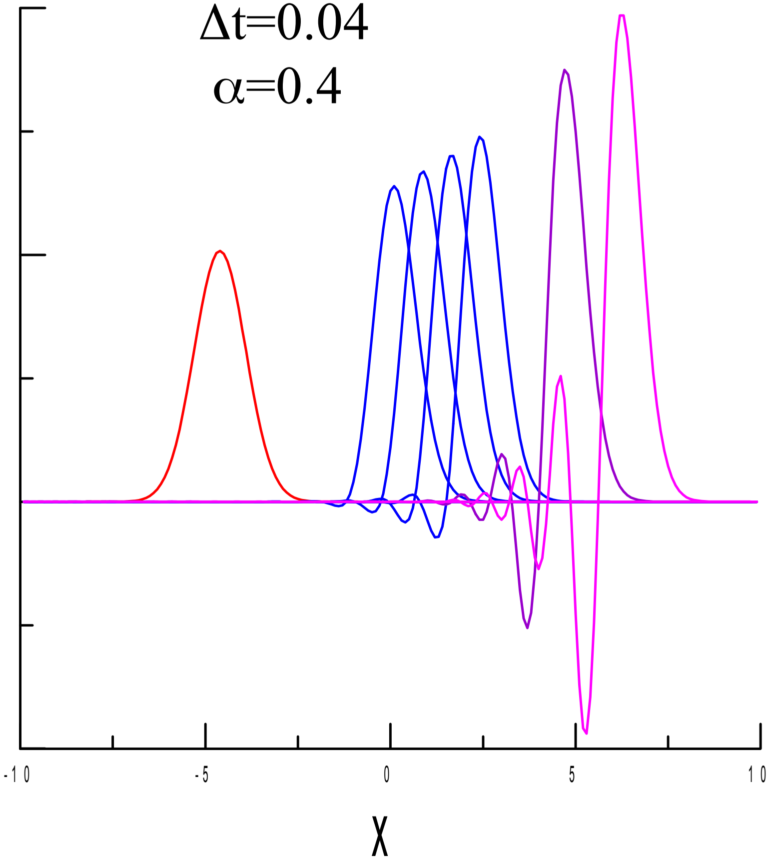
Δt=0.04
α=0.4

czas

rośnie

tu niedobrze

Euler z centralnym ilorazem przestrzennym

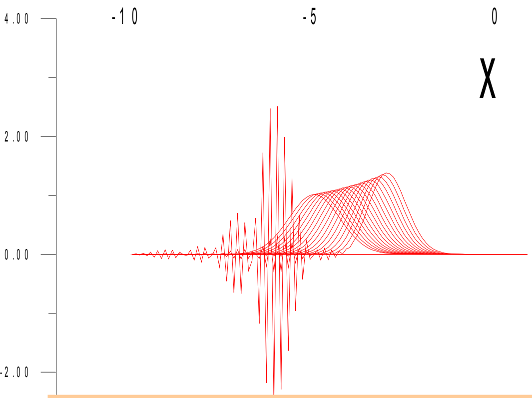


drastyczna zmiana kształtu pakietu nastąpiła, tylko później

ujemne wartości gęstości ☹

wcześniej zbadany upwind: zmienia kształt,
ale dyfuzyjnie (na ujemne wartości nie przechodzi,
i nie eksploduje)

tutaj badany dokładniejszy –
z centralnym ilorazem – fajerwerki i eksplozja



Uwaga: widzimy, że wyższe częstości są wzmacniane i że spóźniają się za pakietem: zrozumiemy to przy analizie dyfuzji w przestrzeni *k* oraz przy relacji dyspersji numerycznej

Symulacja dla odpowiednio wysokiego t: zawsze skończy się eksplozją
można zaryzykować twierdzenie, że schemat centralny nie jest bezwzględnie stabilny dla r.adw.

sprawdźmy czy faktycznie jest niestabilny bzwz dla dowolnego dt

analiza von Neumanna dla schematu z centralną pochodną przestrzenną

$$u(j,n+1) = -v\Delta t\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + u(j,n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$U_k^0(x) = \sum_k A_k^0 \exp(ikx)$$

$$U_k^0(x_j = j\Delta x) = \sum_k A_k^0 \exp(ijk\Delta x)$$

$\Delta x = 2\pi/J$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0,1,2,\ldots,J-1$$

$$w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

$\alpha = vdt/dx$

$$A_k^1 = A_k^0 - \frac{\alpha}{2}\left(\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)\right) A_k^0$$

$$M_k = 1 - \frac{\alpha}{2}\left(2i\sin(k\Delta x)\right)$$

$$|M_k|^2 = 1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \longrightarrow$$

widzimy, że mody *k* na ogół są wzmacniane.
wyobraźmy sobie gęstą siatkę (*dx* małe):
wzmacniane będą większe *k, co widzieliśmy w numerycznym eksperymencie*
metoda = niestabilna bezwzględnie i dlatego bezużyteczna w praktycznym zastosowaniu
ale:
okazuje się, że w sensie formalnym jest stabilna
[stabilność : definiowana jest dla skończonych czasów Δt n <T]

Ustaliliśmy, że do rozwiązywania równania adwekcji lepiej nadaje się mniej dokładny schemat upwind niż ten z ilorazem centralnym

upwind: $$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\, U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

centralny: $$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

warunek wystarczający dla stabilności wg.normy max:
wszystkie c dodatnie i sumują się do jedynki

w centralnym = sumują się do jedynki, ale nie są dodatnie

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

zastąpić średnią arytmetyczną sąsiadów

Ustaliliśmy, że do rozwiązywania równania adwekcji lepiej nadaje się mniej dokładny schemat upwind niż ten z ilorazem centralnym

upwind: $$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\, U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

centralny: $$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

warunek wystarczający dla stabilności wg.normy max:
wszystkie c dodatnie i sumują się do jedynki

w centralnym = sumują się do jedynki, ale nie są dodatnie

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

zastąpić średnią arytmetyczną sąsiadów

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

schemat Laxa-Friedrichsa

$$U_j^{n+1} = U_{j+1}^n \frac{1+\alpha}{2} + U_{j-1}^n \frac{1-\alpha}{2}$$

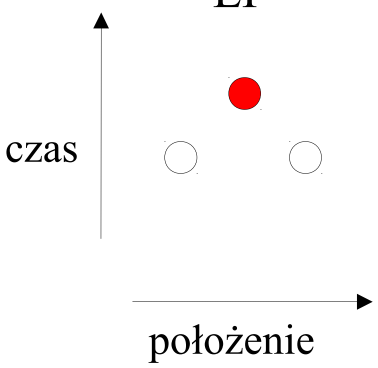
dla α (-1,1) spełnione WW stabilności bezwzględnej w sensie normy max czy manewr ze średnią arytmetyczną nie rozspójnia metody?

$$u(j,n+1) = -v\Delta t \frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + u(j,n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

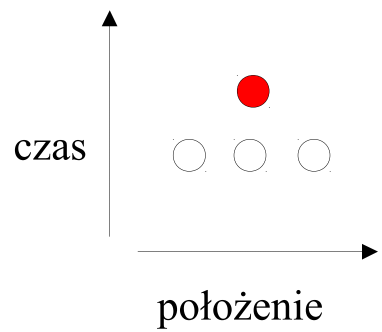
$$u(j,n) = \frac{1}{2}\left(u(j-1,n)+u(j+1,n)\right) + O(\Delta x)$$

metoda pozostanie spójna,
obniżymy rząd dokładności przestrzennej zyskamy stabilność bezwzględną

LF



zamiast



metoda Laxa-Friedrichsa : analiza von Neumanna

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

$\Delta x = 2\pi/J$

$$U_j^n = \sum_{k=0}^{J-1} A_k^n w_j^k \quad j = 0, 1, 2, \ldots, J-1$$

$$w_j = \exp(2\pi i j/J)$$

$$A_k^{n+1} = \left[\frac{\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x)}{2} - \frac{\alpha}{2}\left(\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)\right)\right] A_k^n$$

$$M_k = \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x)$$

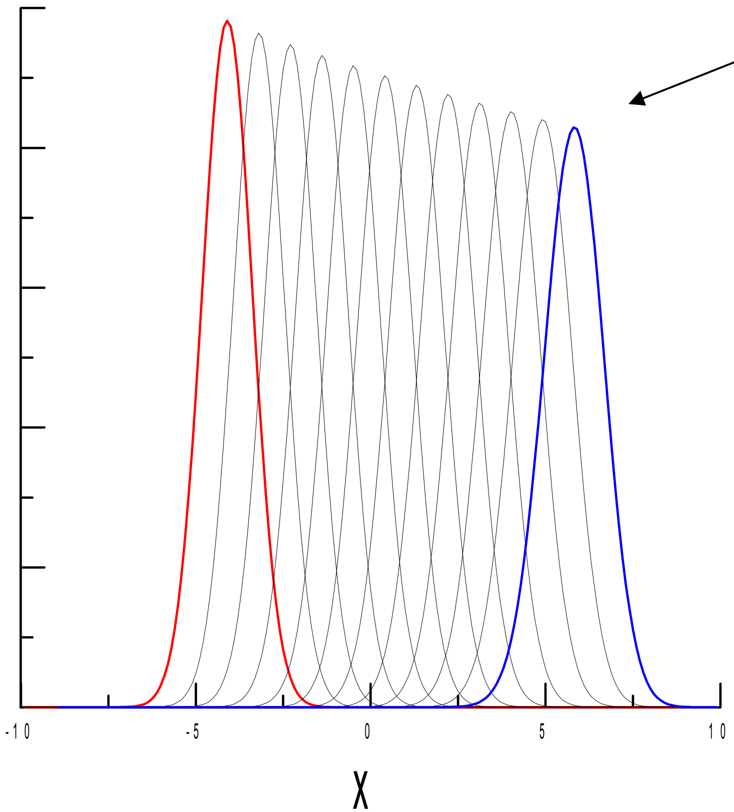
$$|M_k|^2 = \cos^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)$$

$|M_k|^2 \leq 1$ gdy $\alpha^2 \leq 1$

Kryterium CFL !
Uwaga: metoda LF jest bzwz. stabilna niezależnie od znaku *v* !

Metoda Laxa-Friedrichsa = zastosujmy

Δt=0.09

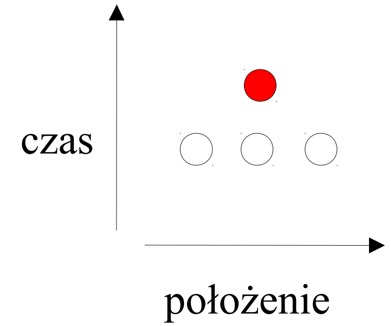


stabilna (uniknęliśmy eksplozji),
ale pakiet nie zachowuje się jak powinien.

niebieski z czerwonego rozpłynął się
(większa szerokość kosztem wysokości)
dyfuzja (dyssypacja) numeryczna.

schemat Laxa-Wendroffa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{(a)}$$



ma być jednokrokowy i z błędem lokalnym Δx^2, Δt^3

$$u(x_j, t+\Delta t) = u(x_j, t) + \Delta t\frac{\partial u}{\partial t}|_{x_j,t} + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{x_j,t} + O(\Delta t^3)$$

pochodne czasowe zastępujemy przestrzennymi zgodnie z równaniem (a)

$$u(x_j, t+\Delta t) = u(x_j, t) - v\Delta t\frac{\partial u}{\partial x}|_{x_j,t} + v^2\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x_j,t} + O(\Delta t^3)$$

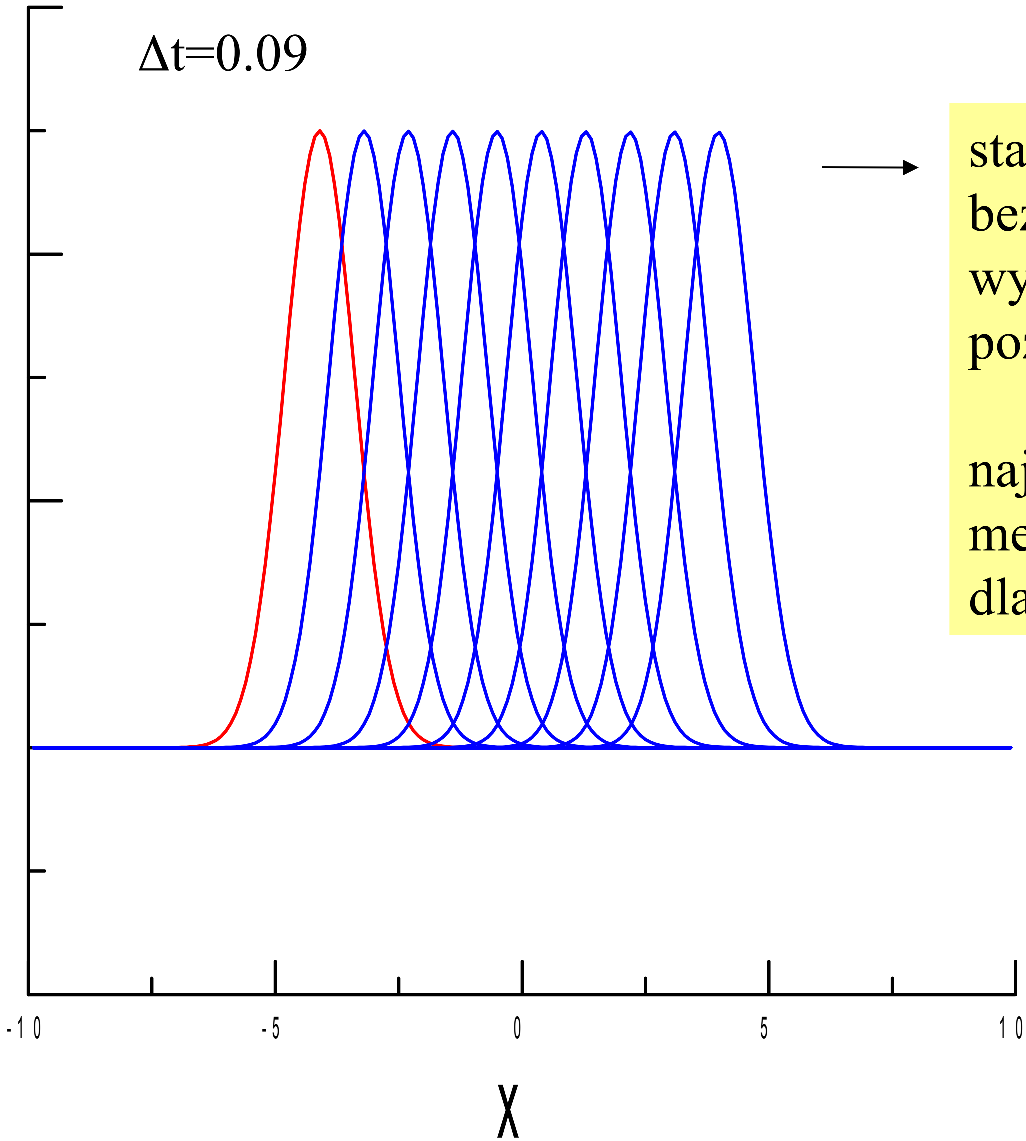
następnie pochodne przestrzenne wprowadzamy centralnymi ilorazami pochodnych:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n\right)$$

błąd p: $O(\Delta x^2)$

mamy: $O(\Delta x^2)$ i $O(\Delta t^3)$
zamiast $O(\Delta x)$ i $O(\Delta t^2)$ jak dla LF, lub upwind

Wynik:



stabilna
bez *widocznej* dyfuzji
wyższa dokładność niż wszystkie pozostałe

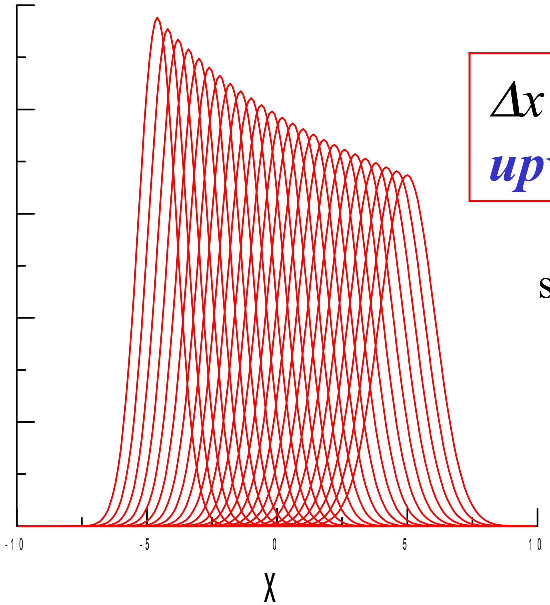
najlepsza z jawnych metod jednopoziomowych dla równania adwekcji

Dyfuzja numeryczna dla jawnych schematów jednopoziomowych

$$u_t + v u_x = 0$$

rozwiązanie

u=f(x-vt)



Δx=0.1, Δt=0.04

upwind α =0.4

stabilny bezwzględnie ale pakiet się rozpływa
- dyfuzja numeryczna

$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\,U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

---

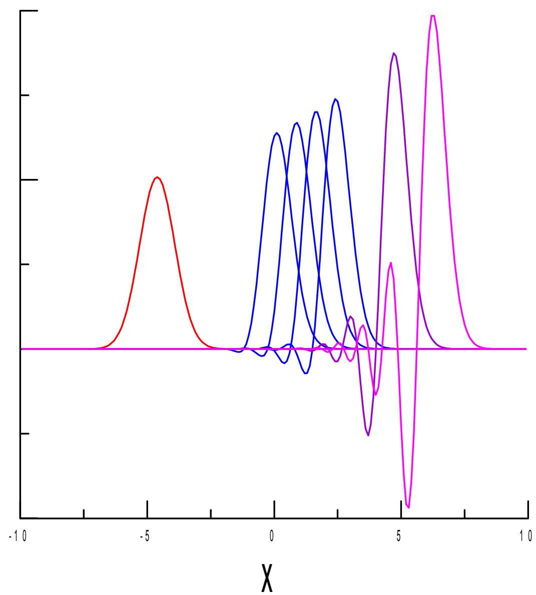
metoda z centralną pochodną przestrzenną

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

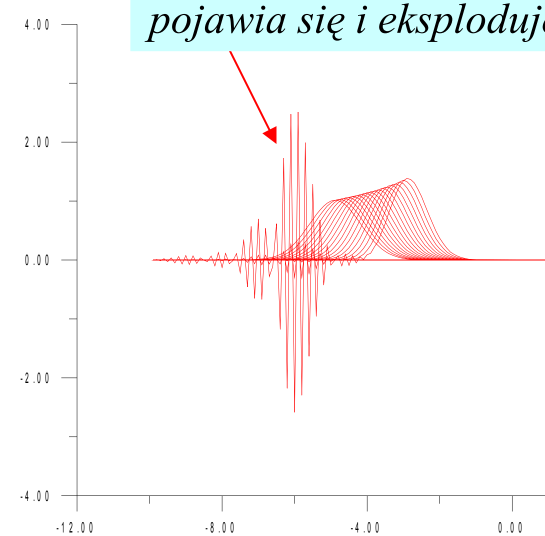
1) pakiet się lokalizuje (przeciwnie do dyfuzji)
2) za pakietem wyrasta szybka oscylacja
3) ... która jest natychmiast wzmacniana i eksploduje

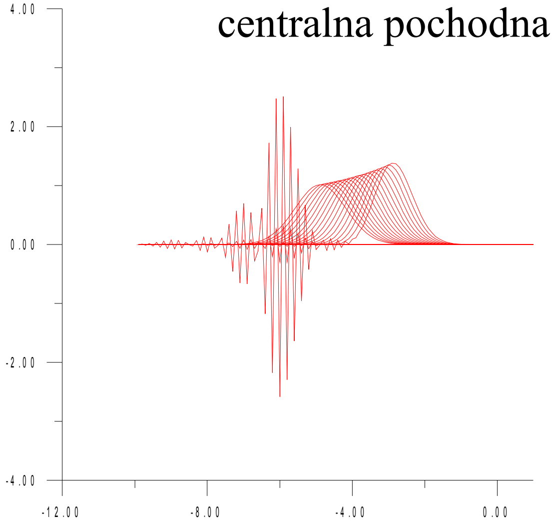
Δt=0.04

α=0.4



oscylacja:cos(*k*x)g(x), z bardzo wysokim *k* *(faktycznie: <u>maksymalnym k</u>) pojawia się i eksploduje*



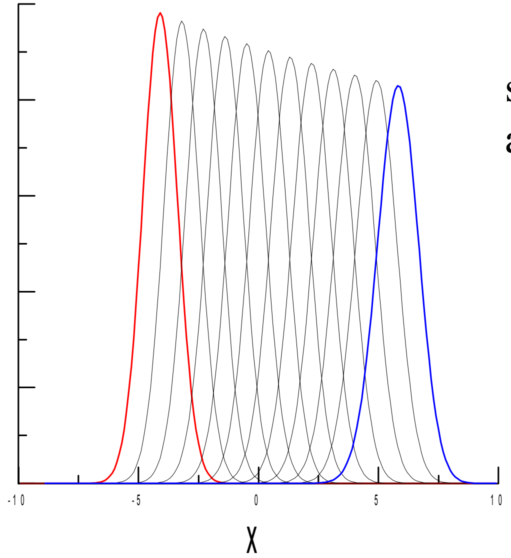


centralna pochodna przestrzenna

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

modyfikacja Laxa-Friedrichsa

$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$



stabilność,
ale z numeryczną dyfuzją w bonusie

Dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych jednopoziomowych

równanie adwekcji

$$u_t + v u_x = 0 \longrightarrow \quad \begin{aligned} u(x,0) &= \exp(2\pi i k x) \\ u(x,t) &= \exp(2\pi i k (x - vt)) \end{aligned}$$

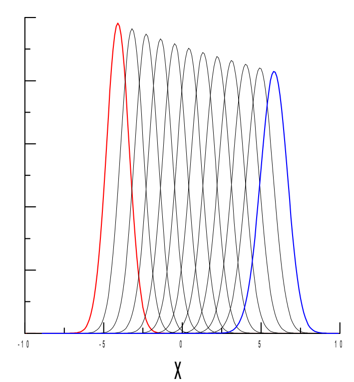
wszystkie poznane schematy można uznać za przybliżenie różnicowe
również **równania adwekcji-dyfuzji:**

$$u_t + v u_x = \sigma u_{xx}$$

dyfuzja

$$u(x,0) = \exp(2\pi i k x)$$

$$u(x,t) = \exp(-4\pi^2 \sigma k^2 t) \exp(2\pi i k (x - vt))$$



interpretacja:
impuls zanika: tym szybciej im wyższy wektor falowy *k*
(tym szybciej im większa zmienność przestrzenna fali)

Dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych *upwind*

$$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\,U_j^n + \alpha U_{j-1}^n \longleftarrow u_t + v u_x = 0$$

$$u_t + v u_x = \sigma u_{xx}$$

centralne przestrzenne ilorazy różnicowe:
a czasowy przedni

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n\right) - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

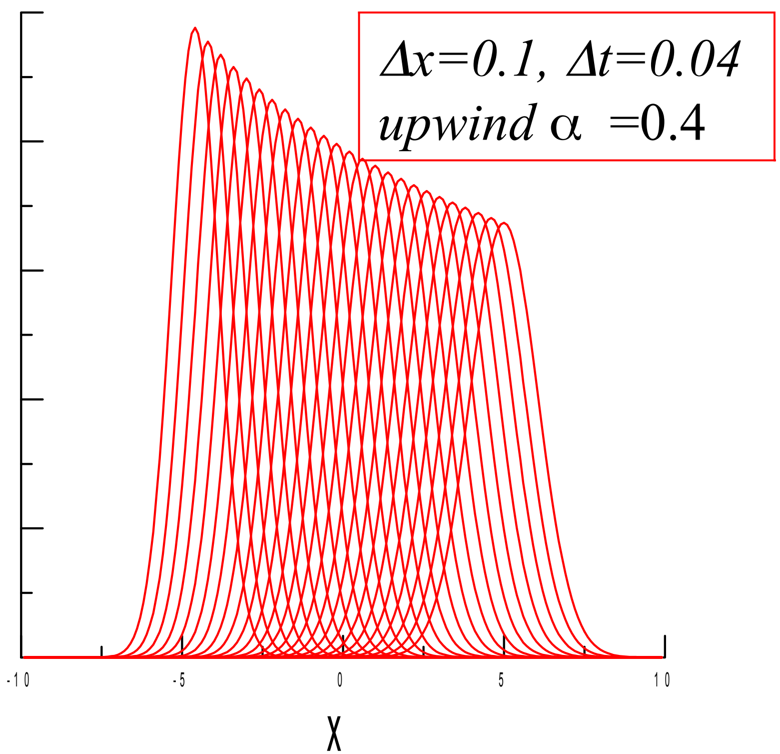
chcemy zrobić z tego przepisu schemat *upwind:* zlikwidujmy punkt *j+1*

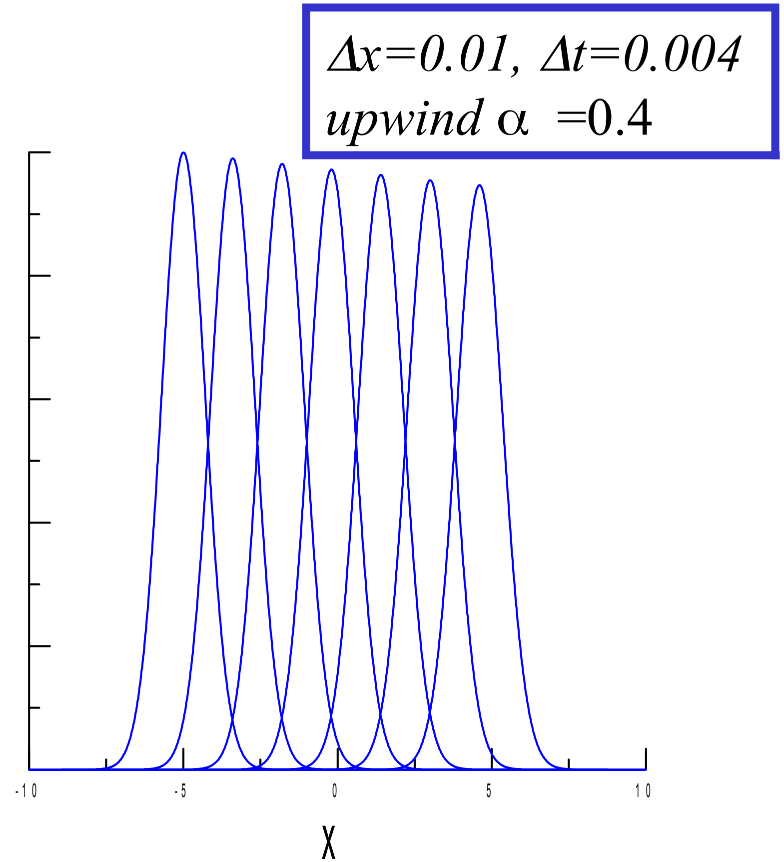
$$\frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2} = \frac{v\Delta t}{2\Delta x} \quad = \alpha/2$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\alpha}{2}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n\right) - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

$\sigma = \Delta x\, v / 2$ współczynnik dyfuzji numerycznej = upwind

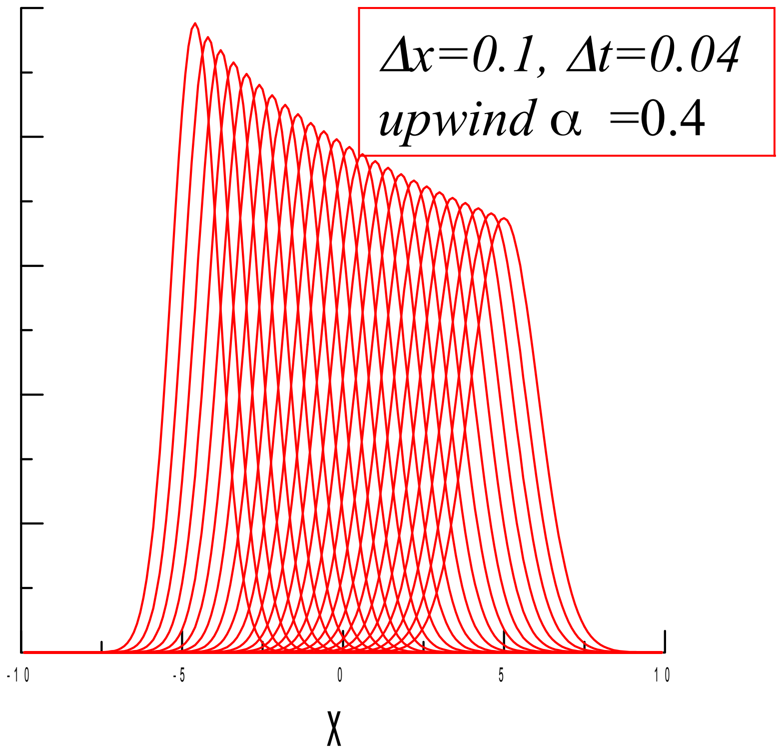
wniosek 1: *upwind* jest spójny z równaniem adwekcji-dyfuzji ze współczynnikiem dyfuzji $\sigma = \Delta x\, v / 2$
wniosek 2: dla *upwind* numeryczna dyfuzja jest mniej widoczna dla gęstszej siatki przestrzennej
wniosek 3: dla *upwind* krok czasowy nie zmienia dyfuzji numerycznej

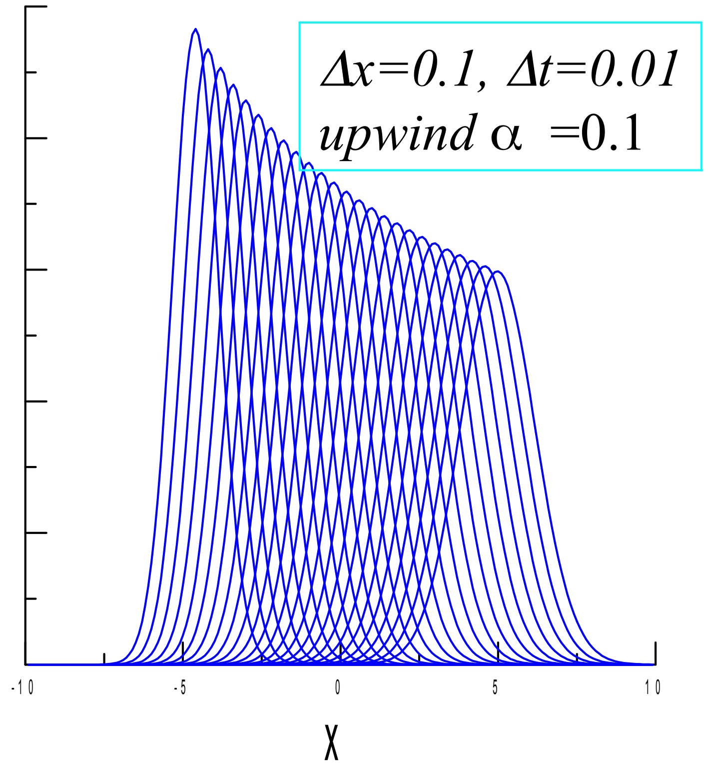




$\sigma = \Delta x\ v / 2$

dla *upwind*
wniosek 2: numeryczna dyfuzja jest mniej widoczna dla gęstszej siatki przestrzennej





$\sigma = \Delta x \, v / 2$

wniosek 3: dla *upwind* krok czasowy nie zmienia dyfuzji numerycznej

Dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych: *upwind*

upwind: $$U_j^{n+1} = (1-\alpha)\,U_j^n + \alpha U_{j-1}^n$$

spójny z dwoma równaniami;

adwekcji

$$u_t + vu_x = 0$$

adwekcji - dyfuzji

$\sigma = v\Delta x/2$

$$u_t + vu_x = \sigma u_{xx}$$

$$u(x,t) = \exp(-4\pi^2\sigma k^2 t)\exp(2\pi i k(x - vt))$$

1) czynnik dyfuzyjny: gasi wyższe składowe (*k*) generowane przez centralny iloraz pochodnej
2) dyfuzja jest sztuczna bo współczynnik σ zależy od parametrów schematu numerycznego
3) rozwiązanie będzie dobrym przybliżeniem adwekcji, jeśli σ małe

metoda jest zbieżna – gdy obydwa kroki (czasowy i przestrzenny) schodzą do zera – znika dyfuzja numeryczna

zaniedbywalność dyfuzji numerycznej:

$\sigma = \Delta x\, v \ll 2$: wtedy gdy $\Delta x \ll 2/v$ (mały krok przestrzenny)

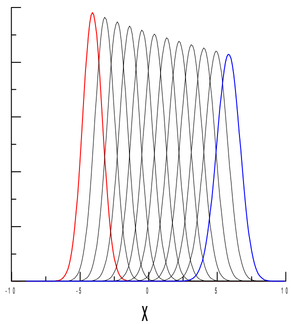
dodatkowo; kryterium zbieżności CFL: $v\Delta t \leq \Delta x$ (czasowy ma być jeszcze mniejszy)

Dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych – LF

$$u_t + vu_x = 0$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

centralny, niestabilny, ratowany uśrednieniem pierwszego wyrazu po sąsiadach



$$U_j^{n+1} = \frac{U_{j+1}^n + U_{j-1}^n}{2} - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

LF

$$u_t + vu_x = \sigma u_{xx}$$

centralne ilorazy różnicowe:

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\sigma \Delta t}{\Delta x^2}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n\right) - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

LF odpowiada powyższemu schematowi jeśli $\sigma\Delta t/\Delta x^2 = 1/2$

Innymi słowy LF spójna z równaniem adwekcji-dyfuzji dla $\sigma = \Delta x^2/2\Delta t$

mała dyfuzja numeryczna;

$\sigma = \Delta x^2/2\Delta t << 1$ $\longrightarrow$ $\Delta t >> \Delta x^2/2$

ale kryterium CFL: $v\Delta t/\Delta x \leq 1$ $\longrightarrow$ $\Delta t \leq \Delta x / v$ (warunek zbieżności - stabilności)

warunki są przeciwstawne (ale nie sprzeczne), raczej trudne do spełnienia

dyfuzja numeryczna dla schematów jawnych – Lax-Wendroff $\alpha=v\Delta t/\Delta x$

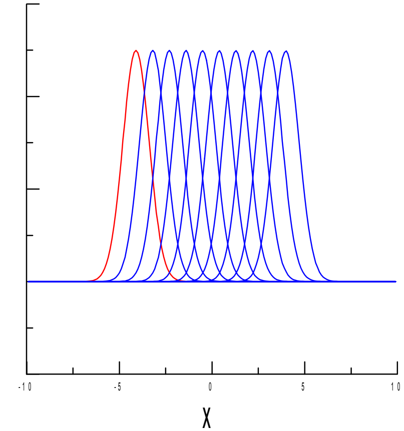
schemat LW: błąd $O(\Delta x^2)$, $O(\Delta t^3)$ [dla por. upwind/LF –$O(\Delta x)$, $O(\Delta t^2)$]

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n\right)$$

równanie AD

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \frac{\sigma\Delta t}{\Delta x^2}\left(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n - 2U_j^n\right) - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

dla LW: spójny z równaniem dyfuzji adwekcji dla $\alpha^2/2=\sigma\Delta t/\Delta x^2$



$\sigma=v^2\Delta t/2$
$\sigma<<1$

$\Delta t<< 2/ v^2$ oraz $\Delta t \leq \Delta x / v$

CFL – dają się pogodzić
dla LW w przeciwieństwie do poprzednich metod zachowanie kształtu <u>nie</u> wymaga drobnego Δx

Podsumowanie dyfuzji numerycznej:
ogólna postać jawnego schematu jednopoziomowego

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\beta}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n),$$

Wszystkie bezwzględnie stabilne jednokrokowe schematy różnicowe dla równania adwekcji zawierają element numerycznej dyfuzji. (centralny nie zawiera i jest bzwz niestabilny)

w tym sensie: dyfuzja numeryczna wprowadza bezwzględną stabilność:
zapobiega wzmacnianiu składowych o wysokich częstościach przestrzennych

Schemat jest dobry jeśli możemy zminimalizować jej wpływ bez utraty stabilności.
na pewno potrafimy dla *upwind i LW.*

zobaczymy, że dla jawnego schematu dwupoziomowego możliwa jest stabilność
bez dyfuzji (*leapfrog*)

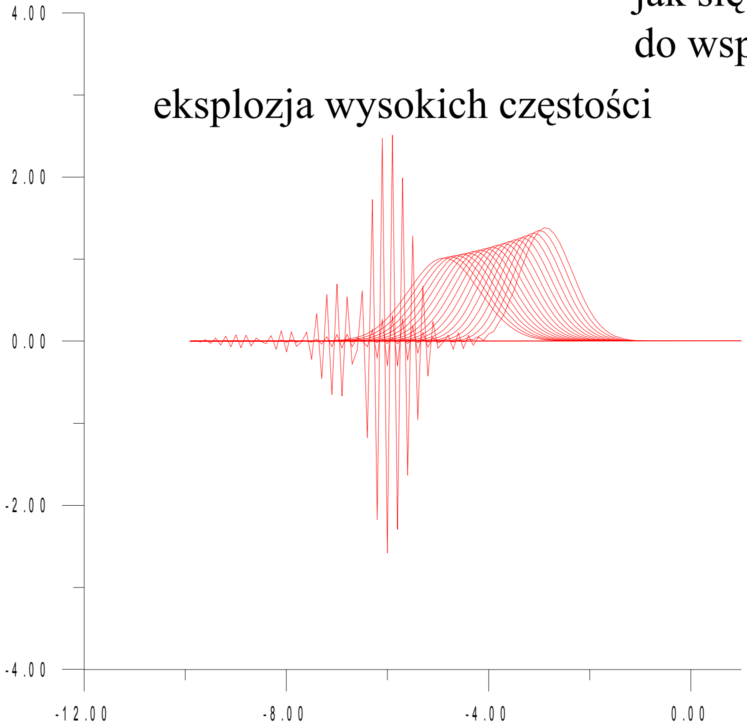
współczynnik wzmocnienia w **przestrzeni wektora falowego:**

współczynnik wzmocnienia w **przestrzeni wektora falowego:**

$$u_t + vu_x = 0$$

jak się ma częstość oscylacji przestrzennych do współczynnika wzmocnienia

eksplozja wysokich częstości



współczynnik wzmocnienia w **przestrzeni wektora falowego:**

$$u_t + vu_x = 0$$

schemat ogólny z czynnikiem dyfuzyjnym:

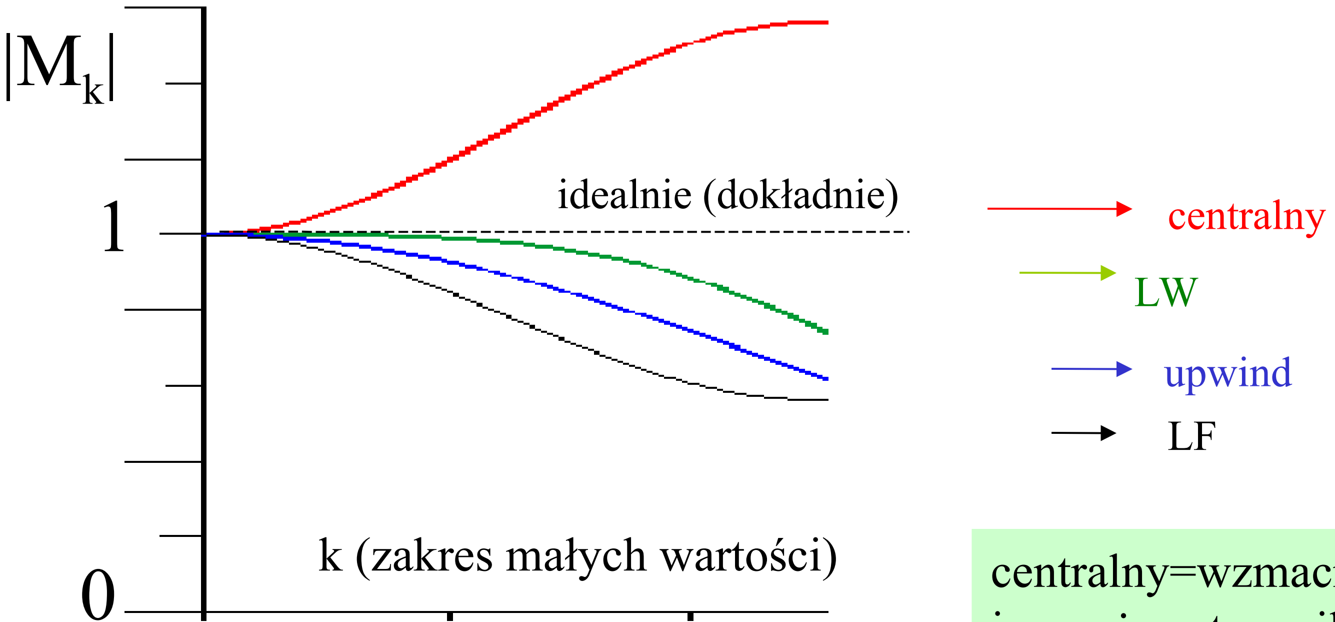
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\beta}{2}(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n),$$

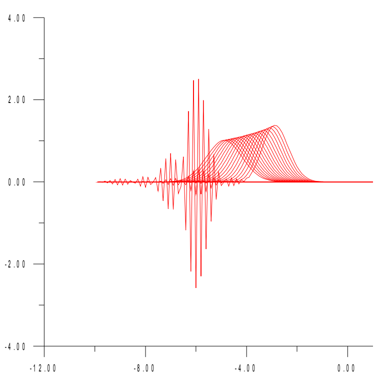
analiza vN: $$U_j^n = \sum_{k=} A_k^n w_j^k$$ $w_j = exp(i\, x_j) = exp(i\, j\Delta x)$

$$A_k^{n+1} = \left(1 - \alpha i \sin(k\Delta x) + \beta\left(\cos(k\Delta x) - 1\right)\right) A_k^n$$

zachowanie kształtu: wymaga współczynnika wzmocnienia o module 1
dla każdego k

$$A_k^{n+1} = \underbrace{\left(1 - \alpha i \sin(k\Delta x) + \beta\left(\cos(k\Delta x) - 1\right)\right)}_{M_k} A_k^n$$





centralny=wzmacnia wszystkie mody
im wyższy tym silniej
(stąd bzwz niestabilność)

pozostałe = gaszą wyższe częstości
rozpływa się pakiet

dyspersja numeryczna:

$$u_t + v u_x = 0$$

$$u(x,0) = \exp(2\pi i k x)$$

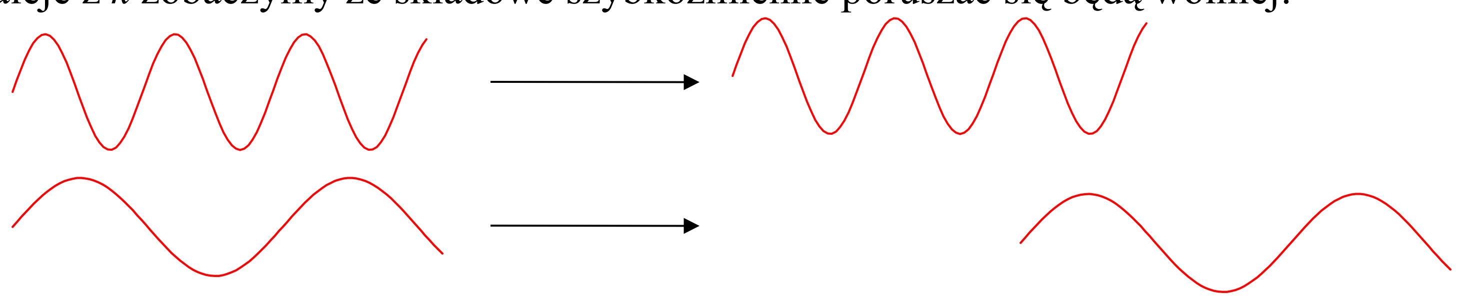
$$u(x,t) = \exp(2\pi i k(x - vt))$$

prędkość fazowa

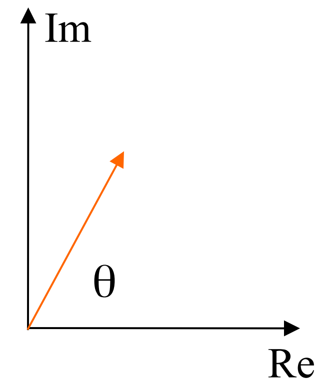
dla rozwiązania dokładnego prędkość fazowa *v* jest niezależna od *k*
v(k) = relacja dyspersji
równanie adwekcji nie zawiera dyspersji (podobnie jak liniowe równanie falowe)
dlatego kształt zachowany. Ale schematy różnicowe odznaczają się numeryczną dyspersją:

---

gdy *v* maleje z *k* zobaczymy że składowe szybkozmienne poruszać się będą wolniej:



dyspersja numeryczna a schematy różnicowe dla równania adwekcji:



$$A_k^{n+1} = \left(1 - \alpha i \sin(k\Delta x) + \beta \left(\cos(k\Delta x) - 1\right)\right) A_k^n$$

$$M_k = |M_k| \exp(i\theta_k)$$

$$\theta_k = \arctan\left(-\frac{\alpha \sin(k\Delta x)}{1 + \beta(\cos(k\Delta x) - 1)}\right)$$

$$U_j^0 = \exp(2\pi i \Delta x k j)$$

$$u(x,t) = \exp(2\pi i k(x - vt))$$

$$U_j^n = |M_k|^n \exp(+in\theta_k) \exp(2\pi i \Delta x k j)$$

$$U_j^n = |M_k|^n \exp(2\pi i(\Delta x k j - n\theta_k / 2\pi))$$

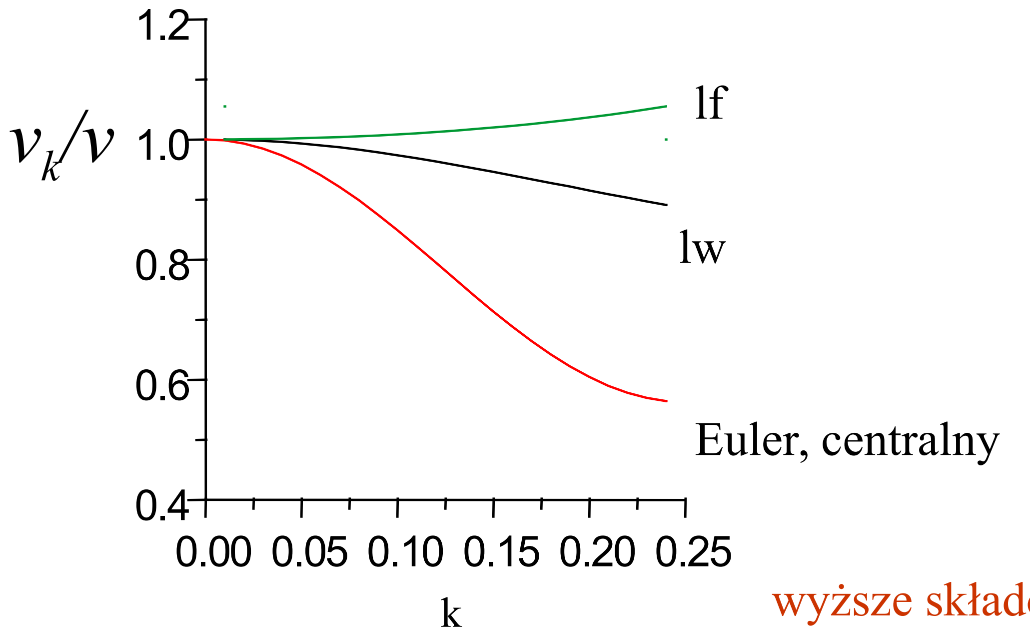
numeryczna prędkość fazowa: wysupłać z $t=n\Delta t$ $\longrightarrow$ $$v_k = \frac{-\theta_k}{2\pi k \Delta t}$$

relacja dyspersji numerycznej dla schematów różnicowych

$$\theta_k = \arctan\left(-\frac{\alpha \sin(k\Delta x)}{1+\beta(\cos(k\Delta x)-1)}\right)$$

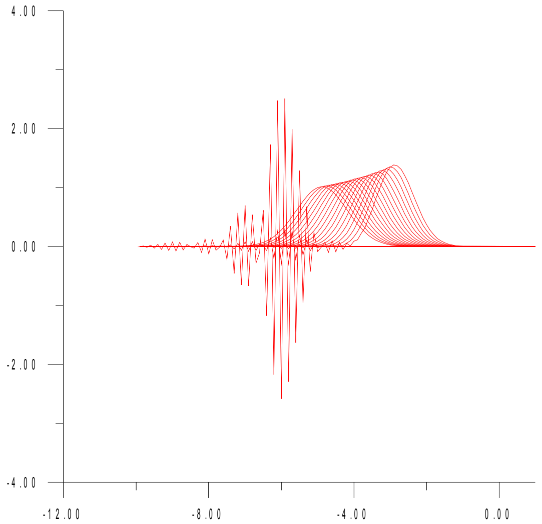
$$v_k = \frac{-\theta_k}{2\pi k \Delta t}$$

rozwinięcie Taylora *arctan(x)=x+...*
podobnie sinus: *1/k* ulegnie skasowaniu



różnicowa forma równania wprowadza dyspersję do rozwiązania

wyższe składowe spóźniają się



schemat przedni Eulera dla
równania adwekcji:

1) składowe przestrzenne o wyższych częstościach są najszybciej wzmacniane (odwrotność dyfuzji)

2) i spóźniają się za pakietem

metoda żabiego skoku *(leapfrog)*: najprostszy schemat **dwupoziomowy:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$$

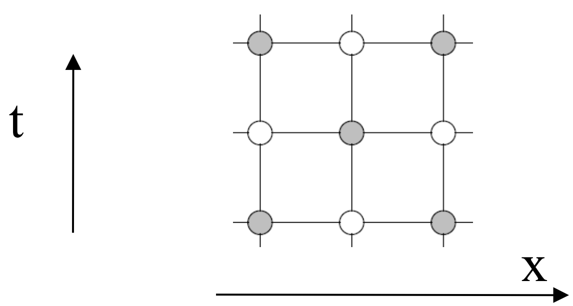
centralne ilorazy na obydwie strony
dotychczas, używaliśmy przedni czasowy

$$\frac{u(j,n+1)-u(j,n-1)}{2\Delta t} = -v\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$U_j^{n+1} = -\alpha\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + U_j^{n-1}$$

$O(\Delta t^3, \Delta x^2)$

błąd lokalny jak LW

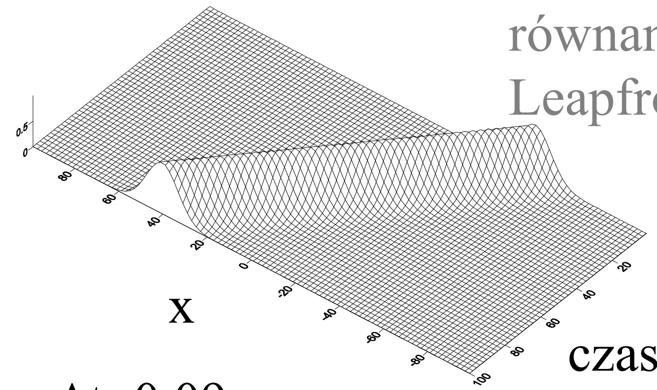


uwaga: nie jest *samostartujący*
warunek początkowy to zbyt mało
konieczne użycie innego schematu na początku symulacji

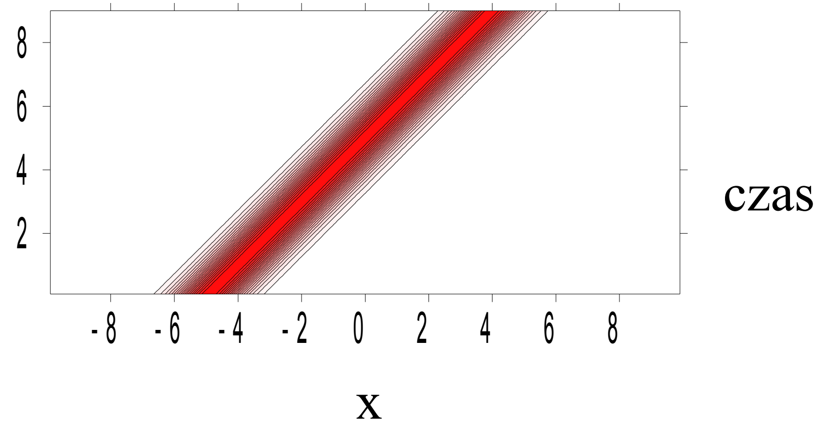
równanie adwekcji
Leapfrog

Weźmy Δx=0.1

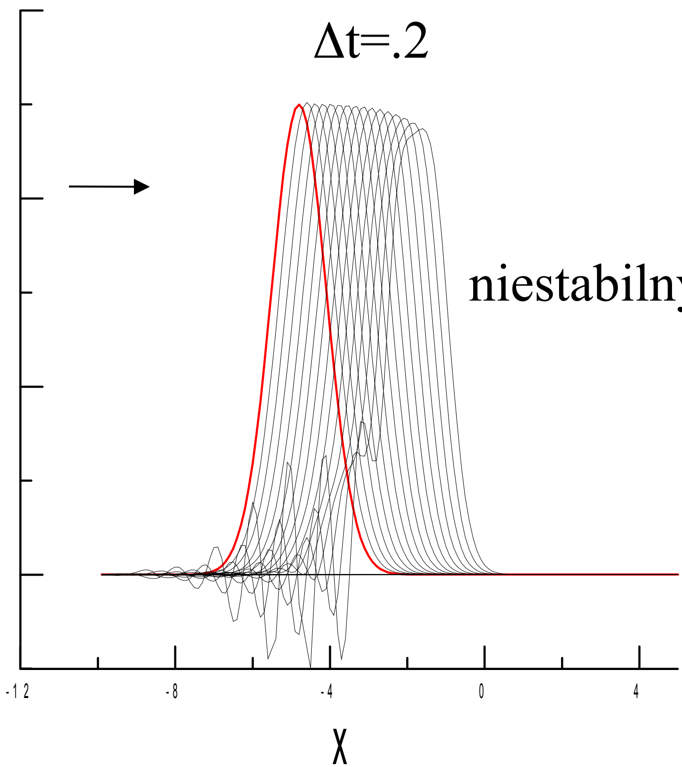
Kryterium CFL:
numeryczna DOD, musi obejmować DOD fizyczną $\Delta t<\Delta x$ (v=1)



Δt=0.09

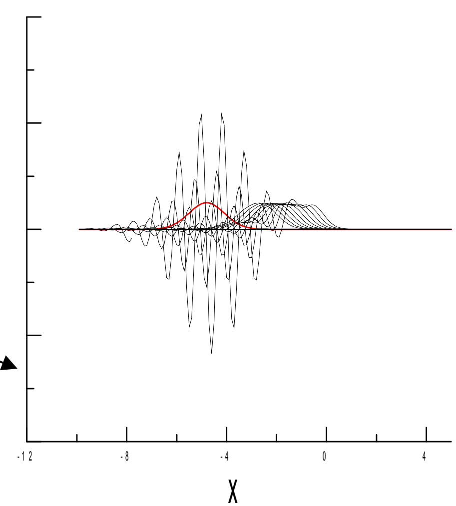


Δt=.2



niestabilny

kończy się eksplozją



tw Laxa: WKW zbieżności spójnego schematu jest jego stabilność

Analiza von Neumanna dla schematu dwupoziomowego na przykładzie *leapfrog*

$$U_j^{n+1} = -\alpha\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + U_j^{n-1}$$

$$U_j^n = \sum_{k=0} A_k^n w_j^k$$

$w_j = exp(i\,x_j) = exp(i\,j\Delta x)$

$$A_k^{n+1} = -\alpha\left(A_k^n \exp(ik\Delta x) - A_k^n \exp(-ik\Delta x)\right) + A_k^{n-1}$$

$$A_k^{n+1} = -2\alpha i A_k^n \sin(k\Delta x) + A_k^{n-1}$$

trudność: dla jednopoziomowych podobna analiza dawała nam współczynnik wzmocnienia modu *k*

teraz: zaproponujemy podobne rozwiązanie w formie: $A_k^{n+1} = M_k^{n+1} A_k^0$

równanie kwadratowe na współczynnik wzmocnienia:

$$M_k^2 + 2\alpha i \sin(k\Delta x) M_k - 1 = 0 \longrightarrow M_k(\pm) = -i\alpha\sin() \pm \sqrt{1-\alpha^2\sin^2()}$$

$$M_k(\pm) = -i\alpha \sin() \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2()}$$

ogólne rozwiązanie równania różnicowego- kombinacja liniowa:

$$A_k^{n+1} = \left(c_k(+)M_k(+) + c_k(-)M_k(-)\right) A_k^n$$

zależą od warunku początkowego

aby mod *k* nie rósł z iteracji na iterację potrzeba aby : $|M_k(\pm)| \leq 1$

w naszym przypadku: bierzemy $\alpha \leq 1$ (bo CFL), a więc pierwiastek rzeczywisty *i*

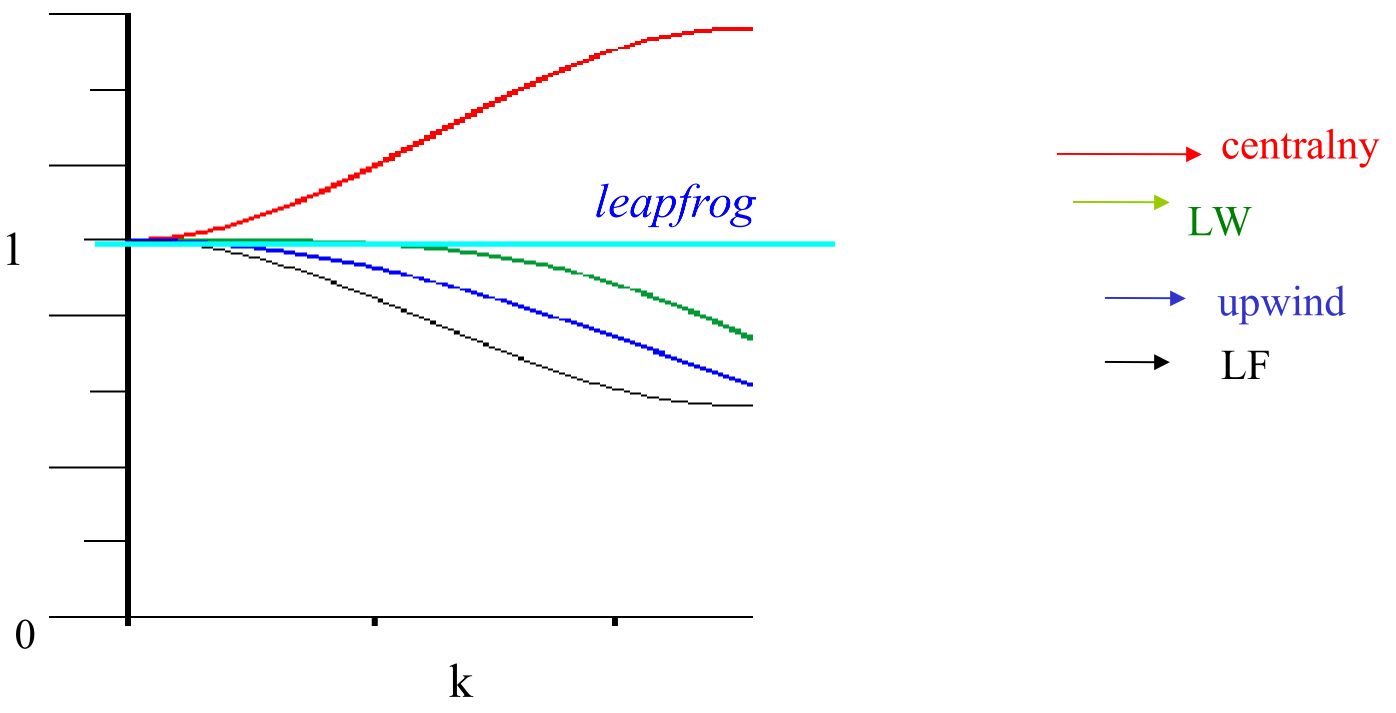
$$M_k(\pm) = -i\alpha \sin() \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2()}$$

$$|M_k(\pm)| = 1 - \alpha^2 \sin^2 + \alpha^2 \sin^2 = 1$$

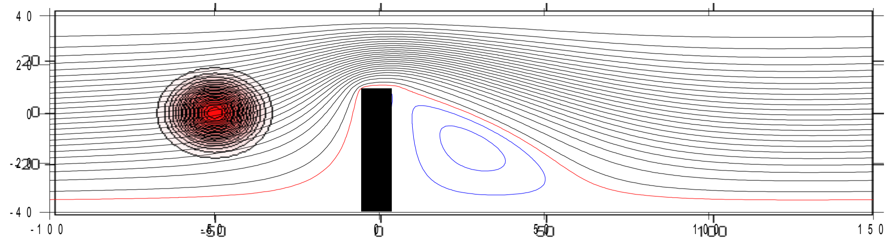
niezależnie od α wszystkie mody zachowują swoje amplitudy : sytuacja idealna.
zachowany każdy kształt (jeśli tylko $\alpha \leq 1$)

$$|M_k(\pm)| = 1 - \alpha^2 \sin^2 + \alpha^2 \sin^2 = 1$$

niezależnie od α wszystkie mody zachowują swoje amplitudy : sytuacja idealna.
zachowany każdy kształt (stabilność bez dyfuzji, nieosiągalna dla 1 poziomowych)



przykład:
2D pole prędkości cieczy nieściśliwej:



$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla u) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V^x(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + V^y(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

musimy policzyć *Vx/Vy* na starcie

ogólnie nabla stoi przed u**V,**
ale dla nieściśliwej dywergencja z **V**=0
dla 1D: dostajemy stałą prędkość
dla 2D, prędkość nie jest stałą (jak widać na rysunku)

Leapfrog 1D: $$U_j^{n+1} = -\alpha\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) + U_j^{n-1}$$

leapfrog 2D: centralne pochodne czasowe i obydwie przestrzenne:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n-1} - \Delta t\left(V_{ij}^x \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta \mathrm{x}} + V_{ij}^y \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta \mathrm{x}}\right)$$

warunek początkowy:

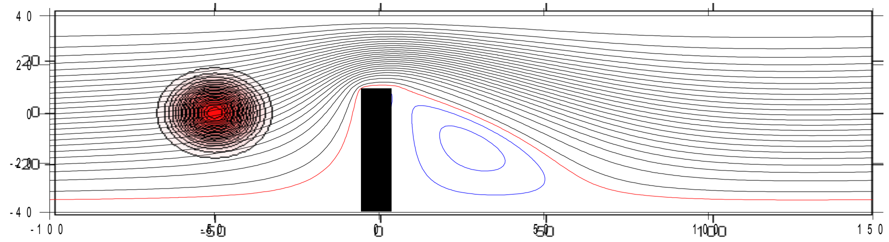
$$u(x,y,t=0) = \exp(-25((x+0.6)^2 + y^2)).$$

druga chwila czasowa:

$$u_{ij}^2 = u(x_i - V_{ij}^x \Delta t, y_j - V_{ij}^y \Delta t, t=0)$$

przybliżenie dla drugiej chwili czasowej : słuszne gdy **V** prawie stałe w plamie, lub dt małe.
w sytuacji ogólnej:
pierwszy krok metodą jednopoziomową.

Laboratorium:
2D pole prędkości cieczy nieściśliwej:



$$V_m = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$ (maksymalne)

$$\Delta t = dx/4V_m$$ (policzymy z krokiem 4 razy mniejszym od CFL)

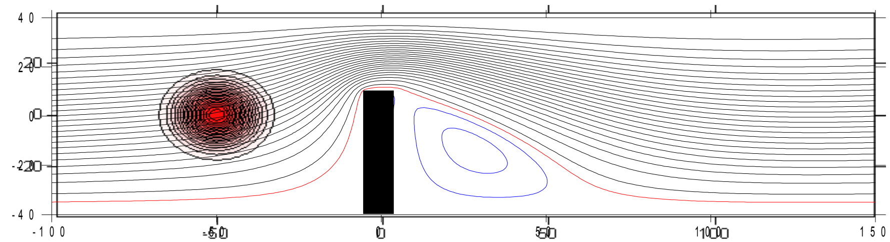
leapfrog:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{n-1} - \Delta t \left(V_{ij}^x \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + V_{ij}^y \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta x} \right)$$

na przeszkodzie: obydwie składowe prędkości zerowe więc stałe *u (=0)*
w symulacjach nie widać przeszkody

LF – centralne przestrzenne, przedni czasowy + ratunek z uśrednieniem

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n}{4} - \Delta t \left(V_{ij}^x \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + V_{ij}^y \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{\Delta x} \right).$$



wszystkie schematy dotychczas - jawne (działające jak podstawienie)
ich stabilność ogranicza kryterium CFL: $\alpha \leq 1$:

$$vdt \leq dx \rightarrow dt \leq dx / v$$

o kroku czasowym decyduje maksymalna prędkość niech no tylko będzie w jednym punkcie bardzo wielka:
mamy kłopot, musimy bardzo drobne dt użyć.

Schematy niejawne: aby wyjść poza ograniczenie CFL

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$$

wsteczny Euler (prawa strona liczona w przyszłości)

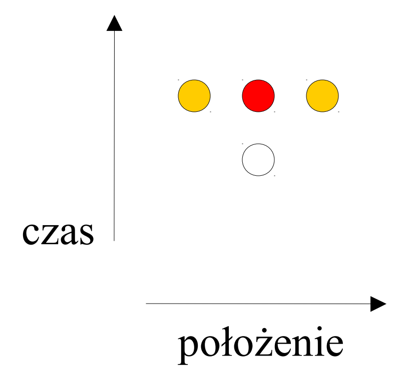
przedni Euler (przednia strona liczona w teraźniejszości, lub wsteczny czasowy zamiast przedniego) bezwzględnie niestabilny był

$$\frac{u(j,n+1)-u(j,n)}{\Delta t} = -v\frac{u(j+1,n+1)-u(j-1,n+1)}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} = -v\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$-\frac{\alpha}{2}u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1} + \frac{\alpha}{2}u_{j-1}^{n+1} = u_j^n + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$-\frac{\alpha}{2}U_{j+1}^{n+1} + U_j^{n+1} + \frac{\alpha}{2}U_{j-1}^{n+1} = U_j^n$$



jest to układ równań na chwilę czasową *n+1* (dla wszystkich *j*) wsteczny Euler, układ równań do rozwiązania

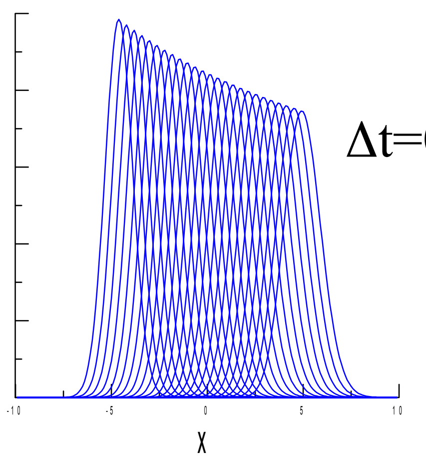
$$-\frac{\alpha}{2}U_{j+1}^{n+1} + U_j^{n+1} + \frac{\alpha}{2}U_{j-1}^{n+1} = U_j^n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \end{pmatrix}$$

---

prościej przeiterować podstawienie

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right)$$

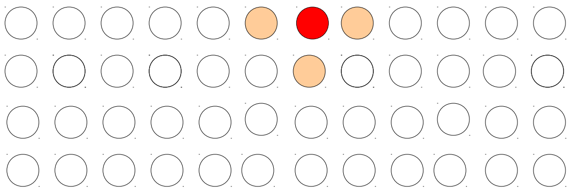


Δt=0.04

iteracyjne rozwiązanie układu RL
(odpowiednik iteracyjnej metody Gaussa)

numeryczna przeszłość (domena zależności) dla schematu niejawnego?

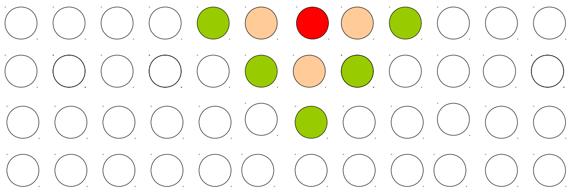
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right)$$



numeryczna przeszłość?

numeryczna przeszłość (domena zależności) dla schematu niejawnego?

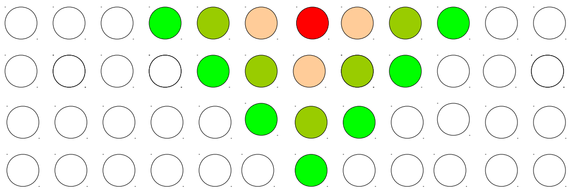
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right)$$



numeryczna przeszłość?

numeryczna przeszłość (domena zależności) dla schematu niejawnego?

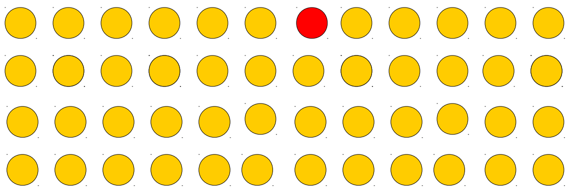
$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right)$$



numeryczna przeszłość?

numeryczna przeszłość (domena zależności) dla schematu niejawnego?

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right)$$



numeryczna przeszłość:
cała połowa „czasoprzestrzeni”
dla chwil wcześniejszych,
a nawet cała teraźniejszość

dla schematów niejawnych
kryterium CFL zawsze spełnione!

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha/2 & 1 & \alpha/2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ U_3^{n+1} \\ U_4^{n+1} \\ U_5^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ U_3^n \\ U_4^n \\ U_5^n \end{pmatrix}$$

jeśli zmienimy dowolny wyraz na prawej stronie:
zmienimy <u>cały</u> wektor rozwiązań (każdą z jego składowych)

ograniczenie na krok czasowy *Δt* w zbieżnych metodach jawnych
pochodziło od CFL. Jakie będzie dla wstecznego Eulera ?

wsteczny Euler: analiza von Neumanna

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right)$$

$$U_j^n = \sum_k A_k^n \exp(ikj\Delta x)$$

$$A_k^{n+1} = M_k A_k^n$$

$$M_k - 1 = -M_k \frac{\alpha}{2}\left(\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)\right)$$

$$M_k - 1 = -M_k \alpha i \sin(k\Delta x)$$

$$M_k = \frac{1}{1 + \alpha i \sin(k\Delta x)}$$

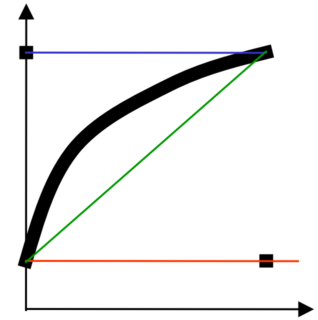
$$|M_k|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x)}$$

nie większe od 1 dla dowolnego α

czyli metoda bzwz stabilna dla dowolnego Δt !

dla wstecznego Eulera: stabilność nie narzuca wymagania na krok czasowy!
jako, że metoda mało dokładna i tak trzeba aby był mały,
ale są lepsze metody niejawne

Crank-Nicolson (odpowiednik wzoru trapezów dla rrz)



$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

Euler:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta f(t, y(t)) + O(\Delta t^2)$$

w. Euler:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \Delta f(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) + O(\Delta t^2)$$

w.trapezów:

$$y(t + \Delta t) = y(t) + \frac{\Delta t}{2}\left[f(t + \Delta t, y(t + \Delta t)) + f(t, y(t))\right] + O(\Delta t^3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$$

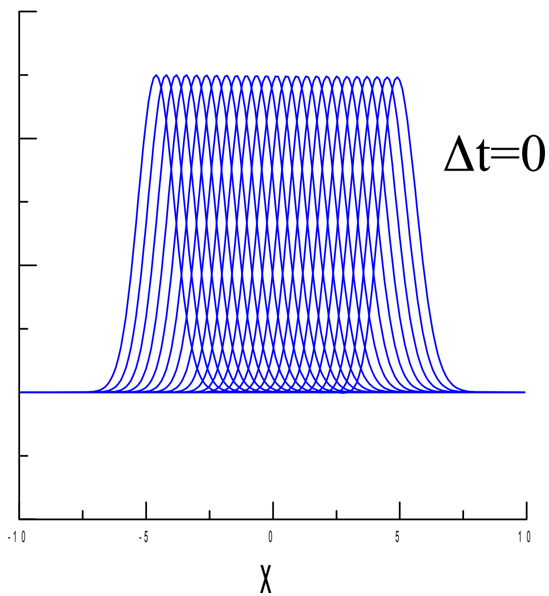
Euler: $$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

lokalnie: $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$

wsteczny Euler: $$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{2}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right)$$

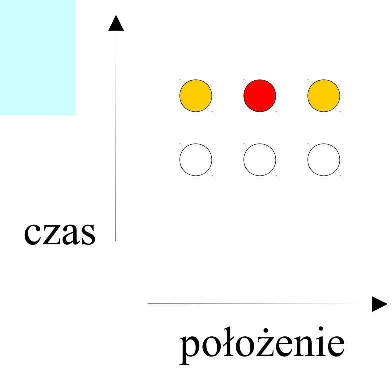
CN $$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{4}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right) - \frac{\alpha}{4}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right)$$

lokalnie: $O(\Delta t^3, \Delta x^2)$



$\Delta t = 0.04$

można rozwiązać UR iteracyjnie (równie łatwe jak dla wst.E)



schemat CN, analiza stabilności:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\alpha}{4}\left(U_{j+1}^{n+1} - U_{j-1}^{n+1}\right) - \frac{\alpha}{4}\left(U_{j+1}^{n} - U_{j-1}^{n}\right)$$

$$M_k = 1 - iM_k\frac{\alpha}{2}\sin(k\Delta x) - i\frac{\alpha}{2}\sin(k\Delta x)$$

$$M_k = \frac{1 - \alpha i \sin(k\Delta x)/2}{1 + \alpha i \sin(k\Delta x)/2}$$

$|M_\kappa|$ =1 dla dowolnego kroku czasowego!

dla leapfrog $|M_\kappa| =$ *1* tylko dla $\alpha \leq 1$

CN świetną metodą jest: wysokiej dokładności, stabilna bezwzględnie dla dowolnego kroku czasowego, współczynnik wzmocnienia 1 dla dowolnego *k,* bardzo prosta i stosowalna do wszystkich równań z pierwszą pochodną czasową