

Równania różniczkowe: poza metodę różnic skończonych - rozwiązania w bazie funkcyjnej

Plan:


metoda kolokacji

metoda najmniejszych kwadratów

metoda Galerkina

formalizm reszt ważonych

metoda wariacyjna Reyleigha-Ritza



do metody elementów
skończonych

Przykład: $\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \left| \quad \begin{array}{l} u(-1)=0 \\ u(1)=0 \end{array} \right.$

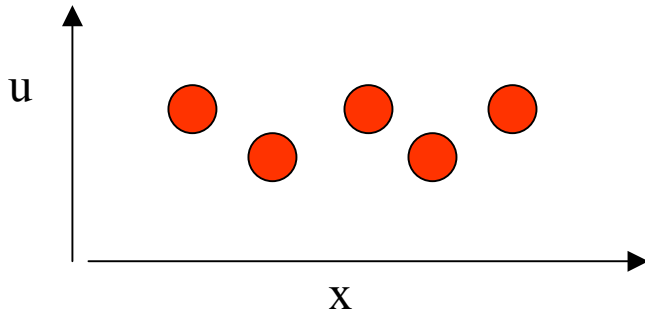
analityczne: $u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x)$.

metoda różnic skończonych:

$$\frac{d^2u}{dx^2} \simeq \frac{u(x+dx) + u(x-dx) - 2u(x)}{dx^2}$$



układ równań algebraicznych na $u(x_n)$

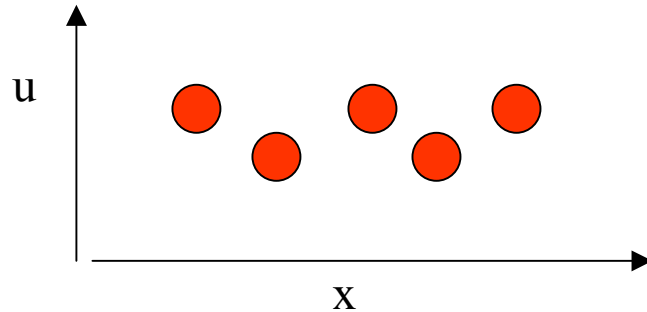


znajdujemy wartości $u(x)$ w wybranych punktach

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \left| \quad \frac{d^2 u}{dx^2} \simeq \frac{u(x+dx) + u(x-dx) - 2u(x)}{dx^2}$$

metoda różnic skończonych

układ równań algebraicznych na $u(x_n)$



znajdujemy wartości $u(x)$ w wybranych punktach

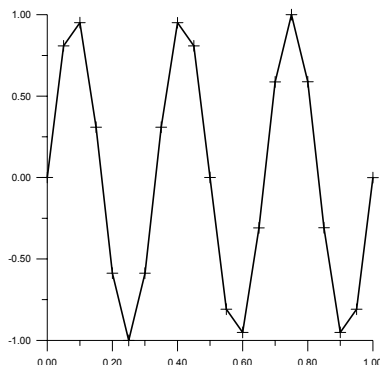
Główna (jedyna) zaleta MRS: prosta dyskretyzacja równań.

Wady: niełatwe lokalne zagęszczanie siatki (drobne, lecz ważne) szczegóły

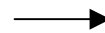
: niełatwy opis objętości o konturze odbiegającym od prostokątnego

: duże zużycie pamięci (istotne ograniczenie dokładności w trzech (i więcej) wymiarach)

wyobraźmy sobie, że rozwiązanie jest szybkozmiennie
powiedzmy, że bliskie $\sin(6\pi x)$



$\sin(6\pi x)$ opisany
na 20 punktach
dokładność ☹️

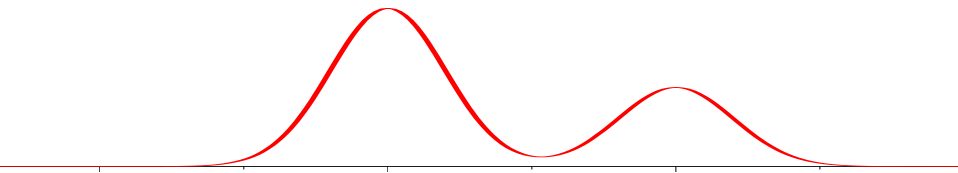


użyć bazy funkcyjnej i
 $\sin(6\pi x)$ włączyć do bazy funkcyjnej
w której poszukujemy rozwiązania...

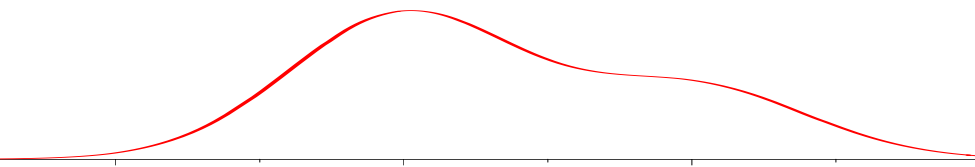
motywacja do pracy z bazą funkcyjną cd.



wyobraźmy sobie, że mamy siatkę złożoną z dwóch punktów w metodzie różnic skończonych znamy tylko wartości rozwiązania w węzłach ...



baza złożona z dwóch funkcji gaussowskich opisuje rozwiązanie również między węzłami siatki



... a parametrami bazy (funkcji gaussowskich) można dodatkowo manipulować
... znacznie więcej informacji zawartej w bazie
... wyniki rachunku zbiegają do dokładnych szybciej w funkcji liczby elementów bazowych niż w funkcji oczek siatki (szczególnie >1D)

wyobraźmy sobie, że jako funkcji bazowych użyjemy funkcji $\sin(nx)$

- rozwiązanie w takiej bazie da nam automatycznie dyskretną transformację Fouriera rozwiązania

podobnie – informacje użyteczne uzyskamy, jeśli funkcje bazowe mają określoną interpretację

Przykład cd.: $\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$ | $u(-1)=0$
 $u(1)=0$

poszukujemy rozwiązania w bazie funkcyjnej

!
 $u(x) \simeq v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$ | funkcje bazowe [trafny wybór: dobre przybliżenie przy minimalnym N]

wybór bazy: zawęża przestrzeń poszukiwań
optymalnego rozwiązania do wektorowej przestrzeni liniowej,
którą baza rozpina

optymalne rozwiązanie znaczy optymalne współczynniki c_i

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$u(-1)=0$$

$$u(1)=0$$

poszukujemy rozwiązania w bazie analitycznie zadanych funkcji

!

$$u(x) \simeq v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

funkcje bazowe [trafny wybór: dobre przybliżenie przy minimalnym N]

wybór bazy: zawęża przestrzeń poszukiwań optymalnego rozwiązania

optymalne rozwiązanie znaczy optymalne współczynniki c_i

błąd rozwiązania przybliżonego $v(x)$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$u(-1)=0$$

$$u(1)=0$$

poszukujemy rozwiązania w bazie analitycznie zadanych funkcji

!

$$u(x) \simeq v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

funkcje bazowe [trafny wybór: dobre przybliżenie przy minimalnym N]

wybór bazy: zawęża przestrzeń poszukiwań optymalnego rozwiązania

optymalne rozwiązanie znaczy optymalne współczynniki c_i

błąd rozwiązania przybliżonego $v(x)$:

$$E(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} + \sin(\pi x)$$

błąd, reszta, residuum

jeśli $u=v$, $E=0$

→ tak dobieramy c_i aby E był „mały”

Wybór kryterium małości generuje wiele metod.

Na laboratorium ćwiczymy 3 :

kolokacji, najmniejszych kwadratów, Galerkina

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \left| \quad \begin{array}{l} u(-1)=0 \\ u(1)=0 \end{array} \right.$$

poszukujemy rozwiązania w bazie analitycznie zadanych funkcji

!

$$u(x) \simeq v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

funkcje bazowe [trafny wybór: dobre przybliżenie przy minimalnym N]

wybór bazy: zawęża przestrzeń poszukiwań optymalnego rozwiązania

optymalne rozwiązanie znaczy optymalne współczynniki c_i

błąd rozwiązania przybliżonego $v(x)$:

$$E(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} + \sin(\pi x)$$

jeśli $u=v$, $E=0$

tak dobieramy c_i aby E był „mały”

Wybór kryterium generuje wiele metod.

Na laboratorium ćwiczymy 3 metody:

kolokacji, najmniejszych kwadratów, Galerkina

dłaczego nie wprowadzić metod w oparciu o bardziej naturalny wybór $E = u - v$?
 ... bo u w praktycznych zastosowaniach jest *nieznane*
 problem minimalizacji $\|u-v\|$ gdy u znane, to problem aproksymacji

wyberzmy bazę $f_i(x) = (x+1)(x-1)x^{i-1}$

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

Każda z funkcji bazowych spełnia warunki brzegowe.

niech w bazie będą $N=3$ funkcje [$i=1,2,3$]

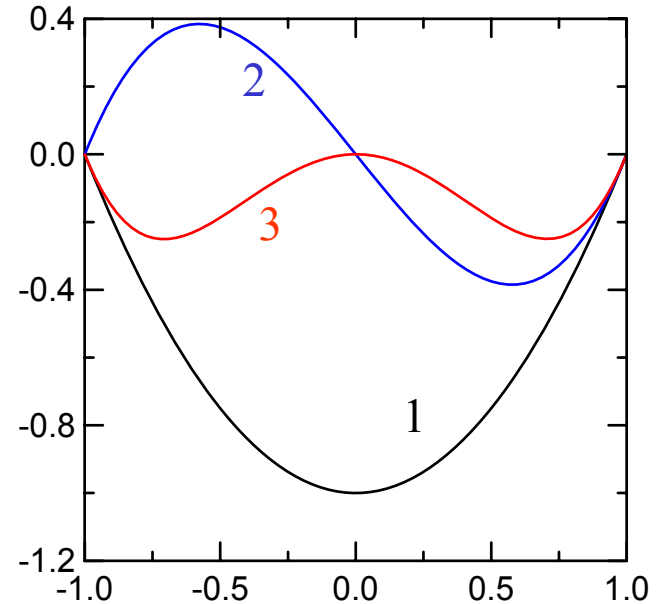
$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

(nawet jeśli rozwiązanie analityczne nie istnieje –
Znamy E w formie analitycznej jeśli tylko niejednorodność
równania dana jest wzorem)

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$u(-1)=0$$

$$u(1)=0$$



wyberzmy bazę $f_i(x) = (x+1)(x-1)x^{i-1}$

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

Każda z funkcji bazowych spełnia warunki brzegowe.

niech w bazie będą $N=3$ funkcje $[i=1,2,3]$

$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

(nawet jeśli rozwiązanie analityczne nie istnieje –
Znamy E w formie analitycznej jeśli tylko niejednorodność
równania dana jest wzorem)

metoda kolokacji: niech błąd E znika w N punktach
przestrzeni (niech funkcja v spełnia dokładnie
równanie różniczkowe w N wybranych punktach)

N punktów x_i

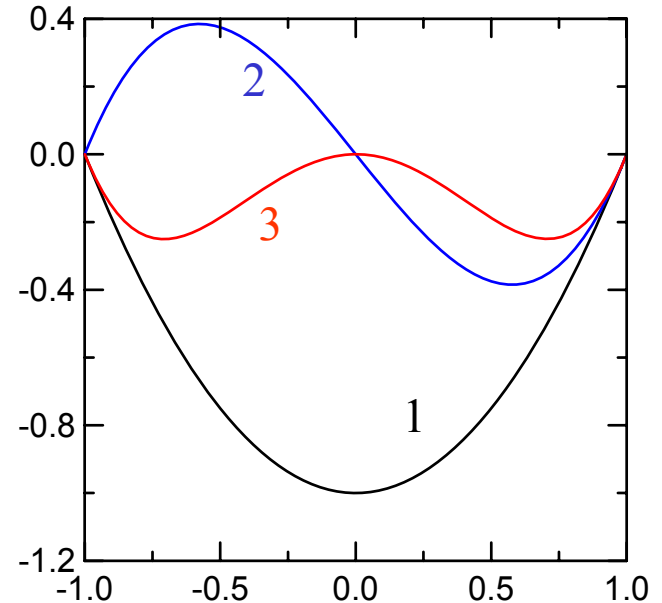
wektor c dany przez warunek $E(x_i)=0$

$E(x_j)=0$ – układ N równań na N niewiadomych

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$u(-1)=0$$

$$u(1)=0$$



$E(x_j)=0$ – układ N równań na N niewiadomych

metoda kolokacji

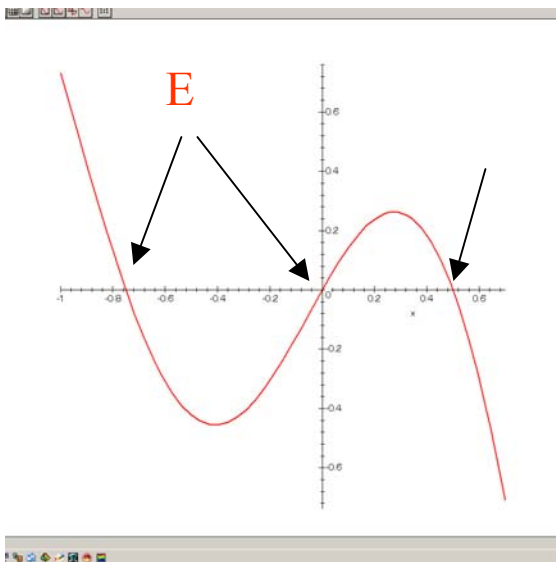
$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

$$x_1=0 : 2c_1 - 2c_3 = 0$$

$$x_2=1/2 : 2c_1 + 3c_2 + c_3 + 1 = 0$$

$$x_3=-3/4 : 2c_1 - 4.5c_2 + 4.75c_3 - \sqrt{2}/2 = 0$$

$$c_1 = -\frac{2}{15} + \frac{2}{45}\sqrt{2} \quad c_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{45}\sqrt{2} \quad c_3 = -\frac{2}{15} + \frac{2}{45}\sqrt{2}$$



$E(x_j)=0$ – układ N równań na N niewiadomych

metoda kolokacji

$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

$$x_1=0 : 2c_1 - 2c_3 = 0$$

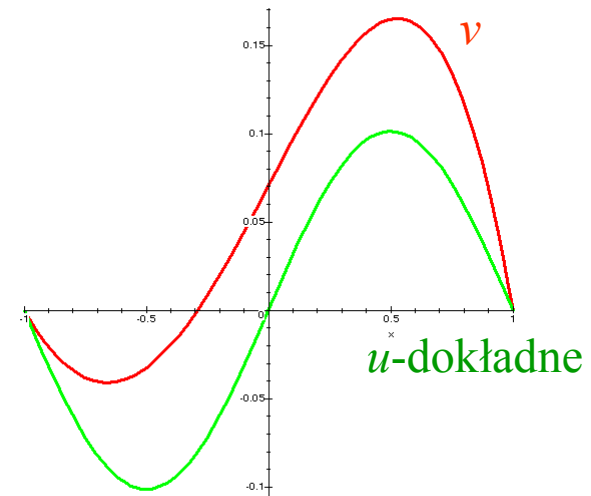
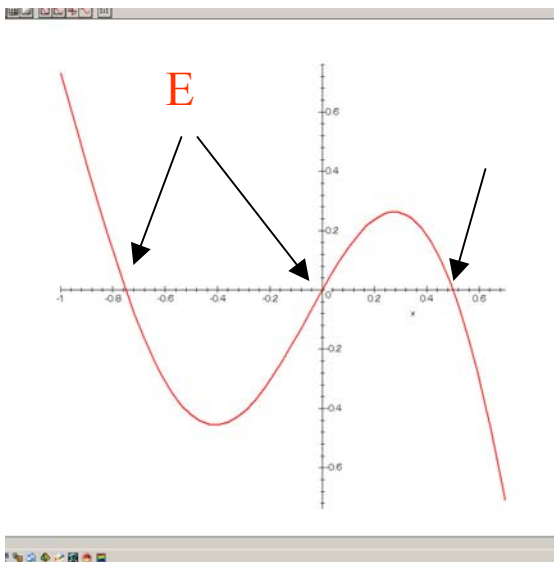
$$x_2=1/2 : 2c_1 + 3c_2 + c_3 + 1 = 0$$

$$x_3=-3/4 : 2c_1 - 4.5c_2 + 4.75c_3 - \sqrt{2}/2 = 0$$

$$c_1 = -\frac{2}{15} + \frac{2}{45}\sqrt{2}$$

$$c_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{45}\sqrt{2}$$

$$c_3 = -\frac{2}{15} + \frac{2}{45}\sqrt{2}$$



$E(x_j)=0$ – układ N równań na N niewiadomych

metoda kolokacji

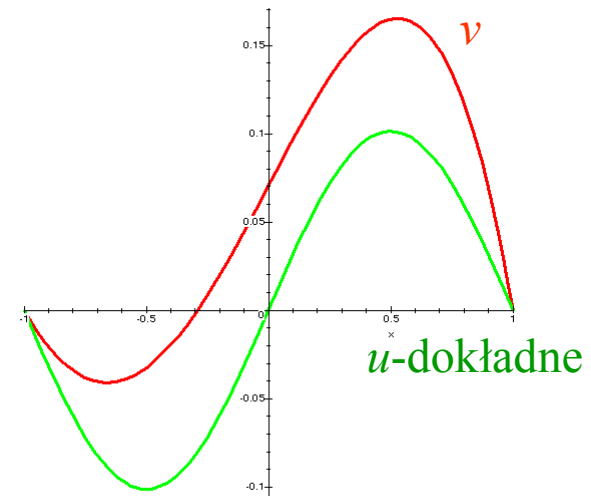
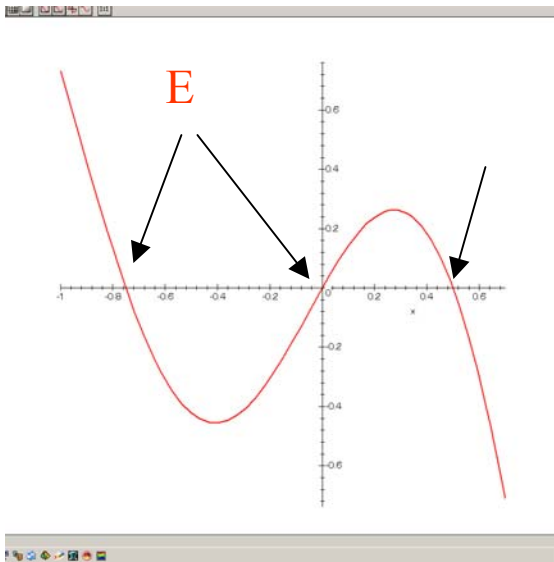
$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

$$x_1=0 : 2c_1 - 2c_3 = 0$$

$$x_2=1/2 : 2c_1 + 3c_2 + c_3 + 1 = 0$$

$$x_3=-3/4 : 2c_1 - 4.5c_2 + 4.75c_3 - \sqrt{2}/2 = 0$$

$$c_1 = -\frac{2}{15} + \frac{2}{45}\sqrt{2} \quad c_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{45}\sqrt{2} \quad c_3 = -\frac{2}{15} + \frac{2}{45}\sqrt{2}$$



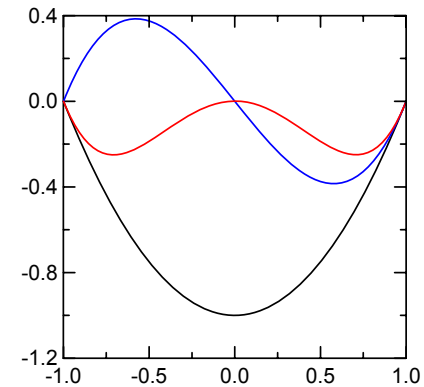
Uwaga: $E(x_d)=0$ NIE znaczy $v(x_d)=u(x_d)$ bo błąd to nie jest odchylenie od wartości dokładnej. W naszym równaniu $E(x_d)=0$ znaczy: $v''(x_d)=u''(x_d)$

$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

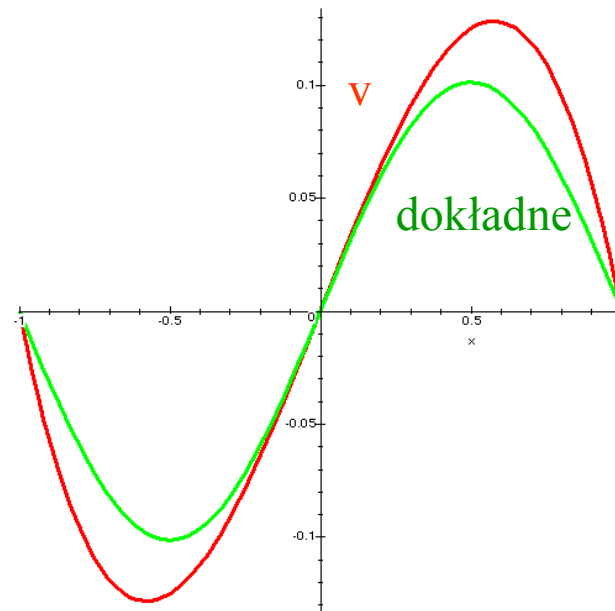
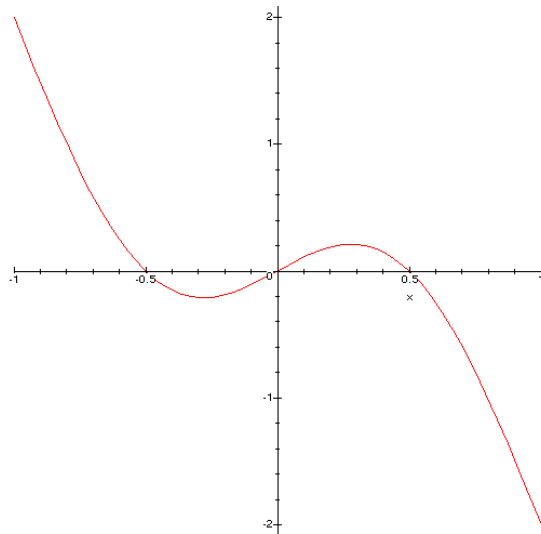
metoda kolokacji

Jakość rozwiązania :
zależy od wyboru punktów kolokacji

$$\begin{aligned} x_1=0 & : 2c_1 - 2c_3 = 0 \\ x_2=1/2 & : 2c_1 + 3c_2 + c_3 + 1 = 0 \\ x_3=-1/2 & : 2c_1 - 3c_2 + c_3 - 1 = 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} c_1 &= c_3 = 0 \\ c_2 &= -1/3 \end{aligned}$$



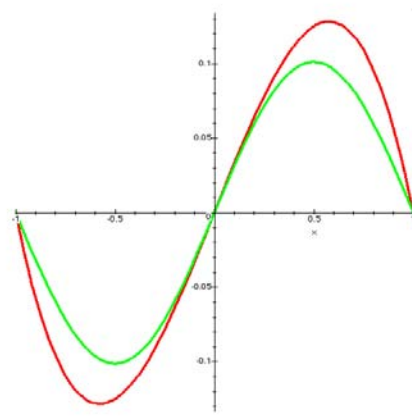
[symetria odrzuca parzyste elementy bazowe]



lepiej niż poprzednio, mimo że
tylko jedna funkcja bazowa pracuje

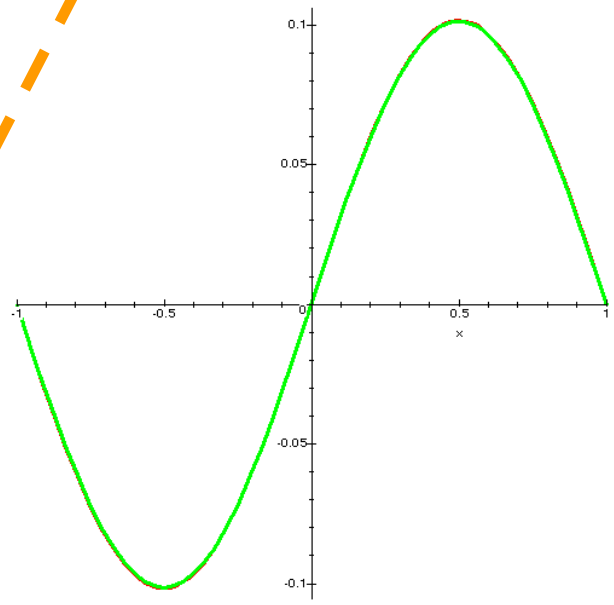
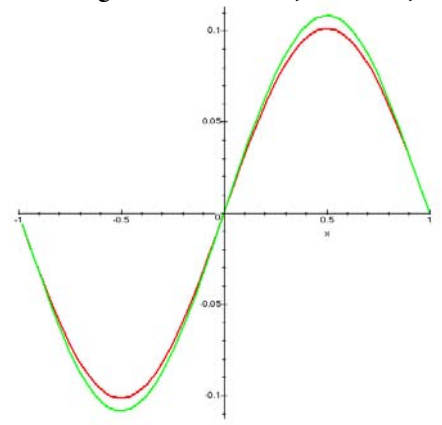
wyberzmy bazę $f_i(x) = (x+1)(x-1)x^{i-1}$

$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

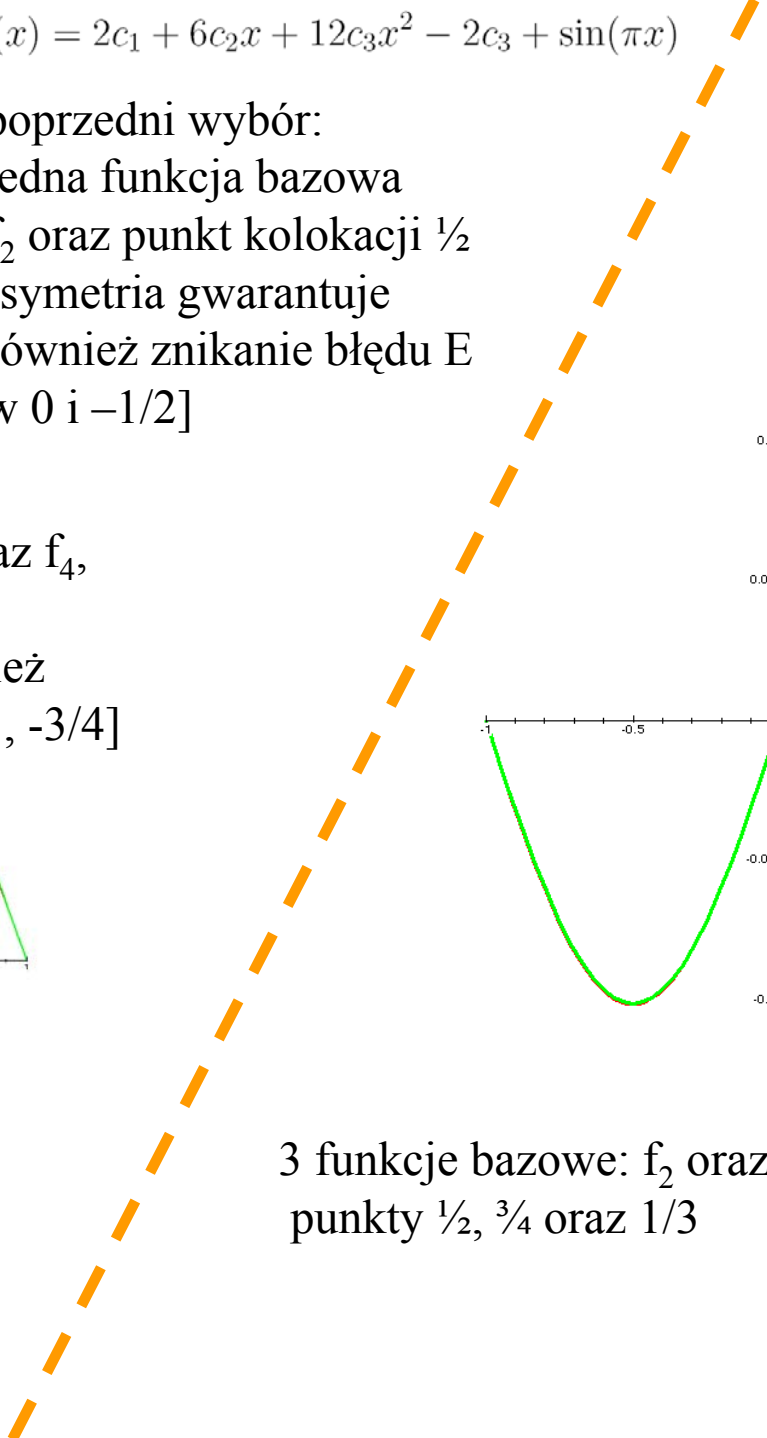


poprzedni wybór:
jedna funkcja bazowa
 f_2 oraz punkt kolokacji $\frac{1}{2}$
[symetria gwarantuje
również znikanie błędu E
w 0 i $-1/2$]

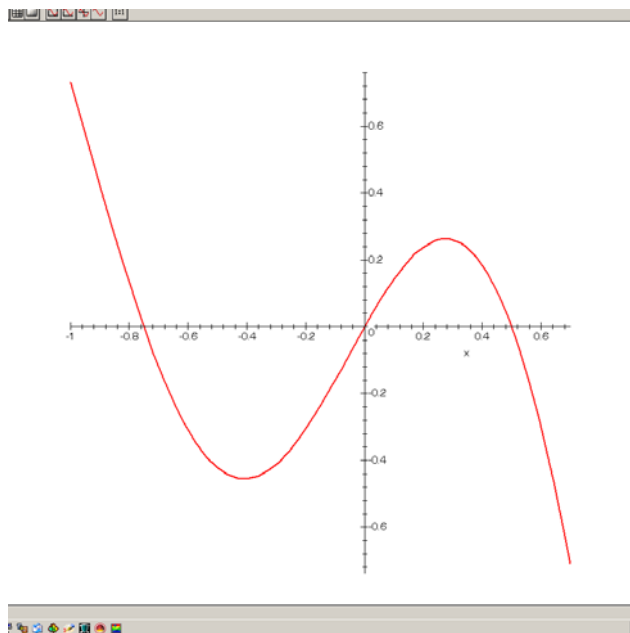
dwie funkcje bazowe: f_2 oraz f_4 ,
punkty: $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{3}{4}$
[symetria gwarantuje również
znikanie błędu E w: 0 , $-1/2$, $-3/4$]



3 funkcje bazowe: f_2 oraz f_4 , f_6
punkty $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ oraz $\frac{1}{3}$



problem z metodą kolokacji: jeśli nawet E znika w wybranych punktach $E(x)$ może znacznie od zera odbiegać w pozostałych



$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

pomysł: optymalne niech będzie rozwiązanie v dla którego *przeciętne* E^2 jest minimalne

$$F = \int_{-1}^1 E^2(x) dx$$

$$\min F(c_1, c_2, \dots, c_N)$$



metoda najmniejszych kwadratów

$$\frac{\partial F}{\partial c_j} = 0$$

znowu układ równań liniowych

- 1) odpada wybór punktów kolokacji
- 2) pojawia się konieczność całkowania
[kolokacja jest jedyną metodą, w której całkować nie trzeba, co okazuje się zaletą gdy problem jest wielowymiarowy i gdy funkcje bazowe i niejednorodność są w całkowaniu trudne
[np. – baza trygonometryczna]

wyberzmy bazę $f_i(x) = (x+1)(x-1)x^{i-1}$

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

każda z funkcji bazowych spełnia warunki brzegowe.

niech w bazie będą $N=3$ funkcje $[i=1,2,3]$

$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

$$F = \int_{-1}^1 E^2(x) dx$$

$$F := \frac{1}{5} \frac{40 c_1^2 \pi + 80 c_1 c_3 \pi + 120 c_2^2 + 168 c_3^2 \pi + 120 c_2^2 \pi + 5 \pi}{\pi}$$

$$F := \frac{1}{5} \frac{40 c1^2 \pi + 80 c1 c3 \pi + 120 c2 + 168 c3^2 \pi + 120 c2^2 \pi + 5 \pi}{\pi}$$

r1 := diff (F, c1) ;

$$r1 := \frac{1}{5} \frac{80 c1 \pi + 80 c3 \pi}{\pi}$$

r2 := diff (F, c2) ;

$$r2 := \frac{1}{5} \frac{120 + 240 c2 \pi}{\pi}$$

r3 := diff (F, c3) ;

$$r3 := \frac{1}{5} \frac{336 c3 \pi + 80 c1 \pi}{\pi}$$

solve ({r1, r2, r3}, {c1, c2, c3}) ;

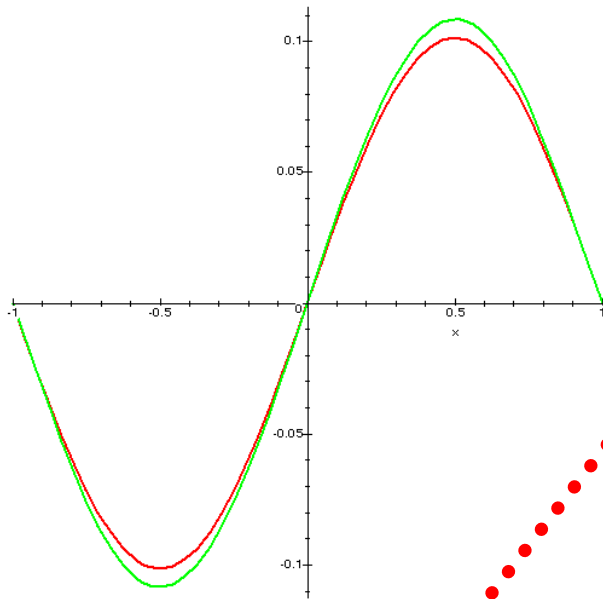
$$\underline{\{c3 = 0, c2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\pi}\}} \mid \underline{c1 = 0}$$

odrzucone funkcje bazowe o złej symetrii

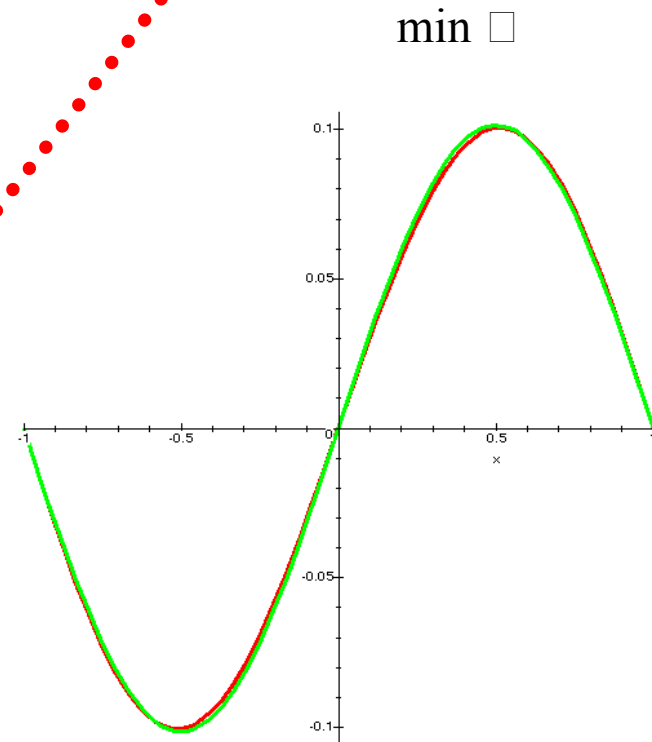
dwie funkcje bazowe: f_2 oraz f_4

, punkty $\frac{1}{2}$ oraz $\frac{3}{4}$

[symetria gwarantuje również 0, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$]



kolokacja



metoda najmniejszych kwadratów przy tej samej bazie

min □ okazują się lepsze
od kolokacji w sensie przeciętnej wartości $|u-v|$

Metoda reszt ważonych

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

$$E(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} + \sin(\pi x)$$

$$R_j = \int_{-1}^1 E(x) w_j(x) dx$$

aby wyznaczyć N wartości c , wybieramy N liniowo niezależnych funkcji wagowych w_j , i żądamy znikania całki błędu z funkcjami wagowymi w_j

Jeden z możliwych wyborów funkcji wagowych: daje **metodę Galerkina**: $w_j = f_j$ (wagi tożsame z funkcjami bazowymi)

$$E(x) = 2c_1 + 6c_2x + 12c_3x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

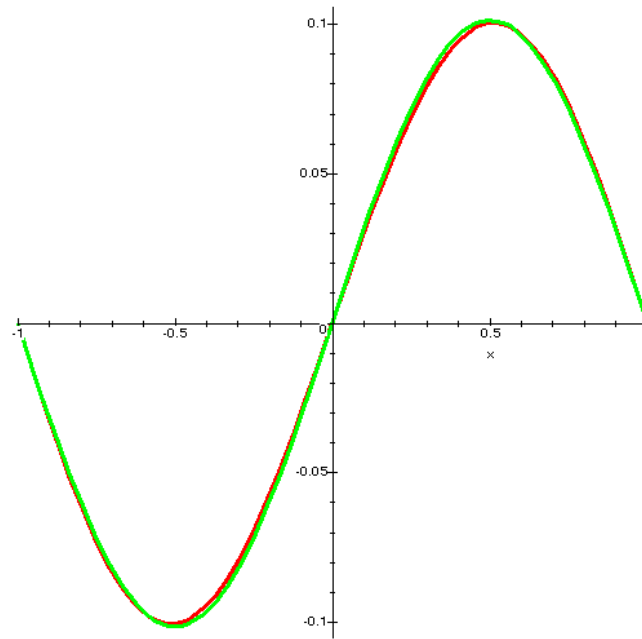
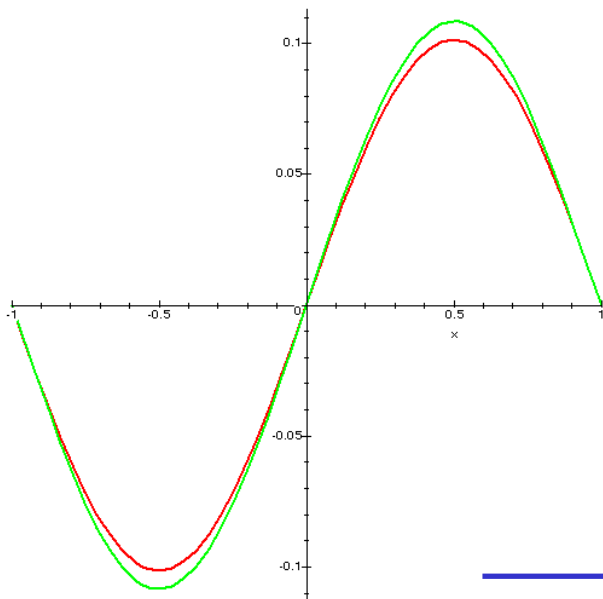
$$f_i(x) = (x+1)(x-1)x^{i-1}$$

$R_j =$ układ równań na c_j

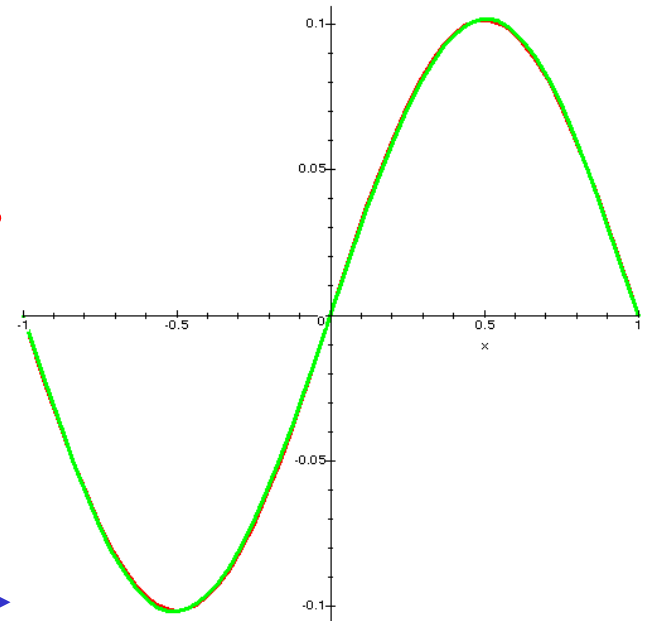
baza 2 funkcji f_2, f_4
porównanie metod

min

Kolokacja



Galerkin



jakość rozwiązania



problem istnienia jednoznacznego rozwiązania dla kolokacji

metoda kolokacji: wybieramy N punktów x_k , układ równań na c_i : $E(x_k)=0$

$$Lv(x_k)=g(x_k)$$

$$u(x) \simeq v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

załóżmy, że L – liniowy

$$\sum_{i=1}^N Lf_i(x_k)c_i = g(x_k)$$

$$\mathbf{Ac}=\mathbf{g}$$

$$\mathbf{A}_{ki} = Lf_i(x_k)$$

$$\begin{bmatrix} Lf_1(x_1) & Lf_2(x_1) & Lf_3(x_1) \\ Lf_1(x_2) & Lf_2(x_2) & Lf_3(x_2) \\ Lf_1(x_3) & Lf_2(x_3) & Lf_3(x_3) \end{bmatrix}$$

Aby istniało jednoznaczne rozwiązanie URL, w każdym z wybranych punktów x_k : wartości funkcji (wiersze) $Lf_i(x_k)$ muszą być liniowo niezależne

funkcje f_i są liniowo niezależne [w przeciwnym razie nie tworzą bazy].
czy mamy gwarancję, że również funkcje Lf_i - są niezależne liniowo?

$$f_i = x^i \quad [i=0, 1, 2, \dots]$$

$u''(x) = -\rho(x)$ [L = druga pochodna], wtedy $Lf_0 = Lf_1 = 0$ (z tak wybraną bazą **kolokacja zawiedzie** niezależnie od wyboru punktów **bo zbiór funkcji Lf nie jest bazą (mimo, że f – jest).**)

Czy jest to problem?

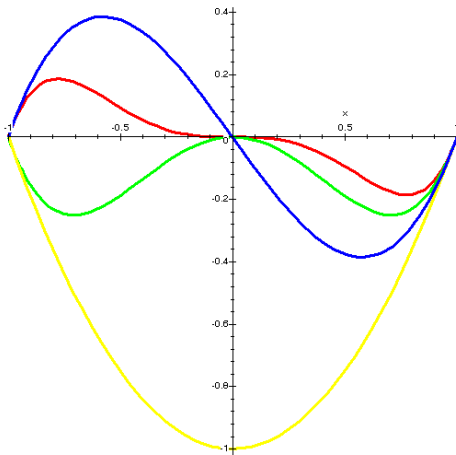
- 1) $(ax+b)$ zawsze można dodać do rozwiązania
- 2) funkcje $(ax+b)$ nie są potrzebne w bazie

przerabiany przykład:

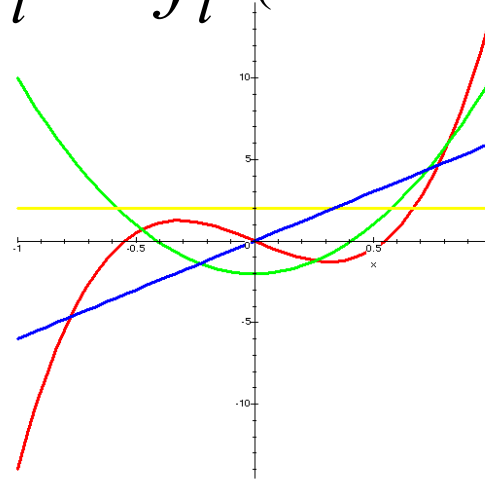
baza $f_i(x) = (x+1)(x-1)x^{i-1}$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \left| \quad \begin{array}{l} u(-1)=0 \\ u(1)=0 \end{array} \right.$$

f_i



$h_i = Lf_i$ (wielomiany różnych stopni)



Lf jest bazą

Jeśli Lf_i – układ funkcji liniowo niezależnych:

na pewno istnieje taki wybór punktów kolokacji, że problem (układ równań na c) ma jednoznaczne rozwiązanie

nie jest jednak tak, że każdy wybór punktów prowadzi do niezależności wartości funkcji w *wybranych* punktach,
możliwe problemy:

baza funkcji parzystych, symetrycznie względem zera
wybrane punkty

ogólnie baza funkcji, które przyjmują tę samą wartość
w dwóch różnych punktach [słaba baza]

[jeśli punkty kolokacji wybrane zostały mało szczęśliwie – dowiemy się o tym na podstawie wyznacznika macierzy URL – będzie bliski zera]

metoda najmniejszych kwadratów, problem istnienia i jednoznaczności rozwiązania

$$E(x) = Lv(x) - g(x) \quad v(x) = \sum_{i=1}^N c_i f_i(x)$$

$$F = \int_{-1}^1 E^2(x) dx \quad \left| \quad \text{minimalne} \right.$$

zał: L – liniowy

$$Lv(x) = \sum_{i=1}^N c_i Lf_i(x) \quad \left| \right.$$

$$F = \int_{-1}^1 dx \left(\sum_i c_i Lf_i(x) - g(x) \right)^2$$

$$F = \int_{-1}^1 \left(\sum_i \sum_j c_i c_j Lf_i(x) Lf_j(x) + g(x)^2 - 2g(x) \sum_i c_i Lf_i(x) \right) dx \quad \left| \right.$$

oznaczenie $(a, b) = \int_{-1}^1 dx a(x)b(x)$ iloczyn skalarny w przestrzeni rzeczywistych funkcji całkowalnych z kwadratem

$$F = \sum_i \sum_j c_i c_j (Lf_i, Lf_j) + (g, g) - 2 \sum_i c_i (g, Lf_i) \quad \left| \right.$$

iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny (u, v) : parze wektorów (funkcji) przyporządkowuje liczbę zespoloną, taką że

- 1) $(u, v) = (v, u)^*$ [przemienny ze sprzężeniem]
- 2) $(u, bv) = b(u, v)$ [liniowy względem mnożenia przez skalar]
- 3) $(u, v+w) = (u, v) + (u, w)$ [liniowy względem dodawania wektorów]
- 4) $(u, u) \geq 0$ [równość tylko gdy $u=0$] dodatnio określony]

np. dla funkcji całkowalnych z kwadratem w V

$$(u, v) = \int_V u^*(x)v(x)dx$$

dwie funkcje u oraz v są ortogonalne o ile $(u, v) = 0$

$$F = \sum_i \sum_j c_i c_j (L f_i, L f_j) + (g, g) - 2 \sum_i c_i (g, L f_i) \quad \Bigg|$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_k} = 0 \quad \longrightarrow \quad \sum_j c_j (L f_k, L f_j) = (g, L f_k) \quad \Bigg|$$

$$h_k := L f_k$$

problem posiada jednoznaczne rozwiązanie jeśli macierz H_{kl} utworzona z iloczynów skalarnych (h_k, h_l) jest macierzą nieosobliwą

powinniśmy wybrać f_k tak, aby zbiór h_k tworzył bazę,

czy niezależność liniowa funkcji h_k wystarcza aby problem posiadał jednoznaczne rozwiązanie?
[wątpliwość stąd, że iloczyn skalarny dwóch różnych par funkcji może być identyczny]

Założmy, że mamy dużo szczęścia i

$$h_k := Lf_k \quad \text{tworzą bazę ortogonalną [np. } L=d^2/dx^2, f_k=\sin(kx)\text{]} \\ \text{tzn. } (h_k, h_l) = N_k \delta_{kl}$$

wtedy:

$$\sum_j c_j (Lf_k, Lf_j) = (g, Lf_k) \quad \Bigg|$$

macierz (h_k, h_l) – diagonalna i z konieczności nieosobliwa
[osobliwa byłaby tylko w sytuacji, gdy jedna z funkcji h_k była
tożsamościowo równa zero, lecz wtedy zbiór h_k nie tworzyłby bazy]

zazwyczaj baza h_k nie jest ortogonalna,
bazę można jednak zortogonalizować
(stworzyć nowy zbiór funkcji ortogonalnych u_k)

(ortonormalizacja Grama-Schmidta):

$$u_1 = h_1 / (h_1, h_1)^{1/2}$$

$$u_2 = h_2 - (h_2, u_1)u_1$$

$$(u_2, u_1) = (h_2, u_1) - (h_2, u_1)(u_1, u_1)$$

itd..

$$u_n = h_n - \sum_{i=1}^{n-1} (h_n, u_i)u_i$$

$$u_n := u_n / (u_n, u_n)^{1/2}$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Przedział $[-1,1]$.

Mamy zbiór niezależnych liniowo funkcji $h_0=1, h_1=x, h_2=x^2, h_3=x^3, \dots$

które nie są ortogonalne [iloczyn skalarny określony z funkcją wagową $w(x)$].

Chcemy skonstruować bazę wielomianów ortogonalnych.

funkcje bazowe dla tego przedziału, z wagą $w(x)=1$ są to wielomiany Legendre'a.

$$u_0 = 1$$

$$u_1 = a + x$$

Jakie a aby $(u_0, u_1) = 0$? : odp.: $a=0$

$$u_1 = x$$

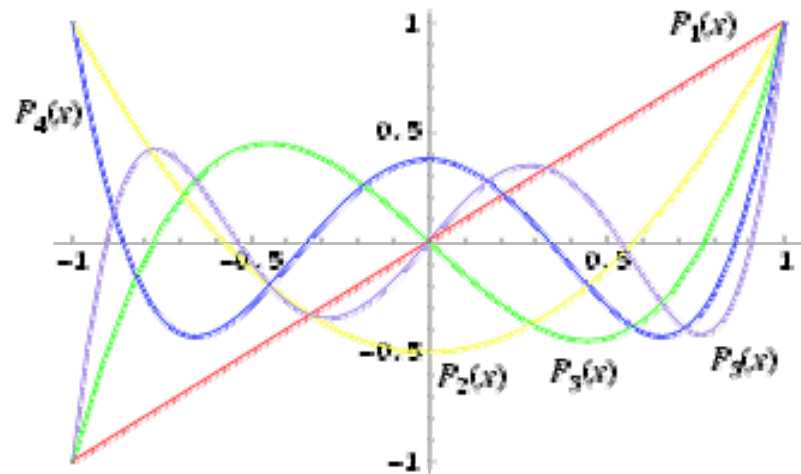
$$u_2 = x^2 + bx + c$$

$$(u_2, u_0) = 2/3 + 2c = 0$$

$$(u_2, u_1) = 0 \rightarrow b = 0$$

$$u_2 = (x^2 - 1/3)$$

W literaturze wielomiany Legendre'a normalizowane tak aby $P_k(1)=1$: $1, x, 3/2(x^2 - 1/3)$



Itd.

ortonormalizacja GS:

z jednej bazy przechodzimy do drugiej (ortonormalnej)

przestrzeń rozpięta przez obydwie bazy jest identyczna

[przy pomocy $1, x, x^2$ można wygenerować przestrzeń wielomianów 2 stopnia

tak samo dobrze jak przy pomocy L_0, L_1, L_2

baza nieortonormalna jest mniej wygodna, ale równie elastyczna]

ortonormalizacja GS:

z jednej bazy przechodzimy do drugiej (ortonormalnej)

przestrzeń rozpięta przez obydwie bazy jest identyczna

[przy pomocy $1, x, x^2$ można wygenerować przestrzeń wielomianów 2 stopnia

tak samo dobrze jak przy pomocy L_0, L_1, L_2

baza nieortonormalna jest mniej wygodna, ale równie elastyczna]

$$F = \int_{-1}^1 E^2(x) dx \quad \Bigg| \quad E(x) = Lv(x) - g(x)$$

problem znalezienia takiego v aby F – minimalny

ma to samo rozwiązanie dla bazy przed i po ortonormalizacji

ortonormalizacja GS:

z jednej bazy przechodzimy do drugiej (ortonormalnej)

przestrzeń rozpięta przez obydwie bazy jest identyczna

[przy pomocy $1, x, x^2$ można wygenerować przestrzeń wielomianów 2 stopnia

tak samo dobrze jak przy pomocy L_0, L_1, L_2

baza nieortonormalna jest mniej wygodna, ale równie elastyczna]

$$F = \int_{-1}^1 E^2(x) dx \quad \Bigg| \quad E(x) = Lv(x) - g(x)$$

problem znalezienia takiego v aby F – minimalny

ma to samo rozwiązanie dla bazy przed i po ortonormalizacji

w bazie ortonormalnej problem ma niewątpliwie jednoznaczne rozwiązanie ...

...

ma więc je również w każdej innej bazie skonstruowanej przez kombinacje liniowe elementów tej bazy.

wniosek: Niezależność liniowa zbioru Lf_k wystarczy do istnienia jednoznacznego rozwiązania optymalnego w sensie najmniejszej całki z kwadratu błędu.

Metoda Galerkina

problem różniczkowy: $Au=f$ (silna forma równania)

1) $E=Au-f$

2) $u = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j$

3) $\int dx \Phi_k(x) \times$

$$\sum_j c_j (\Phi_k, A\Phi_j) - (\Phi_k, f) = 0 \quad (\text{forma słaba})$$

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{F}$$

układ równań na \mathbf{c}

metoda Galerkina: residuum a przestrzeń wektorowa rozpięta przez wektory wybranej bazy

$$Au=f$$

zamiast wprowadzać błąd E , można po prostu wstawić rozwinięcie do oryginalnego równania

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i v_i(x)$$

a potem wyrzutować lewą i prawą stronę na j -ty element bazowy

chcemy znaleźć taki element przestrzeni żeby:

$$(Au, v_j) = (f, v_j)$$

słaba forma równania

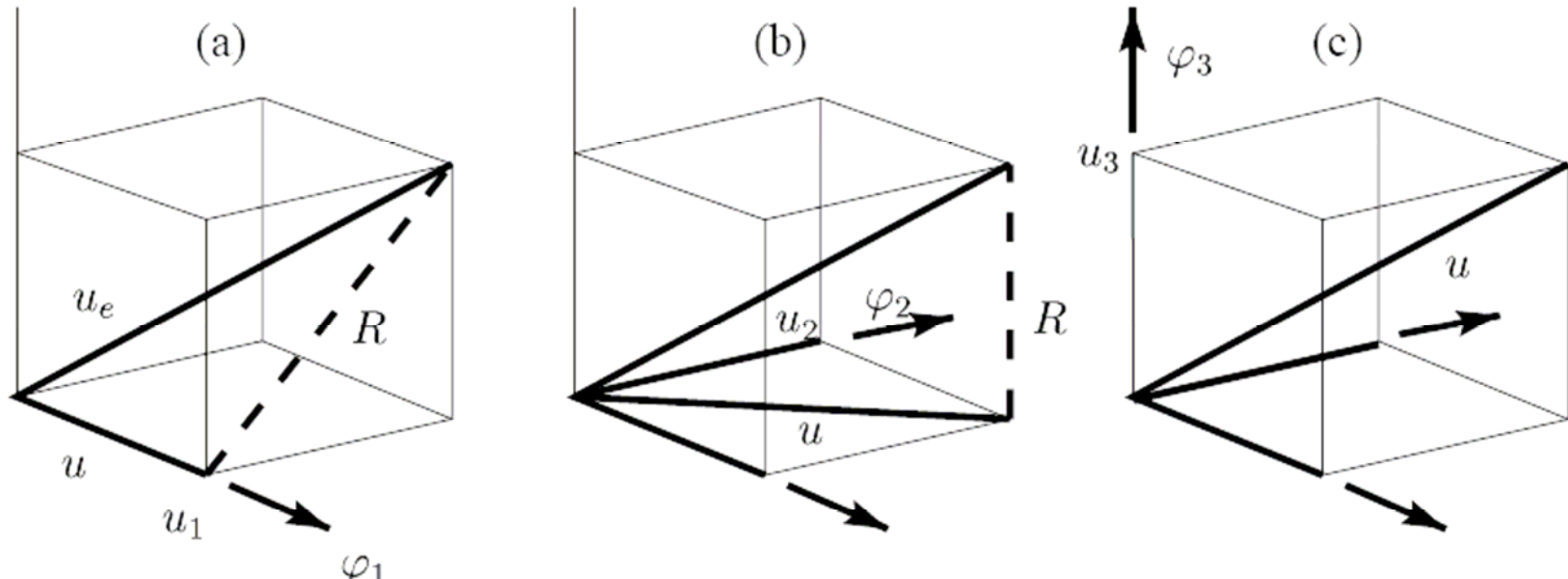
błąd $E=Au-f$: **ortogonalny do każdego wektora bazowego**

$$(E, v_j) = 0$$

błąd (residuum) znajduje się poza przestrzenią generowaną przez wybraną bazę

ilustracja: u_e to rozwiązanie dokładne (przekątna sześcianu),
 u to rozwiązanie przybliżone
 R tutaj to $u_e - u$

od (a) do (c) dodajemy elementy bazowe ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .



metoda Galerkina rzutuje rozwiązanie dokładne na wektory wybranej bazy

błąd metody: residuum – jest ortogonalne do podprzestrzeni wyznaczonej przez wektory bazy

metoda Galerkina jest zbieżna: gdy baza obejmuje całą przestrzeń – nie ma miejsca na residuum

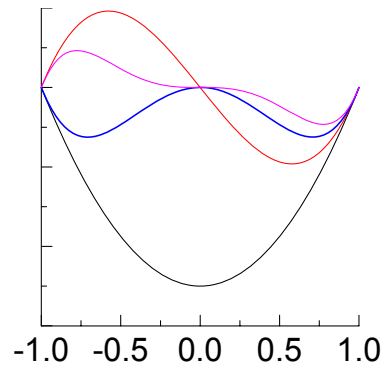
Przykład: z laboratorium

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \left| \begin{array}{l} u(-1)=0 \\ u(1)=0 \end{array} \right. \quad \text{Dirichleta}$$

analityczne: $u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x)$

baza spełniająca Dirichleta

$$v_i = (x + 1)(x - 1)x^{i-1}$$



Galerkin

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

$$S_{ij} = (Lv_i, v_j) = \int_{-1}^1 dx \frac{d^2 v_i}{dx^2} v_j$$

$$S_{ij} = \cancel{\frac{dv_i}{dx} v_j} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dx \frac{dv_i}{dx} \frac{dv_j}{dx}$$

z warunków
brzegowych

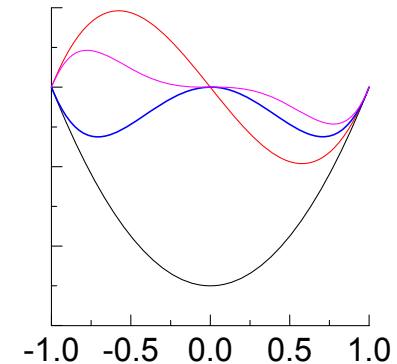
całkowanie przez części

dla i oraz j tej samej parzystości

$$S_{ij} = -2 \left[\frac{(i+1)(j+1)}{i+j+1} + \frac{(i-1)(j-1)}{i+j-3} - \frac{(i+1)(j-1) + (i-1)(j+1)}{i+j-1} \right]$$

baza spełniająca warunki Dirichleta

$$v_i = (x+1)(x-1)x^{i-1}$$



prawa strona:

$$I(k) = - \int_{-1}^1 dx \sin(\pi x) x^k$$

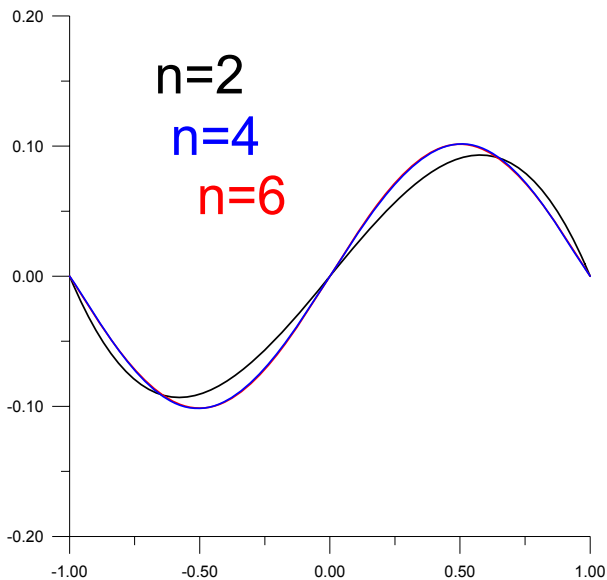
$$I(1) = -\frac{2}{\pi}$$

$$I(k) = -\frac{2}{\pi} - \frac{k(k-1)}{\pi^2} I(k-2)$$

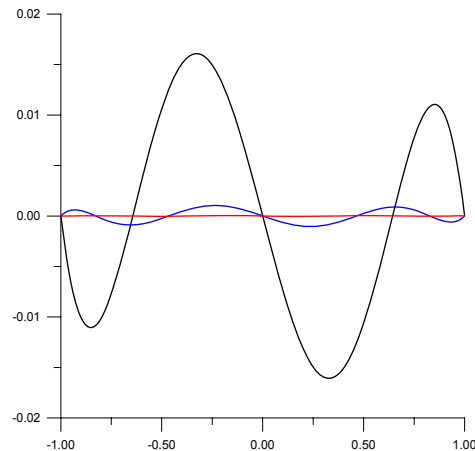
$$F(j) = I(j+1) - I(j-1)$$

dla j nieparzystych

rozwiązanie



błąd ε (**nie residuum** tylko różnica dokładne – Galerkina):

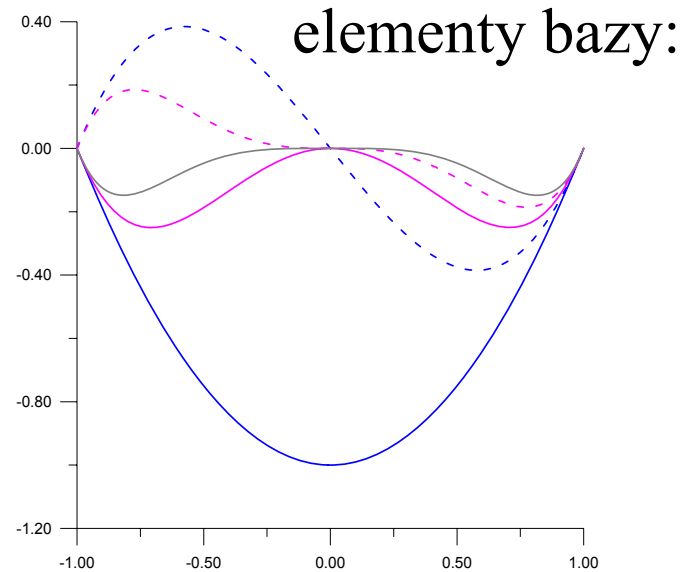
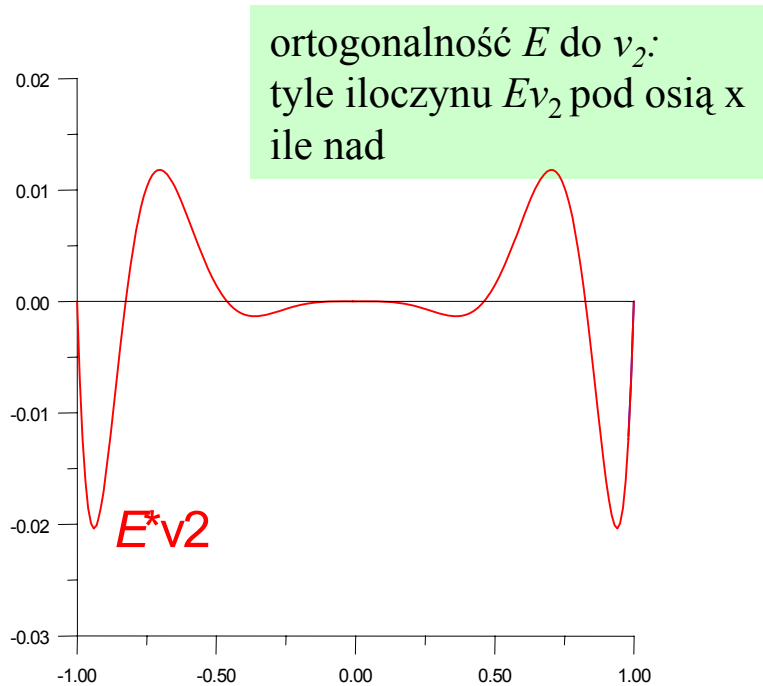


ortogonalność residuum do wektorów bazowych: na laboratorium residuum oznaczane było przez E :

$$E(x) = Lv - f$$

$$E(x) = \frac{d^2v}{dx^2} + \sin(\pi x)$$

zgodnie z naszą wiedzą: ma być $(E, v_i) = 0$
 E ortogonalne do elementów bazy
z $i=1, 3$ oraz 5 – bo te są funkcjami parzystymi



Metoda Galerkinia - równoważna metodzie wariacyjnej, (gdy ta stosowalna)

metoda wariacyjna (Reyleigha-Ritza)

Na jednym z poprzednich wykładów pokazaliśmy, że

$$\nabla^2 \phi = -\rho \quad \longleftrightarrow \quad S = \min$$

$$S = \int \left(\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \rho \phi \right) dv$$

S – używaliśmy jako parametr zbieżności
metod iteracyjnego rozwiązywania równania Poissona

Warunek minimum funkcjonału + baza funkcyjna = metoda wariacyjna RR

Wariacyjne sformułowanie równania różniczkowego

r. różniczkowe na **rzeczywistą** funkcję u :

$Au=f$ w Ω , z jednorodnym warunkiem brzegowym $u=0$ na Γ ,
 A liniowy, dodatnio określony, samosprężony operator różniczkowy:

liniowy $A(f_1+f_2)=Af_1+Af_2$

dodatnio określony $\int_{\Omega} uAu \geq 0$ |

samosprężony $\int_{\Omega} uAv = \int_{\Omega} vAu$

wtedy rozwiązanie równania różniczkowego $Au=f$ jest takie, że

$$S(u) = \int_{\Omega} u \left(\frac{1}{2} Au - f \right) \quad \Bigg| \quad \text{minimalne}$$

Przykład: $A = -d^2/dx^2$ jest operatorem liniowym i dodatnio określonym w przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem i znikających na granicy pudła obliczeniowego [$u(1)=u(0)=0$]

całkowanie przez części: $(fg')' = f'g + fg'' \longrightarrow -fg'' = -(fg')' + f'g'$

$$\int_0^1 u \left(-\frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx = - \cancel{u(x) \frac{du}{dx} \Big|_0^1} + \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx$$

Przykład: $A = -d^2/dx^2$ jest operatorem samosprężonym

$$- \int_0^1 u \frac{d^2 v}{dx^2} dx = - \cancel{u \frac{dv}{dx} \Big|_0^1} + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

$$- \int_0^1 v \frac{d^2 u}{dx^2} dx = - \cancel{v \frac{du}{dx} \Big|_0^1} + \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx$$

metoda wariacyjna Reyleigha-Ritza

$$u(0)=u(1)=0$$

$$Au=f$$

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \rho(x) \quad \Bigg|$$
$$S(u) = \int_0^1 u \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2u}{dx^2} - \rho(x) \right) dx \quad \Bigg|$$

$$S(u) = \int_{\Omega} u \left(\frac{1}{2} Au - f \right)$$

iloczyn skalarny w przestrzeni rzeczywistych funkcji całkowalnych z kwadratem

$$(a, b) = \int_{\Omega} a(x)b(x)dx$$

$$S(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, f)$$

Baza: $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_N$ funkcji spełniających jednorodny warunek brzegowy

$$u = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i \quad \left| \longrightarrow \right. \quad \text{poszukujemy } c_i \text{ dla których } S(u) \text{ minimalny w wybranej bazie}$$

$$S(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, f)$$

metoda wariacyjna Reyleigha-Ritza

$$S(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, f)$$

$$u = \sum_{i=1}^N c_i \Phi_i \quad \left| \quad \text{ baza funkcji } \underline{\text{rzeczywistych}} \right.$$

liniowość A

$$S(u) = \frac{1}{2} \left(\sum_i c_i \Phi_i, \sum_j c_j A \Phi_j \right) - \left(\sum_i c_i \Phi_i, f \right)$$

$$S(u) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j c_i c_j (\Phi_i, A \Phi_j) - \sum_i c_i (\Phi_i, f)$$

liniowość iloczynu skalarnego

$$\frac{dS(u)}{dc_k} = 0$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \sum_j \delta_{ik} c_j (\Phi_i, A \Phi_j) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \delta_{jk} c_i (\Phi_i, A \Phi_j) - \sum_i \delta_{ik} (\Phi_i, f) = 0$$

sumowanie po deltach

$$\frac{1}{2} \sum_j c_j (\Phi_k, A \Phi_j) + \frac{1}{2} \sum_i c_i (\Phi_i, A \Phi_k) - (\Phi_k, f) = 0$$

przepisane:

$$\frac{1}{2} \sum_j c_j (\Phi_k, A\Phi_j) + \frac{1}{2} \sum_i c_i (\Phi_i, A\Phi_k) - (\Phi_k, f) = 0$$

zmiana indeksu i / j

$$\frac{1}{2} \sum_j c_j (\Phi_k, A\Phi_j) + \frac{1}{2} \sum_j c_j (\Phi_j, A\Phi_k) - (\Phi_k, f) = 0$$

przemienność iloczynu skalarnego + **samosprężoność A**

$$\sum_j c_j (\Phi_k, A\Phi_j) - (\Phi_k, f) = 0$$

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{F}$$

układ równań na c

zastosowanie metody wariacyjnej (wracamy do przerobionego problemu):

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \left| \quad \begin{array}{l} u(-1)=0 \\ u(1)=0 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{F}$$

wyberzmy bazę $\Phi_i(x) = (x+1)(x-1)x^{i-1}$

$$\sum_j c_j (\Phi_k, A\Phi_j) - (\Phi_k, f) = 0$$

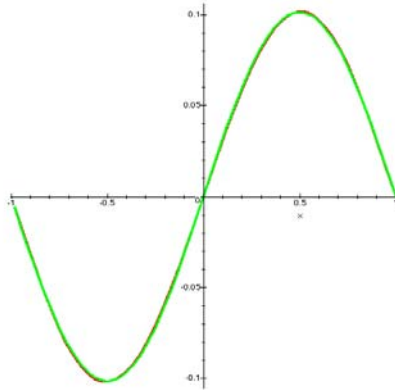
$$\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & 0 & -\frac{8}{15} & 0 & -\frac{8}{35} \\ 0 & -\frac{8}{5} & 0 & -\frac{24}{35} & 0 \\ -\frac{8}{15} & 0 & -\frac{88}{105} & 0 & -\frac{8}{15} \\ 0 & -\frac{24}{35} & 0 & -\frac{184}{315} & 0 \\ -\frac{8}{35} & 0 & -\frac{8}{15} & 0 & -\frac{104}{231} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12}{\pi^3} \\ 0 \\ 4 \frac{7\pi^2 - 60}{\pi^5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

macierz operatora samosprężonego
- symetryczna

zera tam, gdzie symetria
się nie zgadza

$$c_1 = c_3 = c_5 = 0$$

wynik dla bazy funkcji Φ_2, Φ_4



$$c_2 := \frac{105}{8} \frac{2\pi^2 - 27}{\pi^5}$$

$$c_4 := -\frac{315}{8} \frac{2\pi^2 - 21}{\pi^5}$$

wynik dokładnie ten sam co w metodzie Galerkina!

$$\sum_j c_j (\Phi_k, A\Phi_j) - (\Phi_k, f) = 0$$

równanie liniowe, które uzyskaliśmy metodą wariacyjną:
identyczne z równaniem produkowanym przez metodę Galerkina

$$1) \quad E = Au - f \quad \left| \quad 2) \quad u = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j \quad \right| \quad 3) \quad \int dx \Phi_k(x) \times$$

zapis równania na c w metodzie wariacyjnej Reyleigha-Ritza
- identyczny jak w metodzie Galerkin

ale: metoda Galerkin - bardziej ogólna

-
działa również dla operatorów, które nie są
samosprężone / liniowe / dodatnio określone
to jest -
dla operatorów, dla których funkcjonal osiągnający minimum
dla rozwiązania równania nie jest znany

Metoda Galerkina to szczególny przypadek metody reszt ważonych

problem różniczkowy: $Au=f$ (silna forma równania)

1) $E=Au-f$

2) $u = \sum_{j=1}^N c_j \Phi_j$ |

3) $\int dx w_k(x) \times$ | jeśli $w_k = \Phi_k$
mamy Galerkina

$\sum_j c_j (w_k, A\Phi_j) - (w_k, f) = 0$ | (forma słaba)

$A c = F$

układ równań na c

$$\sum_j c_j (w_k, A\Phi_j) - (w_k, f) = 0$$

Metoda reszt ważonych: główne punkty
(i różnice między różnymi wariantami metody):

- 1) Wybór podprzestrzeni wektorowej (bazy) Φ_j
- 2) Wybór funkcji wagowych w_j
- 3) ... które często wybierane są jako maksymalnie rozłączne przestrzennie
wtedy podział przestrzeni jest kolejnym problemem

metoda różnic skończonych dla problemu początkowego w formalizmie reszt ważonych=

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad \left| \quad \begin{array}{l} Y(t=0)=y_0 \\ \text{rozwiązać na } t \text{ z przedziału } [0, T] \end{array} \right.$$

Zadanie: znaleźć przybliżone rozwiązanie \tilde{y} w $(N+1)$ chwilach czasowych $t_n = n\Delta t$,
 $n=0, 1, \dots, N$
krok czasowy $\Delta t = T/N$.

$$y_n = \tilde{y}(t_n)$$

Pochodna szacowana ilorazem centralnym

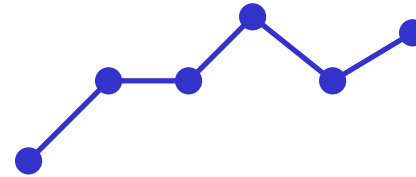
$$\frac{dy}{dt} \simeq \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\Delta t}$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2\Delta t f(t_n, y_n) \quad \left| \quad \begin{array}{l} \text{reguła punktu pośredniego} \\ \text{[zabiegu skoku]} \end{array} \right.$$

Wyprowadzenie metody różnic skończonych w formalizmie ważonych reszduów.

A) y_n określone na równoodległych punktach.

Zakładamy, że między punktami t_n rozwiązanie zmienia się liniowo z t .



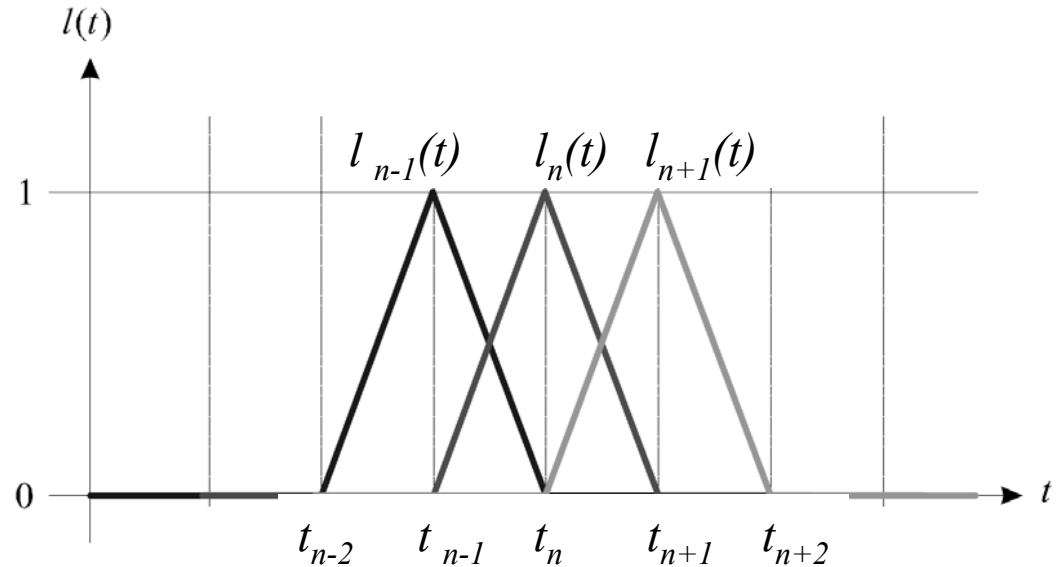
B) $\Omega=[0,T]$, i dyskretyzacja na przedziały czasowe $\tau_m=[t_{m-1},t_m]$

$$\text{C) } \tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^N c_i l_i(t)$$

baza ma zapewniać odcinkowo liniową zmienność przybliżonego rozwiązania

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=0}^N c_i l_i(t)$$

funkcje bazowe wybieramy tak, aby każda rozwinięta w nich funkcja była ciągła i odcinkami liniowa.



$$l_n(t) = \begin{cases} 0 & t \leq t_{n-1} \\ \frac{t-t_{n-1}}{\Delta t} & t_{n-1} \leq t \leq t_n \\ \frac{t_{n+1}-t}{\Delta t} & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & t_{n+1} \leq t \end{cases}$$

każda funkcja bazowa określona na dwóch fragmentach ω_m

Widzimy, że: $l_m(t_n) = \delta_{nm}$

Wyliczyć współczynniki rozwinięcia:

metoda różnic skończonych

$$\tilde{y}(t_n) = \sum_{i=0}^N c_i l_i(t_n) = \sum_{i=0}^N c_i \delta_{in} = c_n = y_n$$

Współczynniki rozwinięcia c_i równe wartościom węzłowym.

Tą samą bazę stosujemy do prawej strony równania

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

$$f(t, y) = \sum_{i=0}^N f_i l_i(t)$$

przepis na y_n :

$$\rightarrow \int_0^T \left[\sum_{i=0}^N c_i l'_i(t) - \sum_{i=0}^N f_i l_i(t) \right] w_j(t) dt = 0$$

Potrzebne dookreślenie funkcji wagowych w_j .

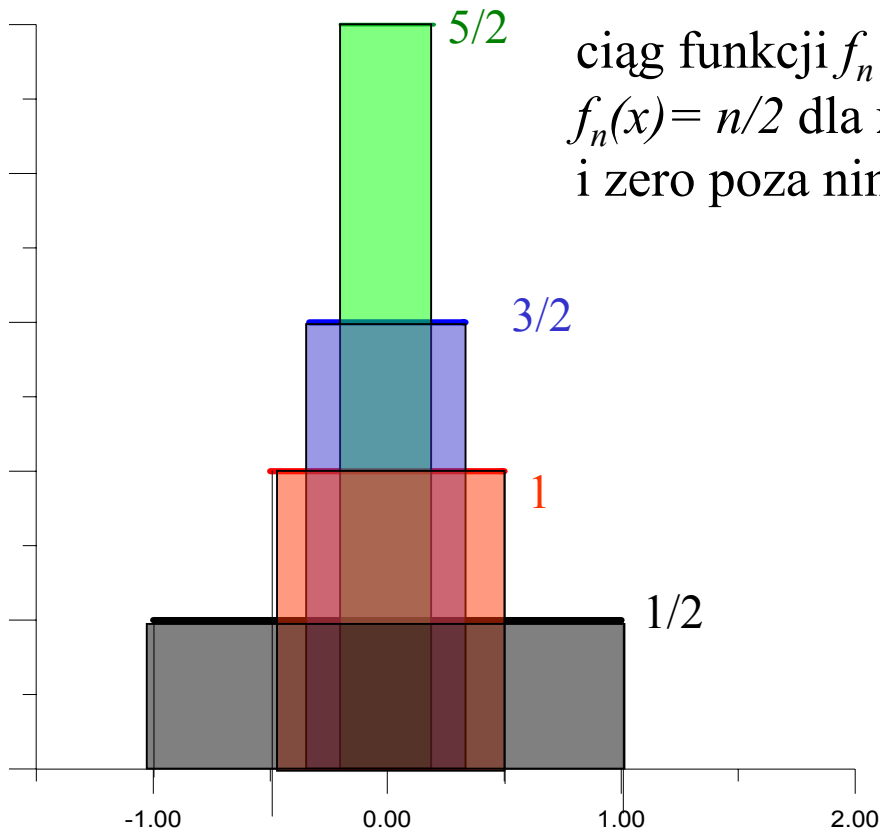
D)

Wagi: rozwiązanie chcemy znać tylko w chwilach t_n - wagi powinny je wyłuskać

$$\int_0^T \left[\sum_{i=0}^N c_i l'_i(t) - \sum_{i=0}^N f_i l_i(t) \right] w_j(t) dt = 0$$

$$w_j(t) = \delta(t - t_j) \quad \leftarrow \text{delta Diraca}$$

dystrybucja delta Diraca



ciąg funkcji f_n :

$$f_n(x) = n/2 \text{ dla } x \in [-1/n, 1/n] \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$$

i zero poza nim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \delta(x)$$

granica tego ciągu „funkcja”
(dystrybucja) delta Diraca:

własności:

‘jednostkowy impuls’

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \neq 0 \\ \infty \text{ dla } x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

konsekwencja, dla ciągłej funkcji g :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = g(0)$$

uzasadnienie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx \quad \left| \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(x)dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \frac{2}{n} g(\xi) \quad \left| \right.$$

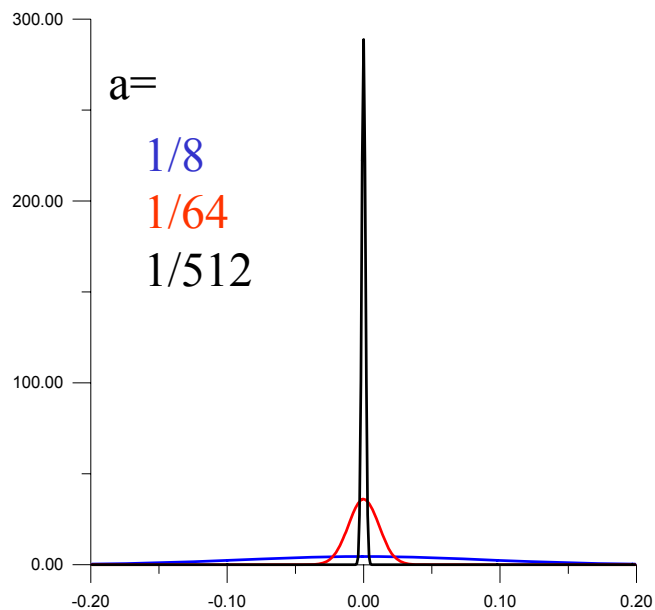
tw. o wartości
średniej, ξ
z przedziału całkowania
[-1/n, 1/n]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(\xi) = g(0)$$

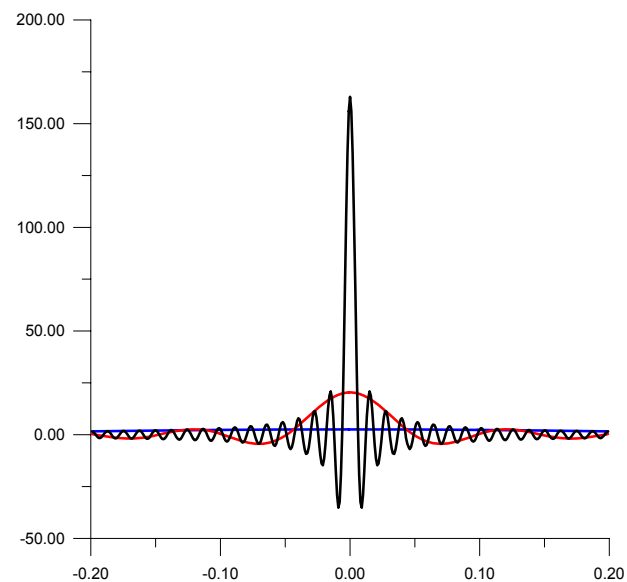
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a)g(x)dx = g(a)$$

Inne funkcje dążące do delty Diraca

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/a^2)$$



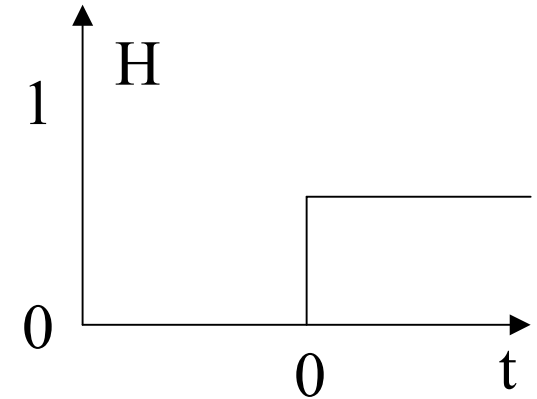
$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi x} \sin(x/a)$$



delta Diraca = nachylenie funkcji Heavyside'a

$$\delta(x - a) = H'(x - a) \quad |$$

$$H(t) = \begin{cases} 1; \text{ dla } t > 0 \\ 0; \text{ dla innych } t \end{cases}$$



dwa i więcej wymiary

$$\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y) \quad |$$

D)

Wagi: rozwiązanie chcemy znać tylko w chwilach t_n - wagi powinny je wyłuskać

$$w_j(t) = \delta(t - t_j) \quad \left| \longleftarrow \text{delta Diraca} \right.$$

$$\int_0^T \left[\sum_{i=0}^N c_i l'_i(t) - \sum_{i=0}^N f_i l_i(t) \right] w_j(t) dt = 0$$

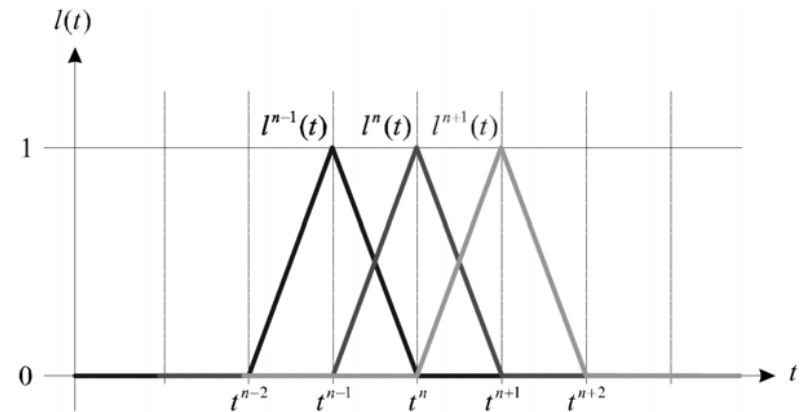
$$\sum_{i=0}^N (c_i l'_i(t_j) - f_i l_i(t_j)) = 0 \quad \left| \right.$$

$$\sum_{i=0}^N c_i l'_i(t_j) = f_j \quad \left| \right.$$

$$l'_i(t_j) = ? \quad \left| \right.$$

$$l'_i(t_j) = ?$$

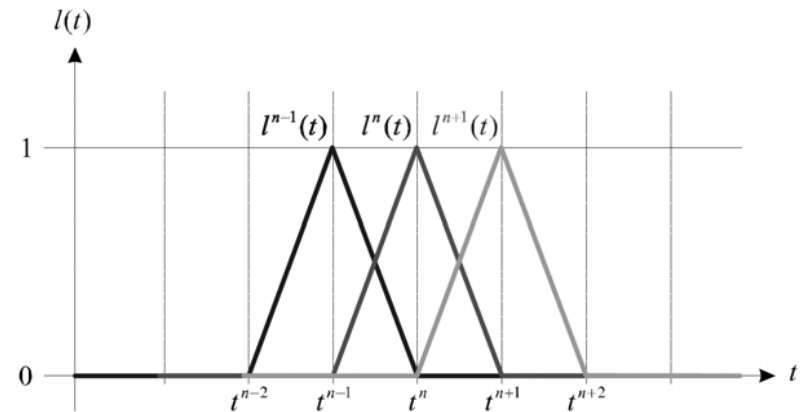
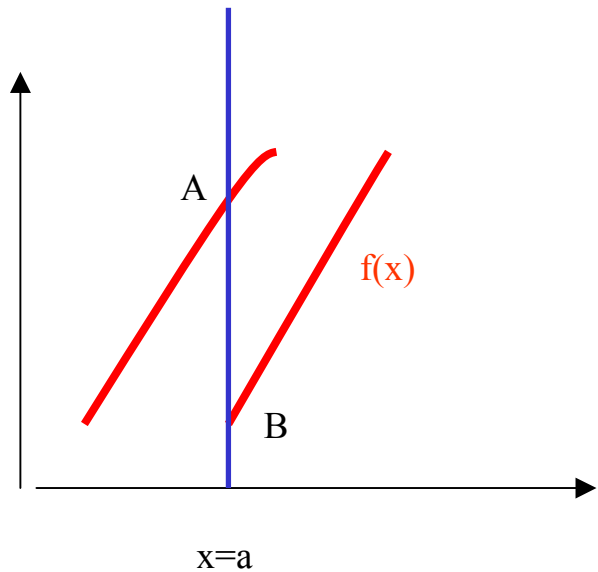
$l(t)$... nie jest różniczkowalna w punktach węzłowych...



$$l'_i(t_j) = ?$$

$l(t)$ nie jest różniczkowalna w punktach węzłowych...

l' ma nieciągłą pochodną ...



$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x - a) = \frac{A + B}{2}$$

$$l'_i(t_j) = \left(\lim_{t \rightarrow t_j^+} l'_i(t) + \lim_{t \rightarrow t_j^-} l'_i(t) \right) / 2$$

(tzw. główna wartość pochodnej)

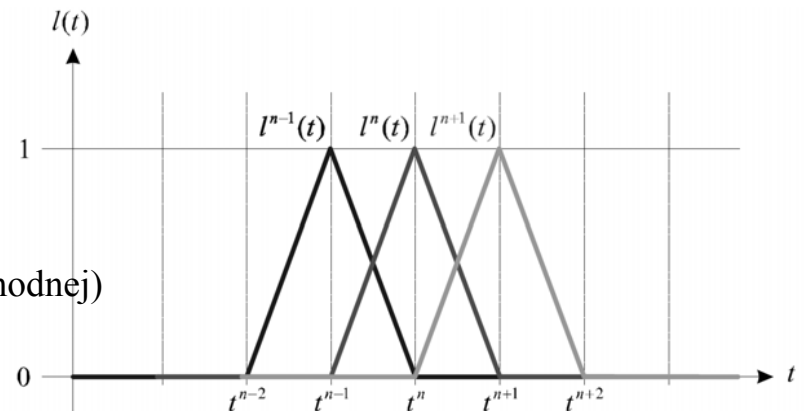
$$l'_n(t_j) = ?$$

$$l'_i(t_j) = \left(\lim_{t \rightarrow t_j^+} l'_i(t) + \lim_{t \rightarrow t_j^-} l'_i(t) \right) / 2$$

$$l_n(t) = \begin{cases} 0 & t \leq t_{n-1} \\ \frac{t-t_{n-1}}{\Delta t} & t_{n-1} \leq t \leq t_n \\ \frac{t_{n+1}-t}{\Delta t} & t_n \leq t \leq t_{n+1} \\ 0 & t_{n+1} \leq t \end{cases}$$

główna wartość pochodnej (średnia z lewo i prawostronnej pochodnej)

$$l'_n(t_j) = \begin{cases} -\frac{1}{2\Delta t} & n = j - 1 \\ 0 & n \neq j \pm 1 \\ \frac{1}{2\Delta t} & n = j + 1 \end{cases}$$



$$l'_n(t_j) = \begin{cases} -\frac{1}{2\Delta t} & n = j - 1 \\ 0 & n \neq j \pm 1 \\ \frac{1}{2\Delta t} & n = j + 1 \end{cases} \longrightarrow l'_n(t_j) = \frac{1}{2\Delta t} (\delta_{n,j+1} - \delta_{n,j-1})$$

$$\sum_{i=0}^N c_i l'_i(t_j) = f_j$$

$$\frac{1}{2\Delta t} \sum_{i=0}^N c_i (\delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}) = f_j$$

$$\frac{1}{2\Delta t} (c_{j+1} - c_{j-1}) = f_j \xrightarrow{c_j=y_j} y_{j+1} = y_{j-1} + 2\Delta t f_j$$

Metoda różnic skończonych jest przypadkiem szczególnym: metody reszt ważonych dla odcinkowo liniowej bazy i funkcji wagowych typu delta Diraca

w stronę metody elementów skończonych

przypomnienie: metoda ważonych reszt

$Lu=f$ (na Ω) \longrightarrow Rozwiązanie dokładne (silnej postaci równania)
jest „trudne”.

$Bu=g$ (na $d\Omega$) szukamy rozwiązania przybliżonego w bazie funkcji

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x) \quad (\text{rozwiązanie w podprzestrzeni wektorowej rozpiętej przez wektory bazy})$$

Działając operatorami L i B na rozwiązanie przybliżone dostajemy funkcje resztkowe (rezydualne) zamiast zera:

$$\begin{array}{l} L\tilde{u} - f = r \\ B\tilde{u} - g = s \end{array} \quad \longrightarrow \quad \text{zależy nam, aby reszty } r \text{ i } s \text{ były jak najmniejsze}$$

c wyznaczamy z ważenia reszty:

$$\int_V r(x) w_j(x) dx = 0$$

dla metody Galerkina bierzemy funkcje bazowe jako wagi: $w_j = v_j$

Silna forma równania:

$$Lu=f \quad (\text{równość funkcji w każdym punkcie} \quad \tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x) \\ \text{obszaru całkowania})$$

ważone reszty:

$$(L\tilde{u} - f, w_j) = (r, w_j) = 0 \quad \Big|$$

$$(L\tilde{u}, w_j) = (f, w_j) \quad \Big| \quad \text{\textbf{słaba forma równania,}} \\ \text{(równość } N \text{ liczb)}$$

metoda Galerkina: residuum a przestrzeń wektorowa rozpięta przez wektory wybranej bazy

$$Lu=f$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i v_i(x)$$

chcemy znaleźć taki element przestrzeni żeby: $(Lu, v_j) = (f, v_j)$

słaba forma równania

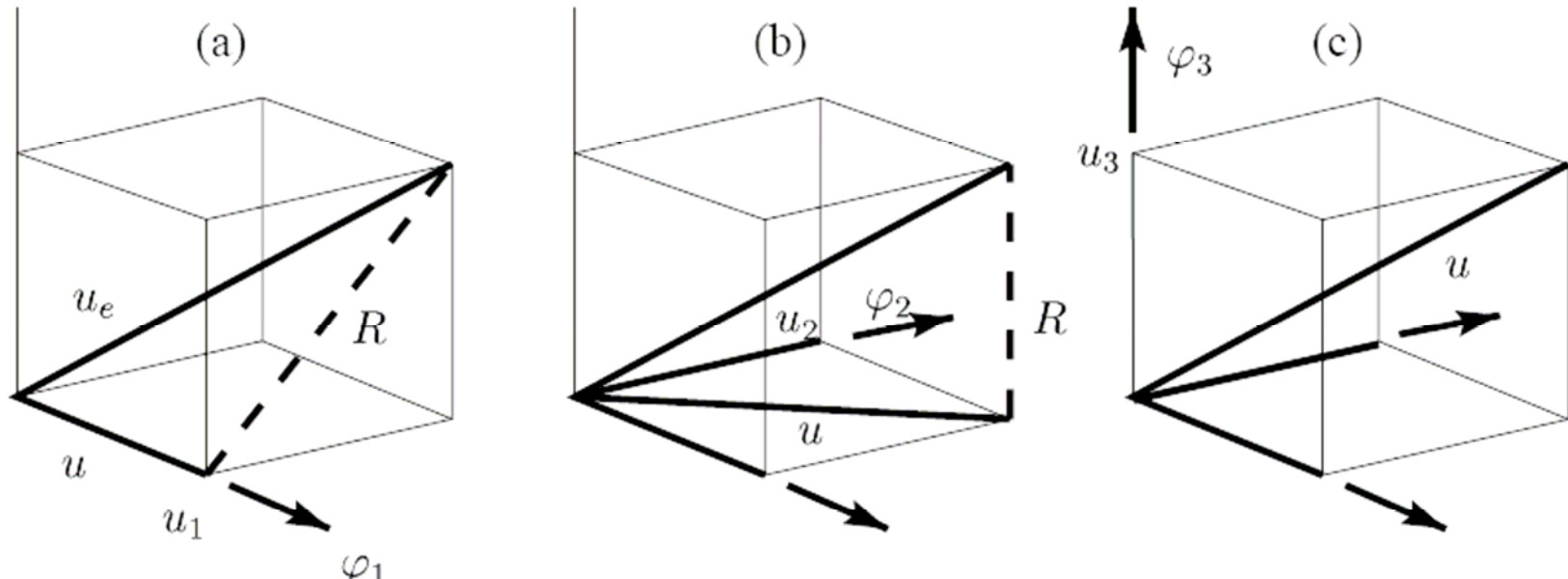
residuum (błąd) $r=Lu-f$: **ortogonalny do każdego wektora bazowego**

$$(r, v_j) = 0$$

residuum znajduje się poza przestrzenią generowaną przez wybraną bazę

ilustracja: u_e to rozwiązanie dokładne (przekątna sześcianu),
 u to rozwiązanie przybliżone
 R tutaj to $u_e - u$

od (a) do (c) dodajemy elementy bazowe ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 .



metoda Galerkina rzutuje rozwiązanie dokładne na wektory bazy

błąd metody: residuum – jest ortogonalne do podprzestrzeni wyznaczonej przez wektory bazy

metoda Galerkina jest zbieżna: gdy baza obejmuje całą przestrzeń – nie ma miejsca na residuum

żargon MES: macierz sztywności i wektor obciążeń

$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i \quad \left| \begin{array}{l} \nearrow (Lu, v_j) = (f, v_j) \\ \searrow \sum_{i=1}^n (Lv_i, v_j) y_i = (f, v_j) \end{array} \right.$$

$$\mathbf{S}_{ij} = (Lv_i, v_j)$$

$$\mathbf{F}_j = (f, v_j)$$

$$\mathbf{SY} = \mathbf{F}$$

stiffness matrix
macierz sztywności

load vector
wektor obciążeń

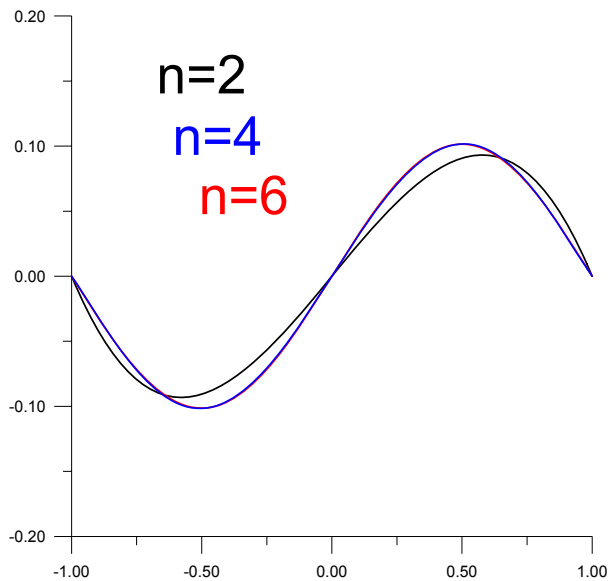
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

SY=F

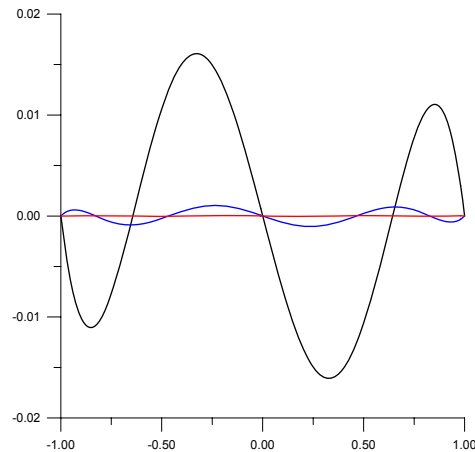
baza używana poprzednio:

$$v_i = (x + 1)(x - 1)x^{i-1}$$

rozwiązanie



błąd ε (**nie residuum** tylko różnica dokładne – Galerkina):



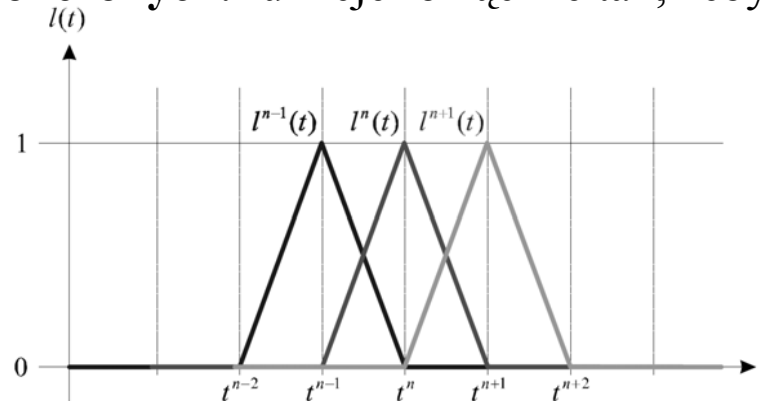
powyższy przykład: baza wielomianów określonych na całym pudle obliczeniowym.
Z wielu powodów jest to zły pomysł.

Wysokie potęgi wielomianów niewygodne w użyciu: całkowanie, efekt Rungego,
powód najważniejszy:
macierz **S** byłaby gęsta, problem nie do rozwiązania przy dużym **N**.

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

Galerkin z bazą odcinkami wielomianowych funkcji zdefiniowanych w sposób rozłączny przestrzennie → metoda elementów skończonych

Metoda elementów skończonych: funkcje rozłączne tak, żeby **S** = rzadka



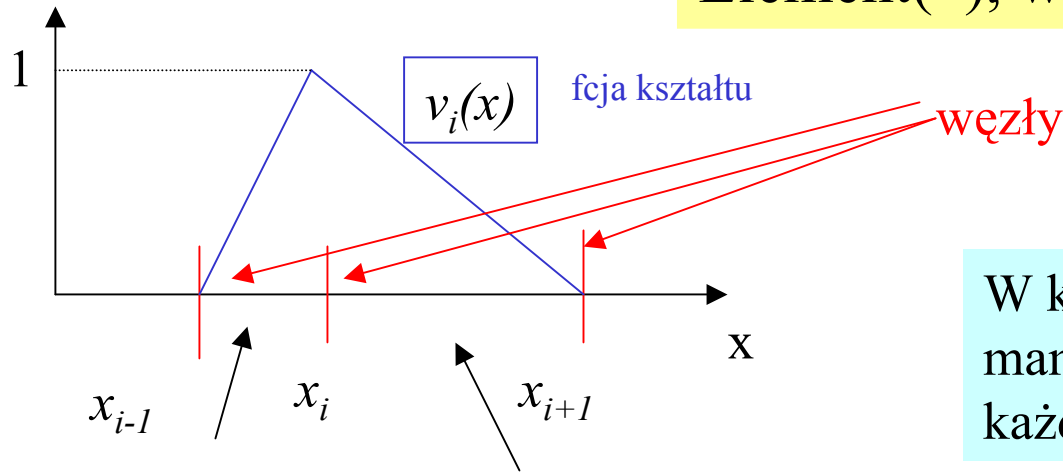
najprostszy wybór *funkcji kształtu*(*): baza funkcji odcinkami liniowych
zbieżność dostaniemy w przestrzeni funkcji odcinkami liniowych

(*) trzecie pojęcie z żargonu MES

Zobaczymy w działaniu metodę elementów skończonych,
ale na razie: bez jej charakterystycznych narzędzi:
bez lokalnych macierzy sztywności związanych z każdym elementem
bez ich składania do macierzy globalnej
bez mapowania przestrzeni fizycznej do przestrzeni referencyjnej

będziemy mówili o metodzie z punktu widzenia węzłów:
tak najłatwiej wprowadzić metodę, ale dla 2D i 3D takie podejście okazuje się niepraktyczne
podejście związane z elementami zobaczymy później

Element(*), węzły(*), funkcje kształtu



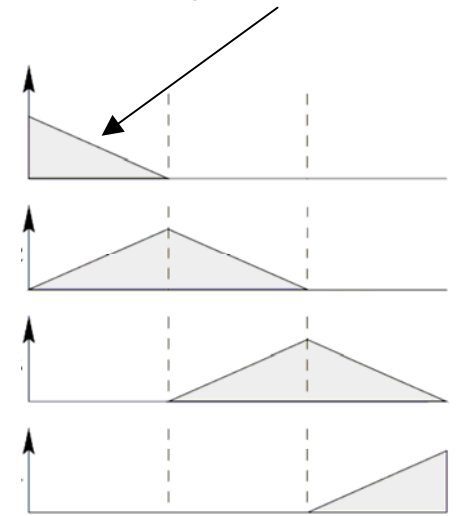
W każdym elemencie:
mamy 2 funkcje,
każda z innym węzłem związana

element K_i długości
 $h_i = x_i - x_{i-1}$

element K_{i+1} długości
 $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

funkcje bazowe i brzeg



$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i$$

Dla (jednorodnych) warunków Dirichleta
mamy

$$y_{\text{pierwsze}} = y_{\text{ostatnie}} = 0$$

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

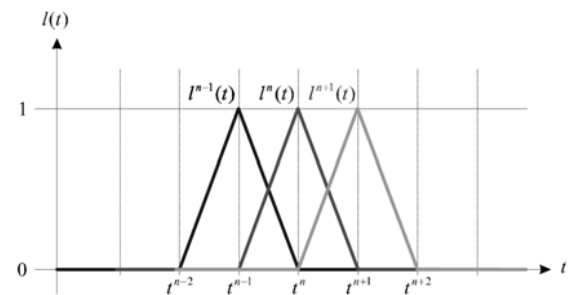
$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$v_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$S_{ij} = (Lv_i, v_j)$ niezerowe tylko dla $i=j, i=j-1$ oraz $i=j+1$ [bez przekrywania całka znika]

$$S_{ii} = \cancel{v_i'(x)v_i(x)} \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx v_i'(x)v_i'(x) dx$$

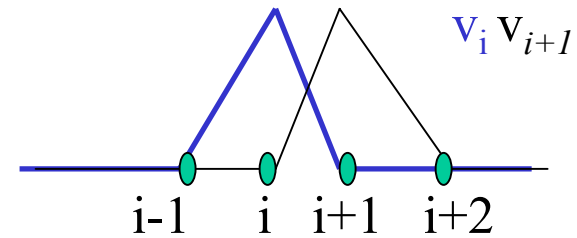
$$S_{ii} = -\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)$$



$$S_{ij} = (Lv_i, v_j) \quad \text{niech } j = i+1 \quad v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$S_{i,i+1} = + v'_i(x) v_{i+1}(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} dx v'_i(x) v'_{i+1}(x) dx$$

$$S_{i,i+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx v'_i(x) v'_{i+1}(x) dx$$



gdy jedna pochodna
dodatnia druga ujemna

$$S_{i,i+1} = - \left(-\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \times \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \times (x_{i+1} - x_i) \right) = \frac{1}{h_{i+1}}$$

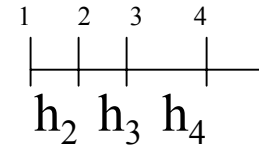
$$S_{i,i-1} = \frac{1}{h_i}$$

← długość elementu o numerze
większym z dwóch indeksów S

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

Macierz sztywności dla n węzłów

+ warunek $y_1=y_n=0$



wiersz $n-1 \rightarrow$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_i = (v_i f)$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

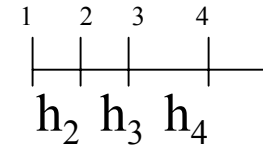
po elemencie K_i

po K_{i+1}

SY=F

Macierz sztywności dla n węzłów

+ warunek $y_1=y_n=0$



wiersz $n-1 \rightarrow$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_i = (v_i f)$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

po elemencie K_i

po K_{i+1}

dla równoodległych węzłów S jak macierz metody RS (razy $h=dx$),
ale wektor obciążeń F – nie! w MRS mielibyśmy $F_i=f(x_i) dx$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

dla $f(x) = -\sin(\pi x)$

$$F_i = -\frac{\sin(x_i \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i-1})} + \frac{\sin(x_{i-1} \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i-1})} - \frac{\sin(x_{i+1} \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i+1})} + \frac{\sin(x_i \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i+1})}$$

warunki brzegowe (jednorodne Dirichleta): forma S oraz $F_1 = F_n = 0$

ten URL wygląda prawie jak dla MRS...
zobaczmy wyniki

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Układ równań z macierzą trójprzekątniową – przypomnienie.
 Jak rozwiązać?

Dekompozycja LU macierzy trójkątnej

$$SY=F$$

$$S=LU \quad (\text{LU} - \text{trójkątne})$$

$$(\text{LU})Y=F$$

$$UY=x$$

$Lx=F$ - najpierw rozwiążemy ten układ

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

dwuprzekątne

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n & 1 \end{pmatrix} \quad \left| \quad U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \right|$$

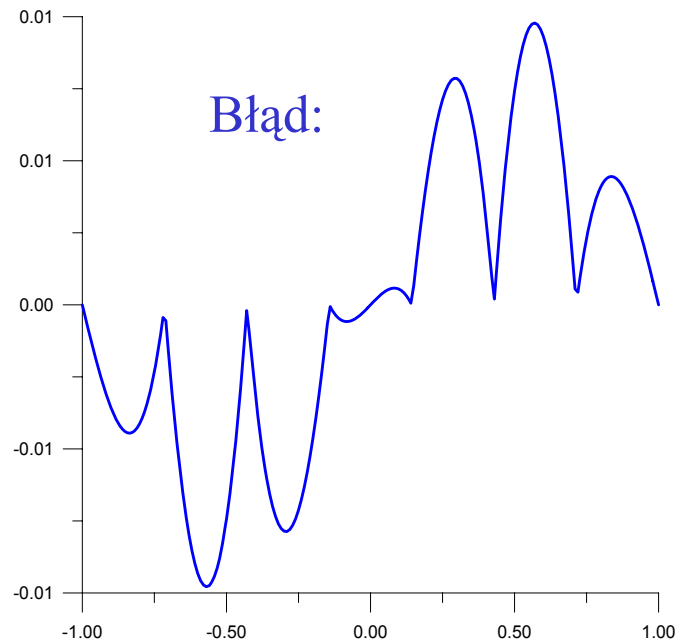
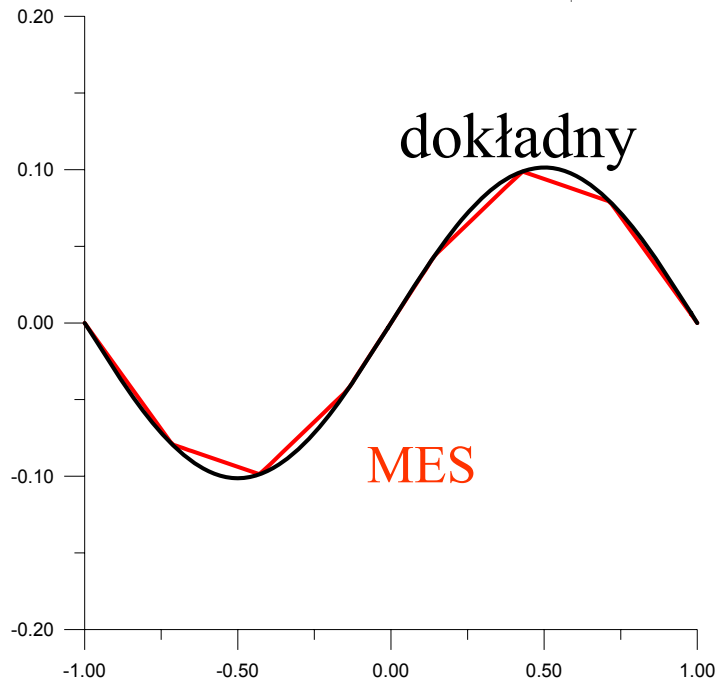
bez zmian

$$\alpha_1 = a_1 \quad \left| \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}} \quad \text{dla } i > 1 \right.$$

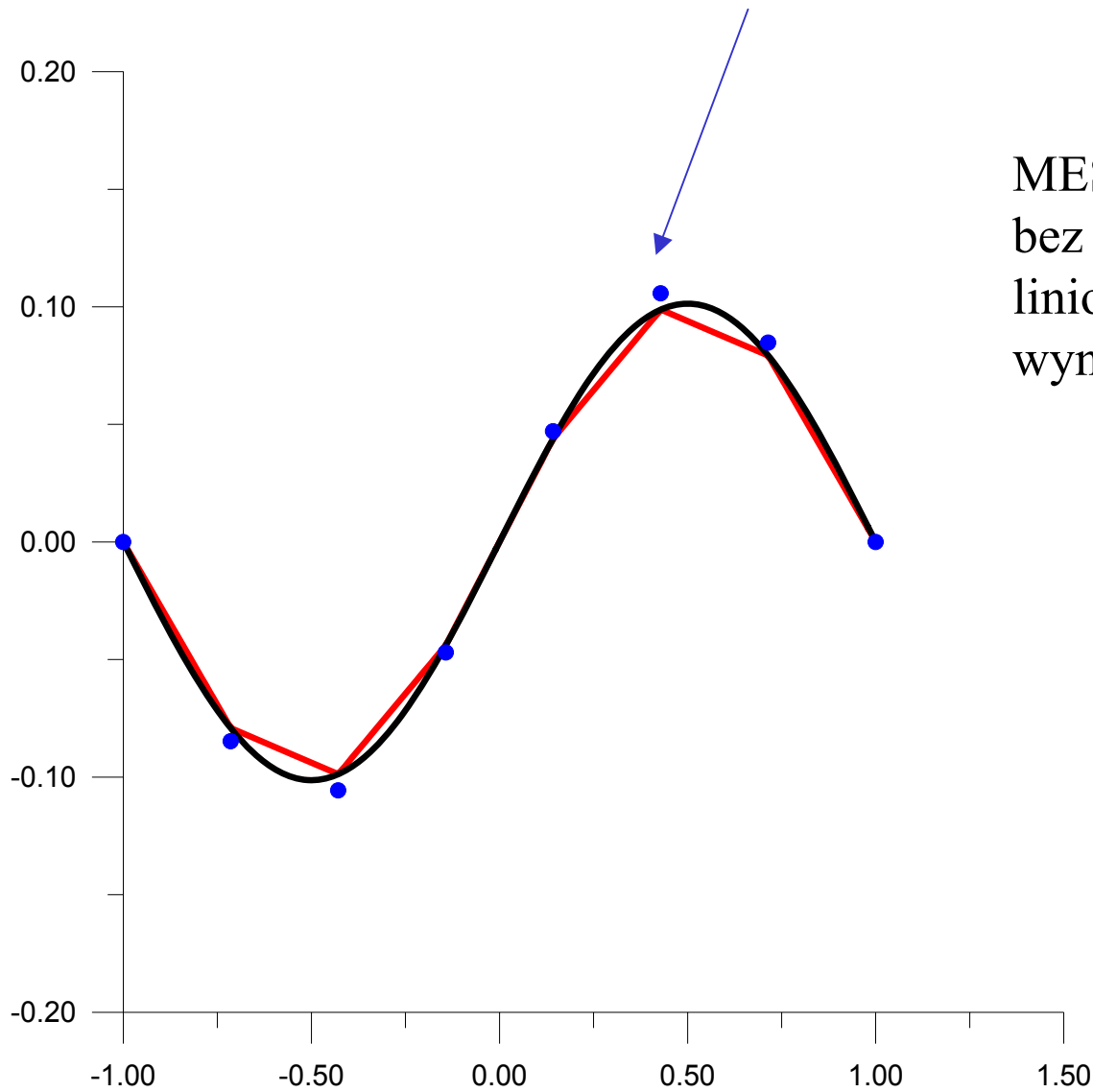
$$\left. \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1} \right.$$

Wynik: równoodległe węzły

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

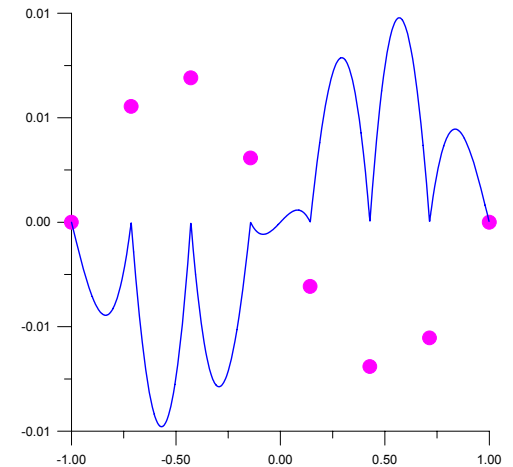


MES (równoodległe węzły) a MRS (węzły w tych samych punktach):

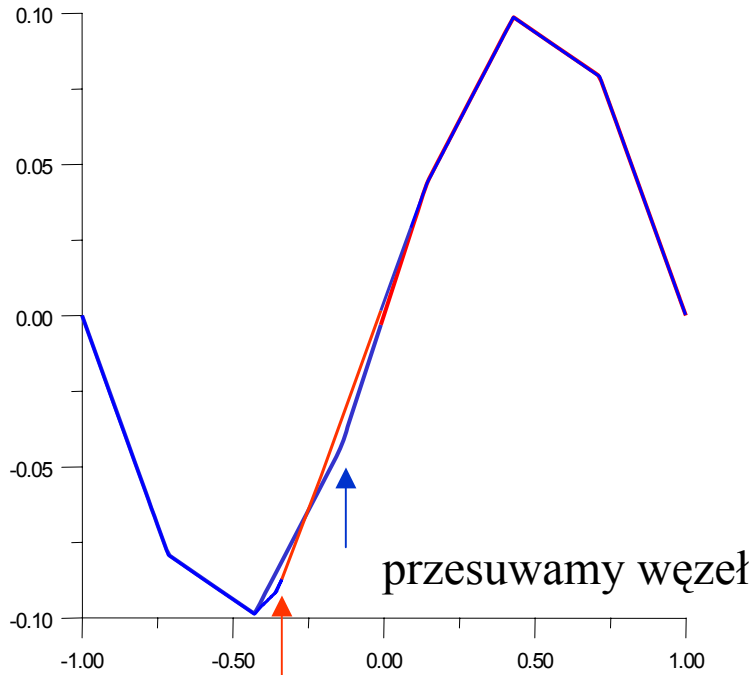


MES dla laplasjanu
bez pochodnej z funkcjami
liniowymi: w węzłach
wynik dokładny !!!

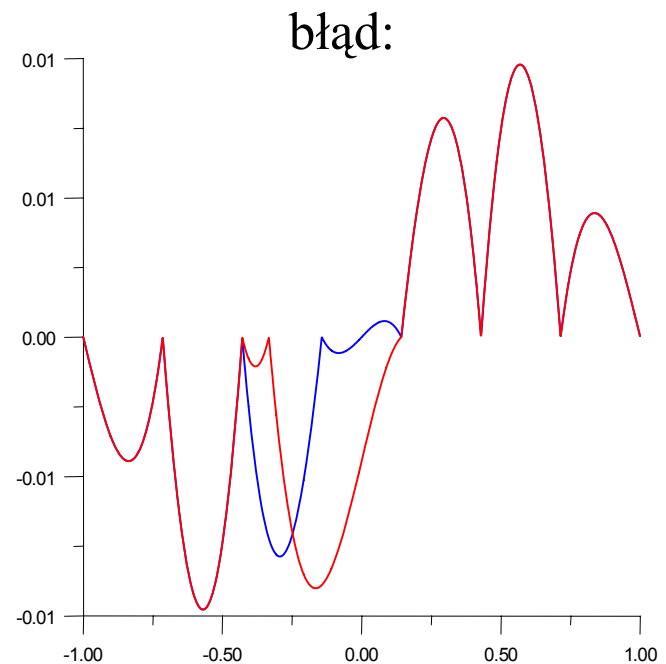
błąd MRS i MES

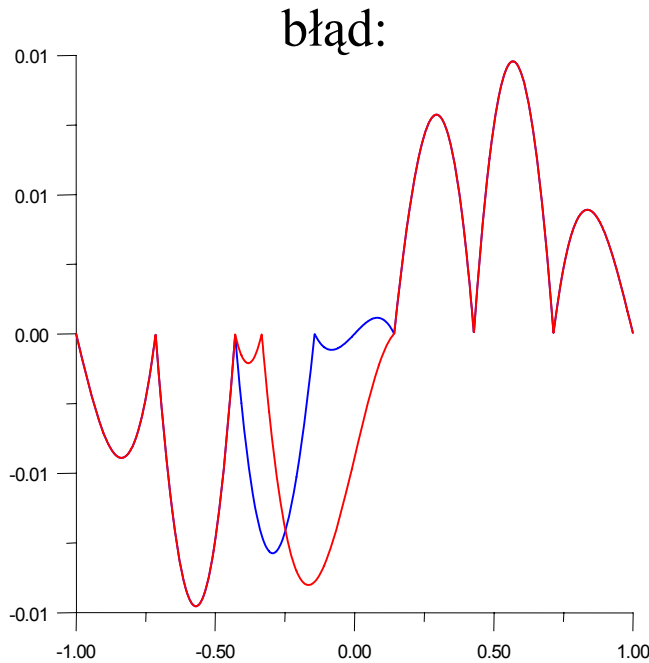


znikanie błędu MES (1D, liniowe f.kształtu) w węzłach
zachodzi również dla nierównomiernego rozkładu węzłów:



Dla MRS: dla nierównomiernej siatki
musielibyśmy używać
niesymetrycznych ilorazów o
[jak widzieliśmy] niższej dokładności





Równanie Poissona,
funkcje kształtu liniowe
wynik MES **dokładny** w węzłach

MES: produkuje oszacowanie
wyniku również między węzłami

MRS: tylko w węzłach

MRS: wartości w węzłach,
są dokładne **TYLKO**
w granicy $\Delta x \rightarrow 0$

dowód dokładności MES w tej wersji - za parę folii

