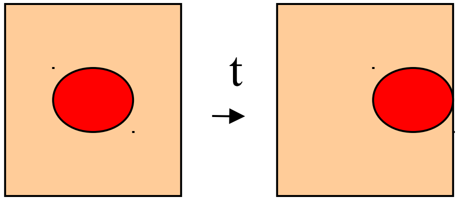
adwekcja rzadko występuje w formie czystej
przeważnie: łącznie z dyfuzją

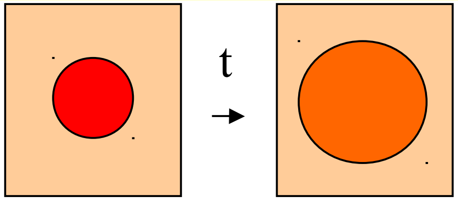
na razie znamy tylko dyfuzję numeryczną

dziś: dyfuzja prawdziwa
Dyfuzja+adwekcja: występuje
w problemach transportu masy i energii

Adwekcja=unoszenie



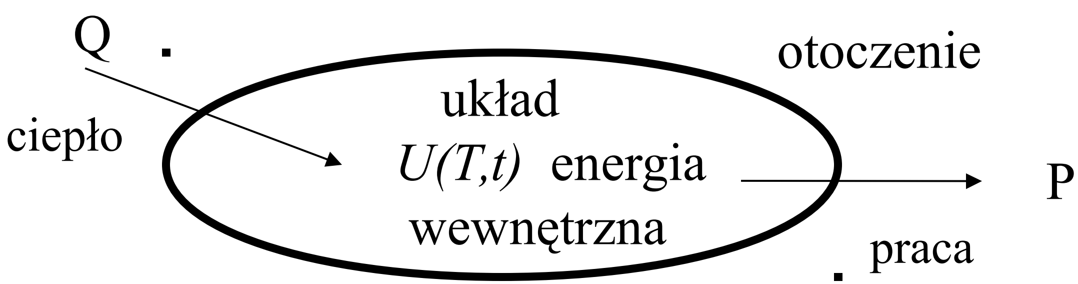
Dyfuzja=znoszenie gradientu koncentracji



adwekcja-dyfuzja pyłu :

dyfuzja: jeden z mechanizmów transportu ciepła

przekaz ciepła: transfer energii napędzany gradientem temperatur i dążący do jego zniwelowania.



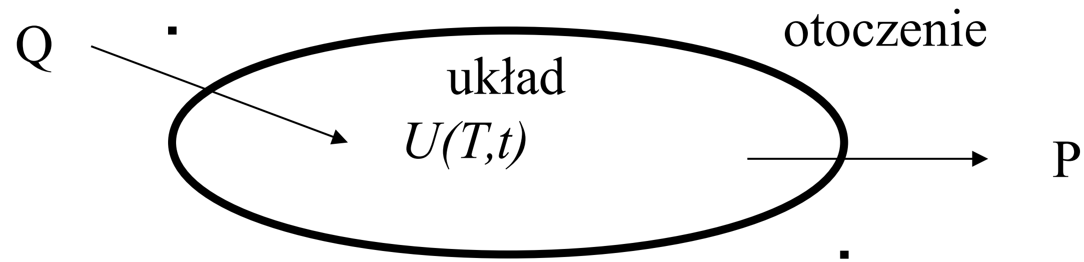
Q = tempo przekazu ciepła J/s

$P = dW/dt$ = tempo pracy wykonywanej przez układ

$$Q=P+dU/dt$$

I-sza zasada termodynamiki:
ciepło dostarczone do układu = praca wykonana przez układ + zmiana energii wewnętrznej układu

$Q=P+dU/dt$



$Q=P+dU/dt$

$P = dW/dt$

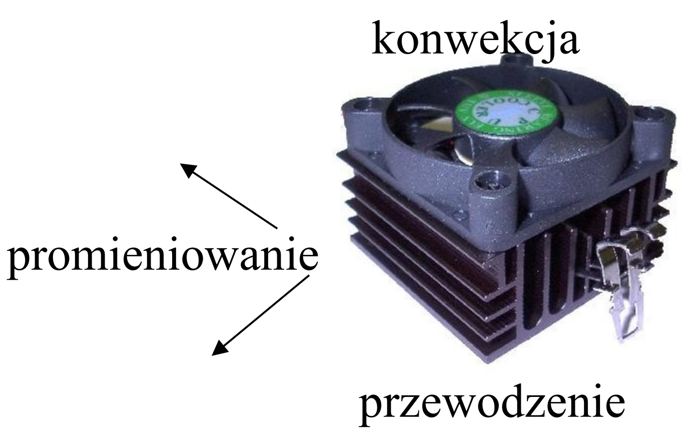
$dW=pdV$

$Q=p\ dV/dt+dU/dt$

Dla układu o stałej objętości $dW=0$

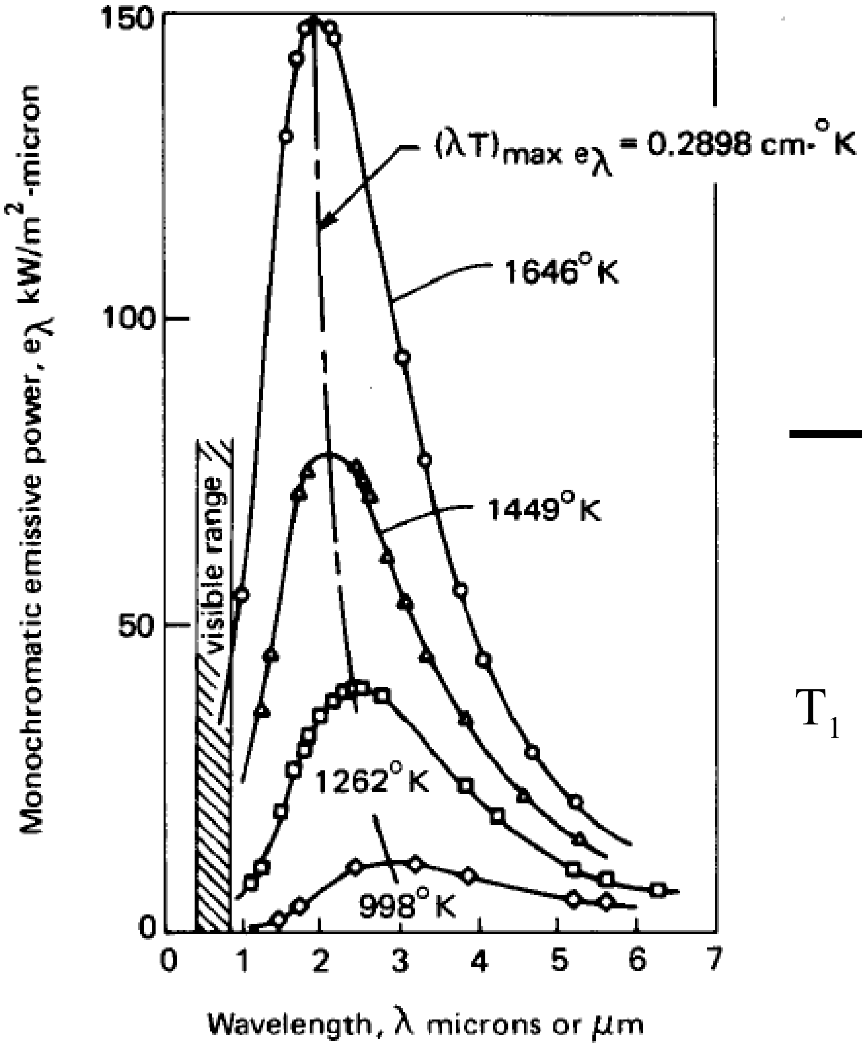
$Q=dU/dt=mc_v\ dT/dt$ (c_v = ciepło właściwe)

mechanizmy przekazu ciepła:
przewodzenie (prawo Fouriera)
konwekcja (prawo Newtona)
promieniowanie (p. Stefana-Boltzmanna)



1) Promieniowanie

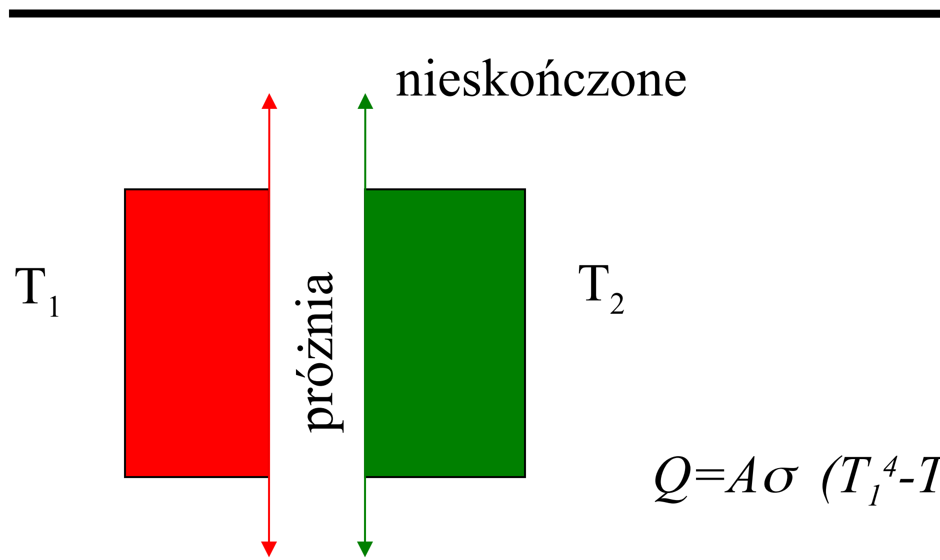
Ciało doskonale czarne (wsp. odbicia 0)



Prawo Wiena: $\lambda_{max}T=const$

Prawo Stefana:Boltzmana

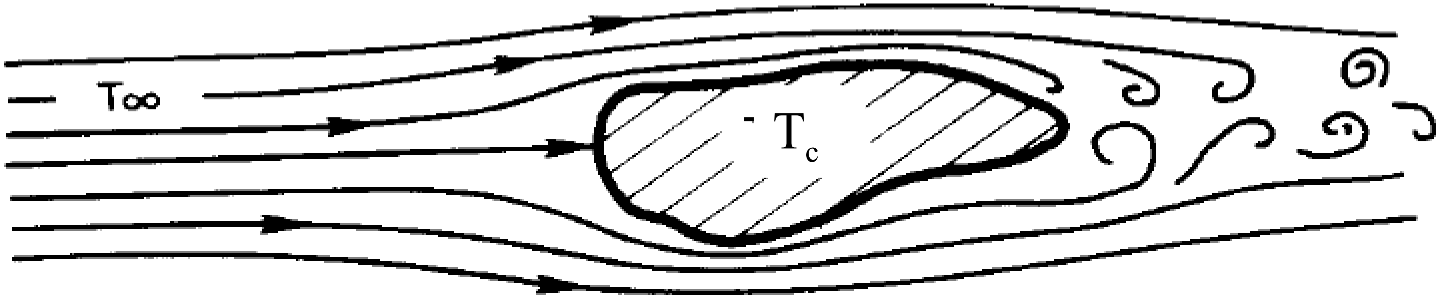
$$\int e_\lambda(T)d\lambda = \sigma T^4$$



$Q=A\sigma\ (T_1^4-T_2^4)$

dwa ośrodki potrafią wymieniać energię przez promieniowanie nawet gdy próżnia między nimi

2) Konwekcja (unoszenie ciepła)



Ciepło z ciała do otoczenia: przewodzone do warstwy granicznej, następnie unoszone przez ośrodek zewnętrzny

Prawo chłodzenia Newtona [transfer ciepła proporcjonalny do *ΔT*]

$$\frac{Q}{A} \equiv q = h(T_c - T_\infty)$$

Współczynnik transferu ciepła. Zazwyczaj *h(ΔT),* również funkcja prędkości płynu opływającego ciało

Strumień ciepła
J/sm^2

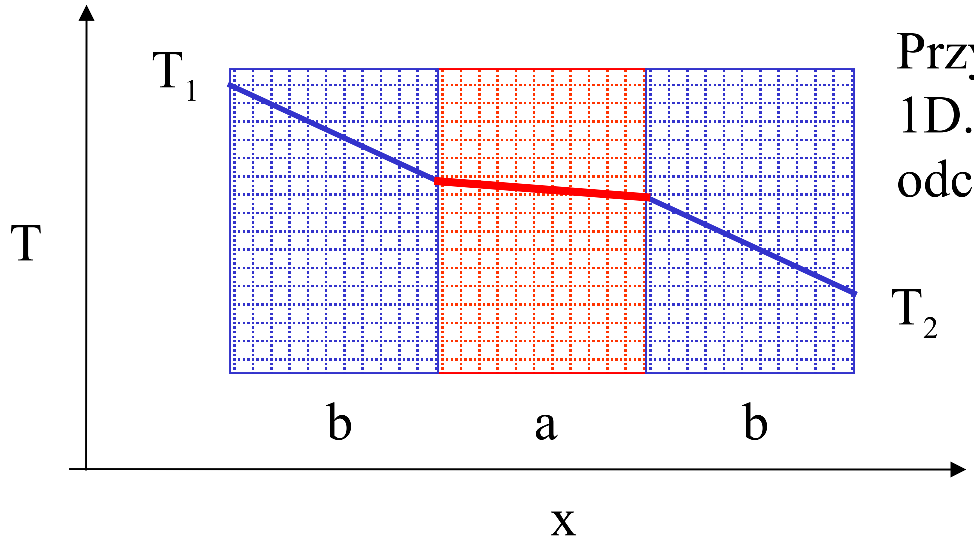
3) przewodzenie (dyfuzja)

Prawo Fouriera:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$

Strumień ciepła proporcjonalny i skierowany przeciwnie do gradientu temperatur

W ogólnym przypadku: przewodność cieplna $k = k\,[\mathbf{r},T]$.
Stała materiałowa:



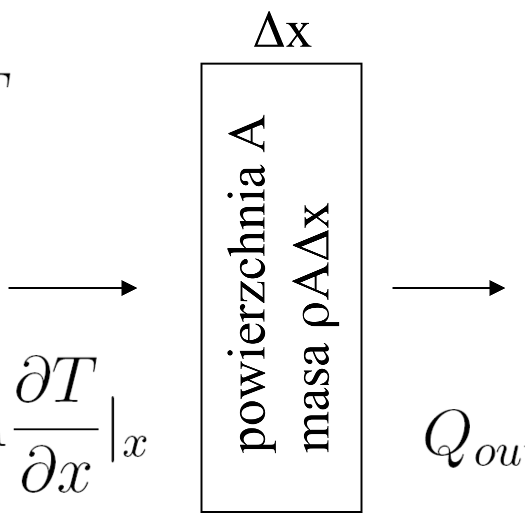
Przypadek stacjonarny (q=*const*) 1D. Temperatura od (x) = odcinkami liniowa przy braku źródeł.

$$k_a > k_b$$

Faktycznie dla każdej substancji k zależy od T, my będziemy pracować w powszechnie używanym przybliżeniu $k=\langle k\rangle \neq k(T)$ (punkt pracy)

Równanie przewodnictwa cieplnego 1D, k=const

$$\mathbf{q} = -k\nabla T$$



$$Q_{in} = -kA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x} \qquad Q_{out} = -kA\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+\Delta x}$$

Wypadkowy strumień ciepła <u>emitowany</u> przez element materiału:

$$Q = Q_{out} - Q_{in} = -kA\frac{\frac{\partial T}{\partial x}\big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial T}{\partial x}\big|_{x}}{\Delta x}\Delta x$$

W granicy $\Delta x \to 0$

$$Q = -kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Delta x = -\frac{dU}{dt}$$

Równanie przewodnictwa cieplnego (dyfuzji ciepła) 1D, k=const

$$Q = -kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Delta x = -\frac{dU}{dt}$$

Układ nie wykonuje pracy, wtedy

$$\frac{dU}{dt} = mc\frac{\partial T}{\partial t} = \rho A \Delta x c\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

$$\alpha \equiv \frac{k}{\rho c}[m^2/s]$$

---

wniosek: równanie dyfuzji ciepła – wynik prawa Fouriera i I-szej zasady termodynamiki

dla dyfuzji materii - inaczej - z równania ciągłości (z równania zachowania materii)

dyfuzja dla materii:
z równania ciągłości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

unoszenie:

$$\mathbf{j} = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t}) + \nabla \cdot [\rho(\mathbf{r}, \mathbf{t})\mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0$$

równanie adwekcji

prąd związany z wyrównywaniem stężeń (prawo Ficka – odpowiednik Fouriera
masa *temperatura*)

$$\mathbf{j} = -k(\mathbf{r})\nabla\rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot [k\nabla\rho(r, t)] = 0$$

równanie dyfuzji

$$\mathbf{j} = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}) - k(\mathbf{r})\nabla\rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(r, t)\mathbf{v}(r) - k\nabla\rho(r, t)] = 0$$

r. adwekcji - dyfuzji

Równanie przewodnictwa cieplnego (dyfuzji ciepła) 1D, k=const

$$Q = -kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Delta x = -\frac{dU}{dt}$$

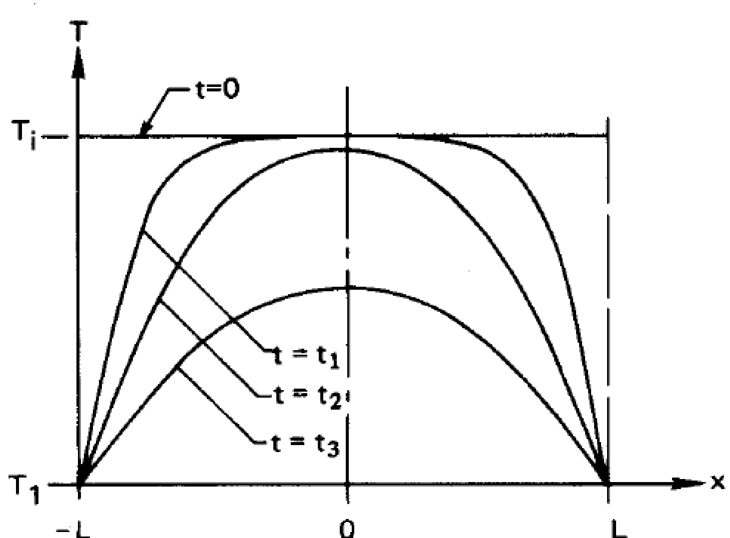
Układ nie wykonuje pracy, wtedy

$$\frac{dU}{dt} = mc\frac{\partial T}{\partial t} = \rho A \Delta x c\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

$$\alpha \equiv \frac{k}{\rho c}[m^2/s]$$

Problem chłodzenia w 1D (dla którego Fourier wprowadził swój szereg)



W chwili początkowej
ciało ma temperaturę T_i
$T(x,t=0)=T_i$
Następnie umieszczone
w kąpieli o temperaturze T_1
$T(x=0)=T(x=1)=T_1$
Jak przebiegnie chłodzenie jako funkcja (x,t) ?

Problem chłodzenia w 1D

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x, t = 0) = 1$$
$$T(0, t) = T(1, t) = 0$$

Metoda separacji zmiennych:
Szukamy szczególnych rozwiązań postaci: *T(x,t)=C(t)X(x)*

$$\frac{1}{\alpha C}\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda$$

Część przestrzenna:

$$X'' = -\lambda X$$

(równanie własne)

z $X(0)=X(1)=0$

$$X_n = \sin(n\pi x)$$

$$\lambda = \lambda_n = (n\pi)^2$$

$$X_n = \sin(n\pi x) \qquad \lambda = \lambda_n = (n\pi)^2$$

Część czasowa

$$\frac{1}{\alpha C_n}\frac{\partial C_n}{\partial t} = -(n\pi)^2$$

(też własne, ale pierwszego rzędu)

$$C_n(t) = \exp(-\alpha(n\pi)^2 t)$$

$T_n(x,t)=C_n(t)X_n(x)$

Rozwiązanie ogólne:

$$T(x,t) = \sum_n a_n \exp(-\alpha(n\pi)^2 t)\sin(n\pi x)$$

a_n dobrane tak aby spełniony był warunek początkowy

a_n dobrane tak aby spełniony był warunek początkowy

$$T(x,t) = \sum_n a_n \exp(-\alpha(n\pi)^2 t)\sin(n\pi x)$$

$$T(x,t=0) = \sum_n a_n \sin(n\pi x)\Big| \times \sin(m\pi x)\int_0^1 dx$$

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = \frac{1}{2}\delta_{mn}$$

$$a_n = 2\int_0^1 T(x,t=0)\sin(n\pi x)dx$$

Dla T(x,t=0)=1: $$a_n = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} \text{ n nieparzyste} \\ 0 \text{ n parzyste} \end{cases}$$

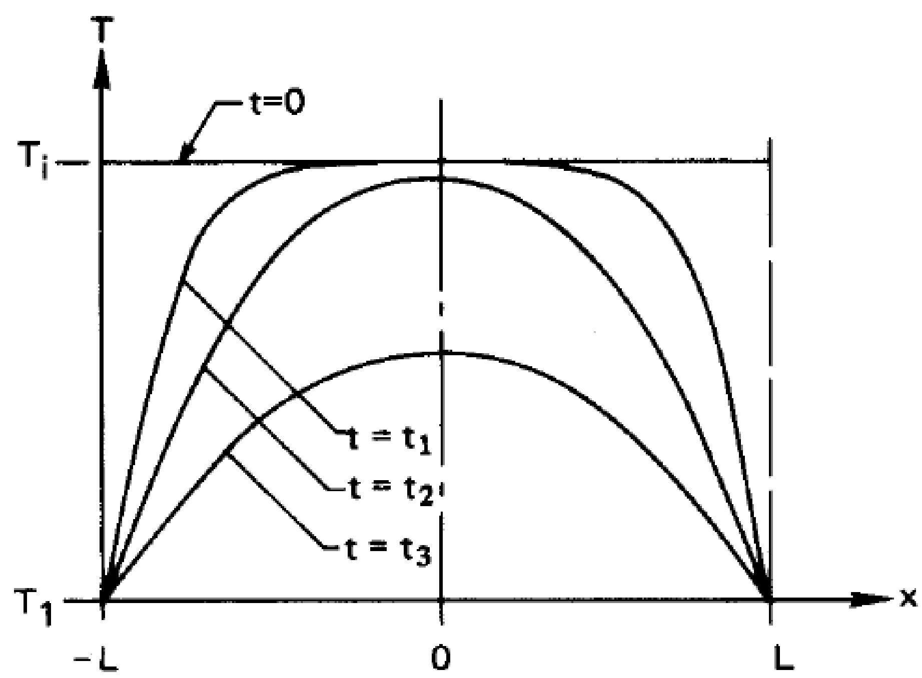
$$T(x,t) = \sum_k \frac{4}{(2k+1)\pi}\exp\left[-\alpha((2k+1)\pi)^2 t\right]\sin((2k+1)\pi x)$$

tempo stygnięcia $\longrightarrow \alpha \equiv \frac{k}{\rho c}[m^2/s]$

$$T(x,t) = \sum_n a_n \exp(-\alpha(n\pi)^2 t)\sin(n\pi x)$$

niezależnie od startu
rozkład *T* po pewnym czasie
będzie miał kształt sin*(x)*

Wszystkie gwałtowne zmiany przestrzenne zostaną szybko wygładzone



$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

zmiana oznaczeń na bardziej typowe dla równania dyfuzji

metoda Eulera: $$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$$

[przedni czasowy, centralny przestrzenny]

1) dla równania adwekcji schemat z przednim ilorazem czasowym i centralnym ilorazem pierwszej pochodnej był bezwzględnie niestabilny
2) pokazaliśmy, że numeryczna dyfuzja stabilizuje schematy jednopoziomowe
3) dla równania adwekcji schemat Eulera nie zawierał numerycznej dyfuzji i właśnie dlatego był niestabilny
4) teraz dyfuzja jest rzeczywista (nie numeryczna)
   podejrzewamy, że schemat ma szanse na bezwzględną stabilność

   ... sprawdźmy

analiza von Neumana metody Eulera dla równania dyfuzji

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

metoda Eulera: $u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$

$$u_j^n = \sum_k A_k^n \exp(ikj\Delta x)$$

$$A_k^{n+1} = A_k^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x) - 2\right)A_k^n$$

Współczynnik
wzmocnienia modu *k*

$$M_k = 1 + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x) - 2\right)$$

$$M_k = 1 + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(\exp(ik\Delta x) + \exp(-ik\Delta x) - 2\right)$$

$$M_k = 1 - \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}\left(1 - \cos(k\Delta x)\right)$$

warunek stabilności $|M_k| \leq 1$

$$-1 \leq 1 - \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos(k\Delta x)) \leq 1$$

$$-2 \leq -\frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}(1 - \cos(k\Delta x)) \leq 0$$

$$0 \leq \frac{2D\Delta t}{\Delta x^2}\underline{(1 - \cos(k\Delta x))} \leq 2$$

$0 \leq$ (1-cos) ≤ 2

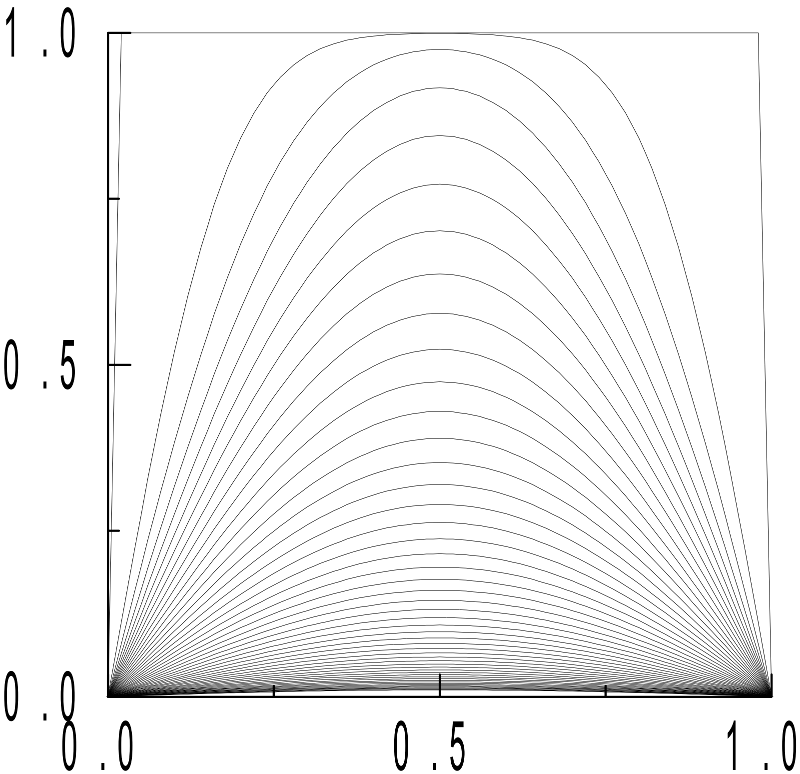
Euler bezwzględnie stabilny jeśli:

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}}$$

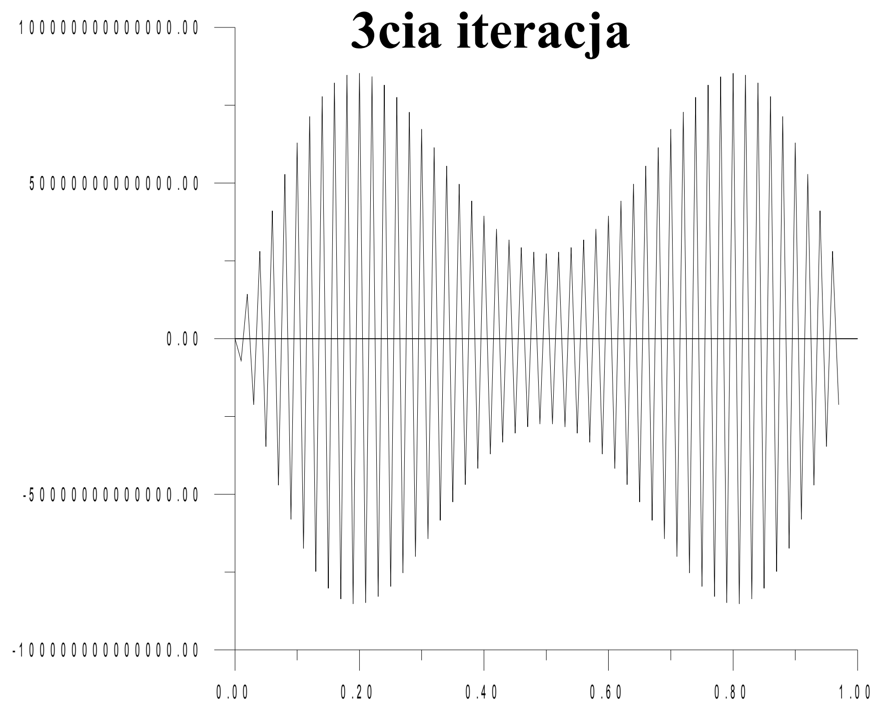
Krok czasowy a stabilność schematu Eulera

$$\Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2D}$$ Δx=0.01, D=1

$\Delta t=(0.01)^2/2$



$\Delta t=(0.01)^2/1.9$



$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}$$

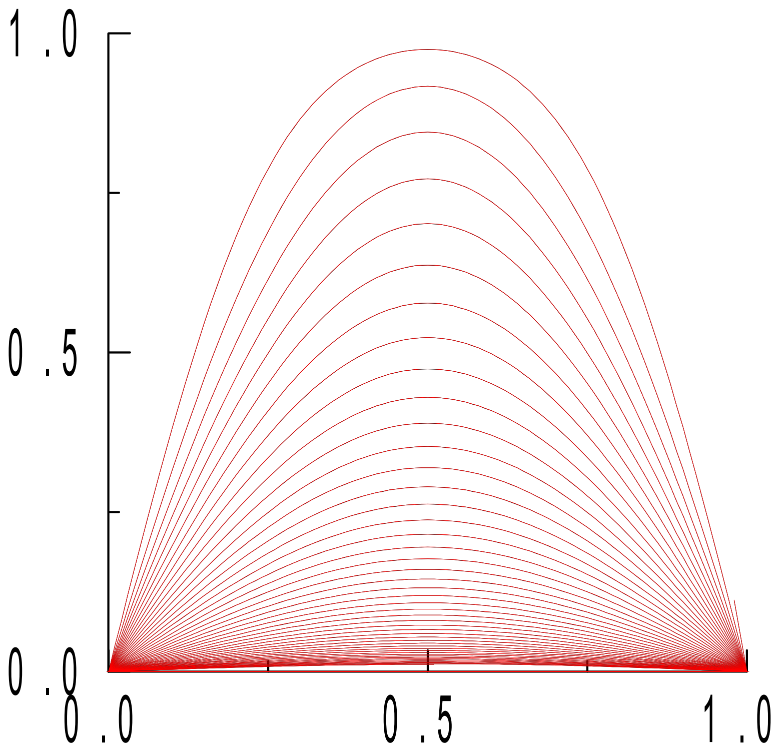
Uwaga:

1) dla krytycznego kroku czasowego schemat spełnia zasadę maximum (wystarczającą dla stabilności)

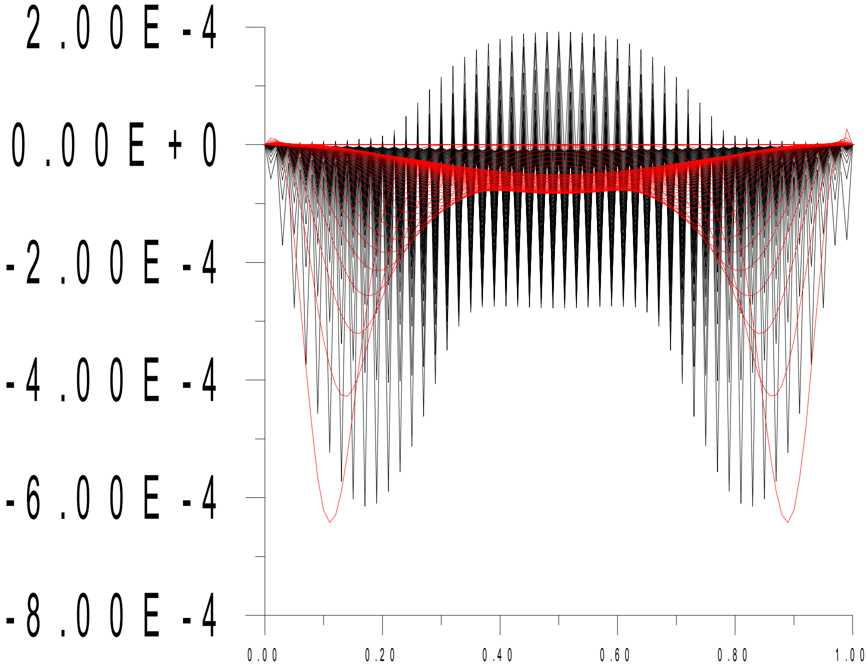
2) dla granicznego Δt u_j^n znika z prawej strony, a dla większego Δt **zmienia znak z każdą iteracją** (co jest źródłem niestabilności)

Dokładność Eulera dla równania dyfuzji

Metoda Eulera i wynik dokładny
dla kroku granicznego:



Czarne: błąd z Δt krytycznym
czerwone = z 10 –krotnie mniejszym



Wniosek: krytyczny Δt jest wystarczająco mały
aby liczyć z większym krokiem → schematy niejawne

liczba charakterystyczna dla stabilności schematu:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \underbrace{\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}}_{r}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$$

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D} \longrightarrow \boxed{0 \leq r \leq 1/2}$$

odpowiednik liczby Couranta $\alpha = \frac{vdt}{dx}$

np.. warunek stabilności schematu *upwind* $0 \leq \alpha \leq 1$ wynikał z kryterium CFL i tw. Laxa

jak wygląda kryterium CFL dla równania dyfuzji??

fizyczna a numeryczna przeszłość punktu w równaniu dyfuzji ?

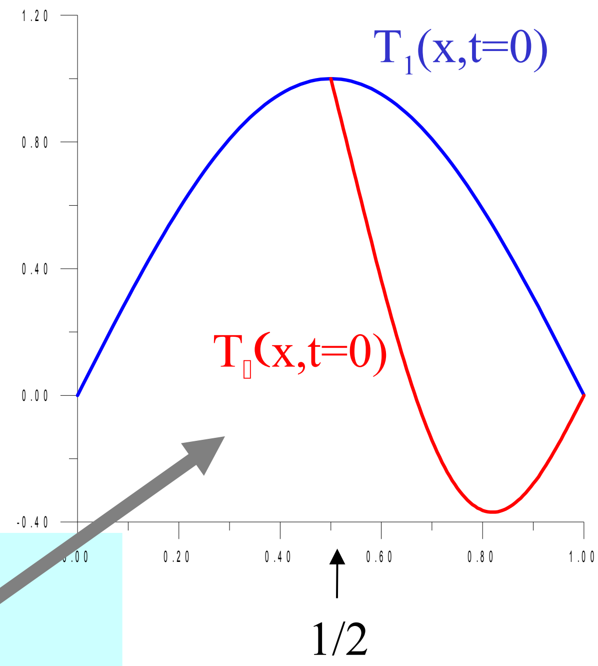
dla równania adwekcji : przeszłość fizyczna P = punkty leżące na charakterystyce

fizyczna domena zależności w równaniu dyfuzji ?

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$T(x,t) = \sum_n a_n \exp(-\alpha(n\pi)^2 t)\sin(n\pi x)$$

$$a_n = 2\int_0^1 T(x,t=0)\sin(n\pi x)dx$$



użyjemy T(0,t)=T(1,t)=0

Dla x=0: rozważmy dwa warunki początkowe

1) $T_1(x,t=0)= \sin(\pi x)$: rozwiązanie: $T(x,t)=\sin(\pi x)\exp(-\alpha\pi^2 t)$

2) T▯(x,t=0)= $\sin(\pi x)$ dla $x<1/2$

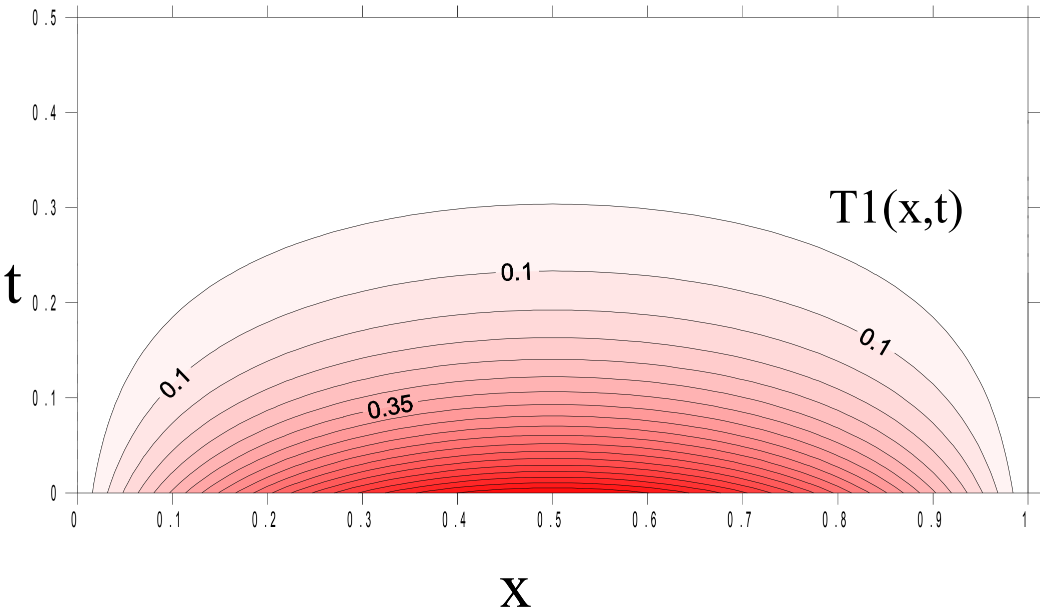
$=\sin(\pi x) + \sin(2\pi x)$ dla $x>1/2$

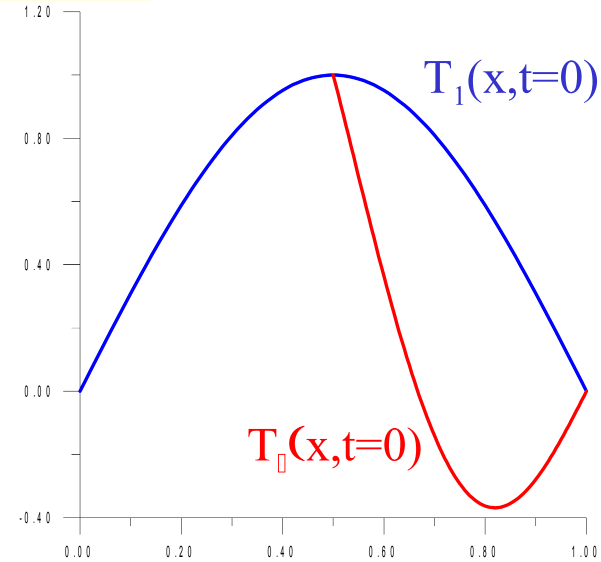
$$T_2(x,t) = T_1(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(-\alpha(k\pi)^2 t)\sin(k\pi x)$$

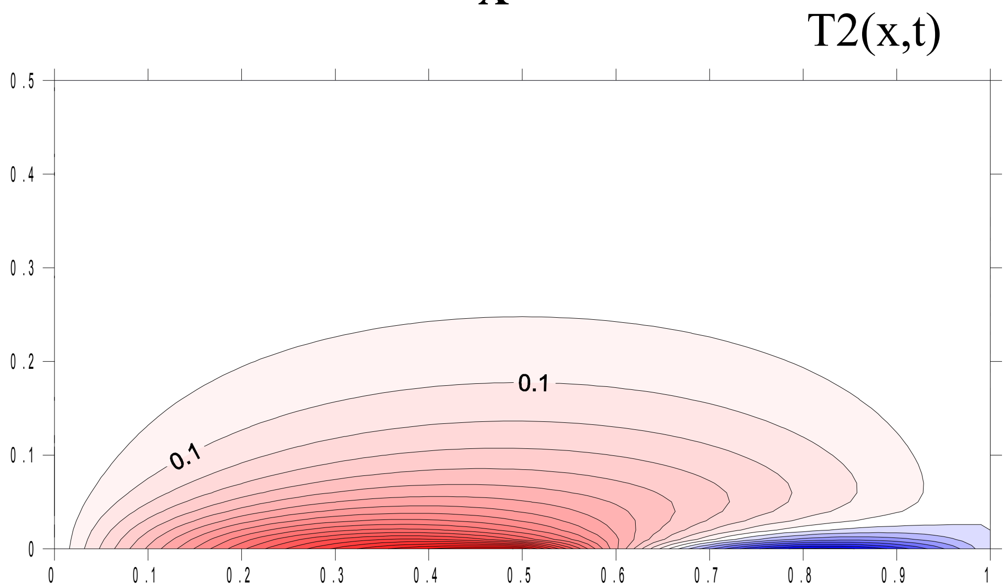
$$b_k = 2\int_{1/2}^1 \sin(2\pi x)\sin(k\pi x)dx \longrightarrow$$

$b_1= -4/3\pi$, $b_2=1/2$, $b_k=4\sin(\pi k/2)/\pi\,(k^2-4)$

fizyczna domena zależności w równaniu dyfuzji ?





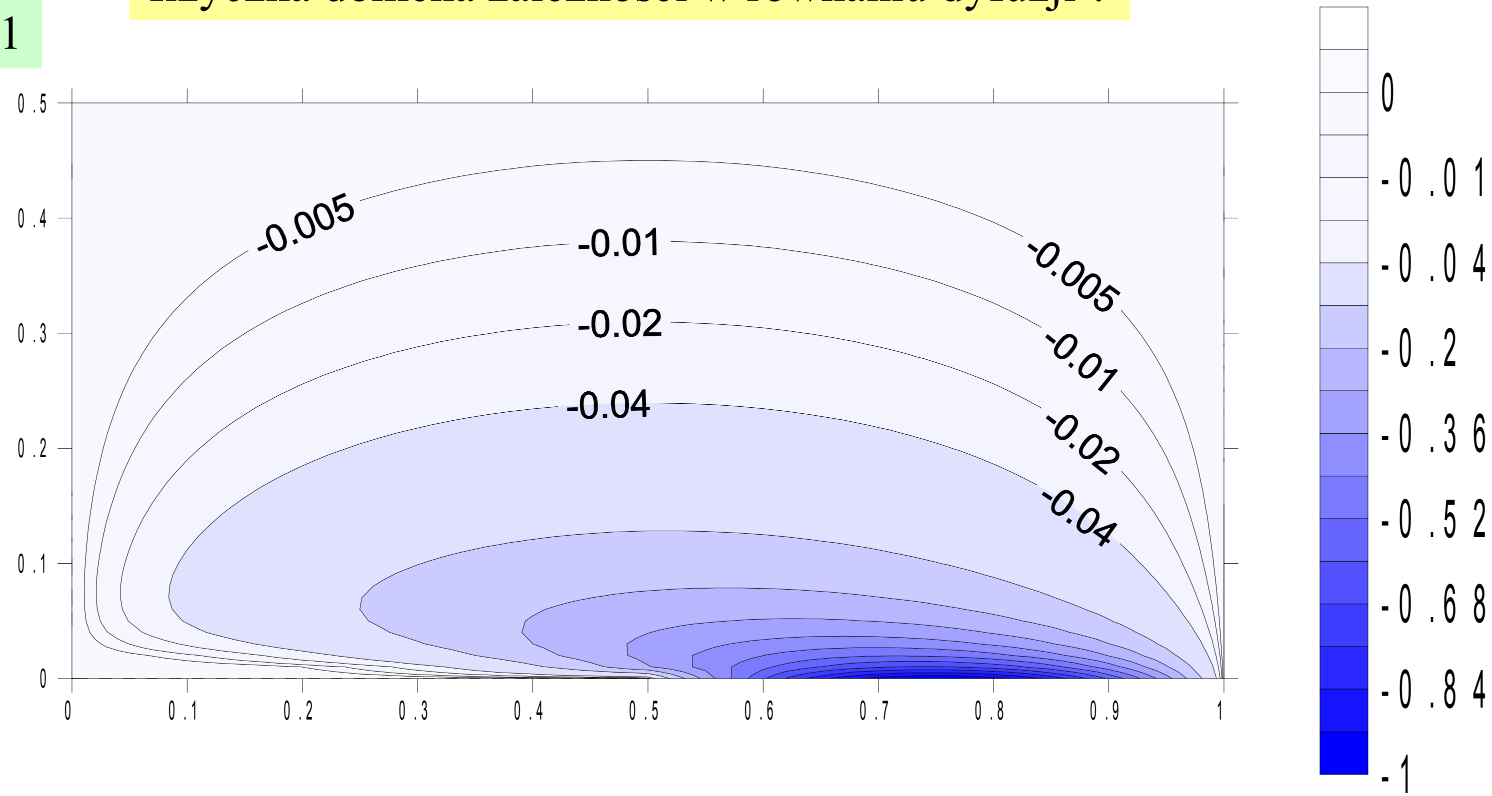


pytanie:
Po jakim czasie punkty
na lewo od x=0.5
poczują, że warunek początkowy
po prawej stronie pudła
jest inny?

inaczej: czy punkt x=0.5,t=0
należy do domeny zależności
punktu x=0.1, t=dt, gdzie dt-małe? ?

fizyczna domena zależności w równaniu dyfuzji ?

T2-T1



im bardziej zagęścimy poziomice
tym bliżej pojawią się osi t=0

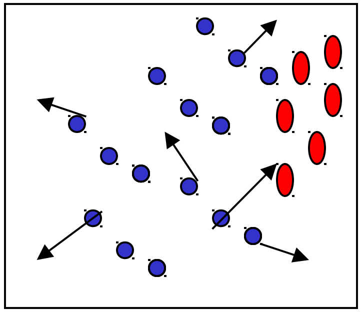
wniosek: w równaniu dyfuzji
pewien (niewielki) wpływ
na rozwiązanie w *każdym* punkcie np. x=0.1
ma warunek początkowy zadany dla
x>1/2. To co jest na prawej stronie
pudła na lewą przenosi się *natychmiast dla t>0*

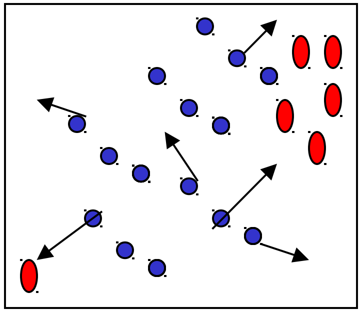
dla równania dyfuzji : fizyczna domena zależności punktu to cała połowa czasoprzestrzeni!

dla równania dyfuzji : fizyczna domena zależności punktu to cała połowa czasoprzestrzeni!
ilustracja

drobiny pyłu (czerwone kropy) w cieczy (cząstki H_20– niebieskie kropki).

W chwili początkowej cały pył jest zlokalizowany w jednym z narożników.
Średnia koncentracja pyłu– opisywalna równaniem dyfuzji.
Ruch pojedynczej cząstki pyłu przypadkowy (ruchy Browna)





Istnieje <u>małe lecz niezerowe</u> prawdopodobieństwo, że jedna z drobin
znajdzie się niemal natychmiast w przeciwległym narożniku
w wyniku szczęśliwego zbiegu okoliczności
(zostanie popchnięta kolejno przez wiele cząsteczek wody)

dla równania dyfuzji : fizyczna domena zależności punktu to cała połowa czasoprzestrzeni!

dla równania dyfuzji : fizyczna domena zależności punktu to cała połowa czasoprzestrzeni!

Ale, ale –
Mówiliśmy, że schemat Eulera jest stabilny (czyli musi być zbieżny [tw. Laxa])

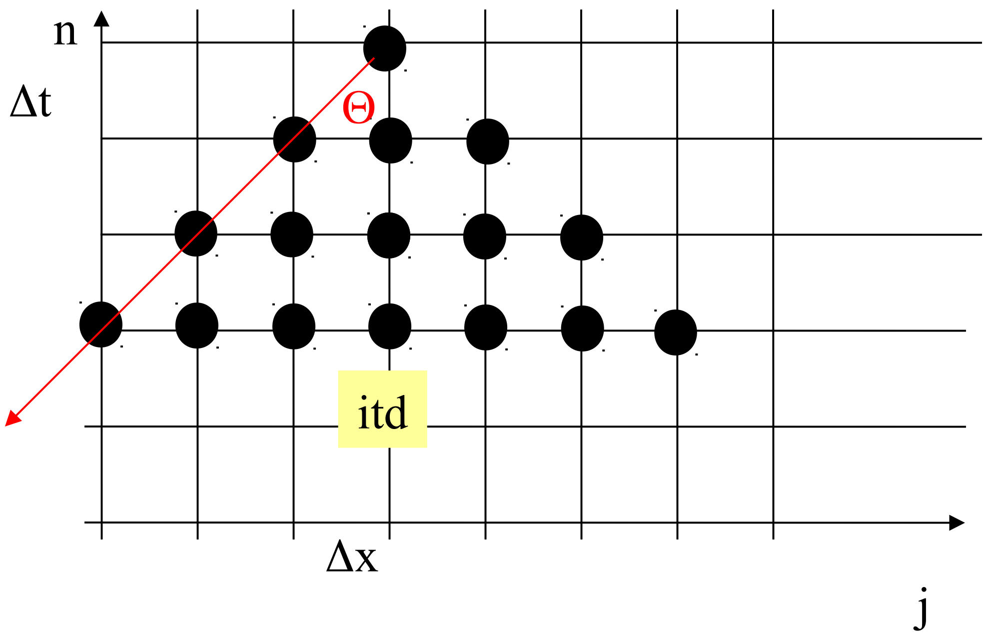
Pamiętamy, że przeszłość numeryczna punktu w Eulerze jawnym
to stożek (trójkąt 1D) a nie półpłaszczyzna?

A warunek konieczny zbieżności CFL?

zgodnie z CFL WK zbieżności jest aby numeryczna domena zależności zawierała fizyczną numeryczną. domena zależności dla równania dyfuzji ze schematem Eulera ?

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \underbrace{\frac{D\Delta t}{\Delta x^2}}_{r} \left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$$

w.stab.Eulera $0 \leq r \leq 1/2$



przeszłość trójkąt o połowie kąta rozwarcia Θ=arctan(Δx/Δt)

<u>trzymajmy *r=DΔt/Δx²* zafiksowane</u> zmniejszając jednocześnie obydwa kroki <u>*Δt,Δx*</u>

Θ=arctan(D/r Δx) gdy Δx → 0 : kąt dąży do π/2 – obejmuje całą przeszłość

CFL spełnione (WK), dla stabilności potrzeba jednak aby r nie było większe od ½

Niejawny wsteczny schemat Eulera

metoda Eulera: $$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$$

pochodna przestrzenna liczona w *n*-tym kroku czasowym
(gdy *u* znane)

... dla stabilności potrzeba jednak aby $r = D\Delta t/\Delta x^2 \leq ½$
Czytać: jako ograniczenie na krok czasowy

wsteczna metoda Eulera:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}\right)$$

pochodna przestrzenna liczona w *n+1*-szym kroku czasowym
(gdy *u* jeszcze nieznane).
Metoda niejawna, konieczne rozwiązanie
układu równań liniowych na (*n+1*) krok czasowy.

$$-\gamma u_{j-1}^{n+1} + (1+2\gamma)u_j^{n+1} - \gamma u_{j+1}^{n+1} = u_j^n$$

$$\boxed{r = \gamma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}}$$

$$\begin{pmatrix} (1+2\gamma) & -\gamma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma & (1+2\gamma) & -\gamma \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\gamma & (1+2\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \dots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \dots \\ u_{N-2}^n \\ u_{N-1}^n \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

Co z warunkami brzegowymi $u_0=u_N=0$?

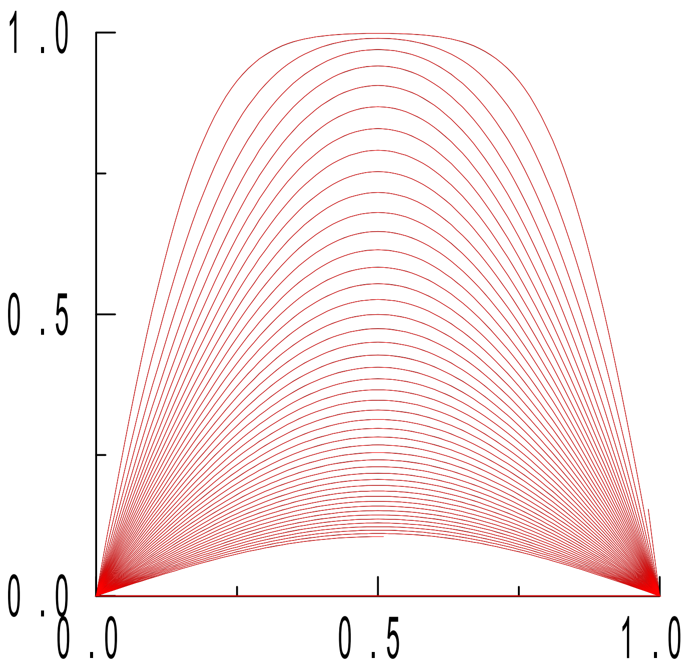
$$-\gamma u_{j-1}^{n+1} + (1+2\gamma)u_j^{n+1} - \gamma u_{j+1}^{n+1} = u_j^n$$

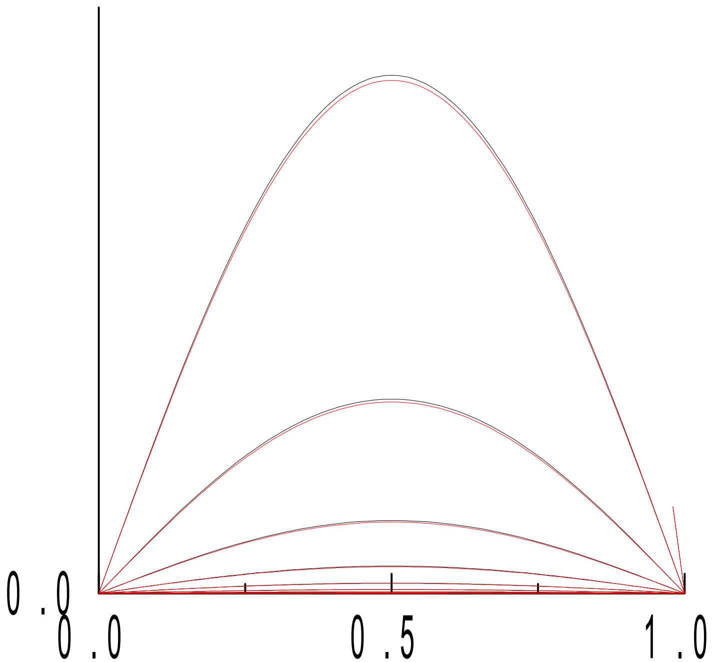
one są zapisane w pierwszym i ostatnim wierszu równania
- zobaczyć

Stabilność wstecznego schematu Eulera

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2D} \times \frac{2}{1.9}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{2D} \times 10$$





Czerwone dokładne
Czarne wsteczny Euler

Zachodzi podejrzenie, że wsteczny Euler jest stabilny dla dowolnego kroku czasowego - sprawdźmy

Stabilność wstecznego Eulera dla równania przewodnictwa cieplnego

$$-\gamma u_{j-1}^{n+1} + (1+2\gamma)u_{j-1}^{n+1} - \gamma u_{j+1}^{n+1} = u_j^n$$

$$\boxed{\text{r} = \ \gamma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}}$$

analiza von Neumanna daje
kryterium stabilności:

M_k

$$\left|\frac{1}{[-\gamma\exp(-ik\Delta x) + (1+2\gamma) - \gamma\exp(ik\Delta x)]}\right| \leq 1$$

$$|-\gamma\exp(-ik\Delta x) + (1+2\gamma) - \gamma\exp(ik\Delta x)| \geq 1$$

Stabilność wstecznego Eulera dla równania przewodnictwa cieplnego

$$|-\gamma \exp(-ik\Delta x) + (1+2\gamma) - \gamma \exp(ik\Delta x)| \geq 1$$

$$|(1+2\gamma) - 2\gamma \cos(k\Delta x)| \geq 1$$

$$\underline{1 + 2\gamma(1-\cos(k\Delta x)) \geq 1} \text{ lub } \leq -1$$

To pierwsze zawsze prawdziwe

r = $\gamma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$

Wsteczny Euler = bezwarunkowo stabilny

Obydwa Eulery - pierwszy rząd dokładności czasowej [błąd dyskretyzacji rzędu pierwszego, błąd lokalny drugiego]

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}\right)$$

Poprawić schemat mieszając metody

Euler:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$$

CN:

$$y(t+\Delta t) = y(t) + \frac{\Delta t}{2}\left(f(t) + f(t+\Delta t)\right) + O(\Delta t^3)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{D\Delta t}{2\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n\right)$$

Do układu równań:

r = $\gamma = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$

$$-\frac{\gamma}{2}u_{j-1}^{n+1} + (1+\gamma)u_j^{n+1} - \frac{\gamma}{2}u_{j+1}^{n+1} = \frac{\gamma}{2}u_{j-1}^n + (1-\gamma)u_j^n + \frac{\gamma}{2}u_{j+1}^n$$

$$-\frac{\gamma}{2}u_{j-1}^{n+1} + (1+\gamma)u_j^{n+1} - \frac{\gamma}{2}u_{j+1}^{n+1} = \frac{\gamma}{2}u_{j-1}^{n} + (1-\gamma)u_j^{n} + \frac{\gamma}{2}u_{j+1}^{n}$$

$$\begin{pmatrix} (1+\gamma) & -\gamma/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma/2 & (1+\gamma) & -\gamma/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma/2 & (1+\gamma) & -\gamma/2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma/2 & (1+\gamma) & -\gamma/2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\gamma/2 & (1+\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \dots \\ u_{N-2}^{n+1} \\ u_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (1-\gamma) & \gamma/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \gamma/2 & (1-\gamma) & \gamma/2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma/2 & (1-\gamma) & \gamma/2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma/2 & (1-\gamma) & \gamma/2 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \gamma/2 & (1-\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ u_3^{n} \\ \dots \\ u_{N-2}^{n} \\ u_{N-1}^{n} \end{pmatrix}$$

współczynnik przewodności zależny od położenia

$$\boxed{\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}}$$

źródło ciepła

gęstość i ciepło właściwe
zależne od położenia

Kilka własności równania

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

W jednym kawałku materiału (k=*const*), w stanie ustalonym

$$\nabla^2 T = -\frac{\dot{q}}{k} \longleftarrow$$ r. Poissona,

stan ustalony w układzie jednorodnym w dwóch kierunkach y,z

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} = -\frac{\dot{q}}{k}$$

$$T = -\frac{\dot{q}}{2k} x^2 + Cx + D$$

C, D – z warunków brzegowych

1D + brak źródeł ciepła = T liniowe od brzegu do brzegu

Warunki brzegowe na kontakcie 2 materiałów

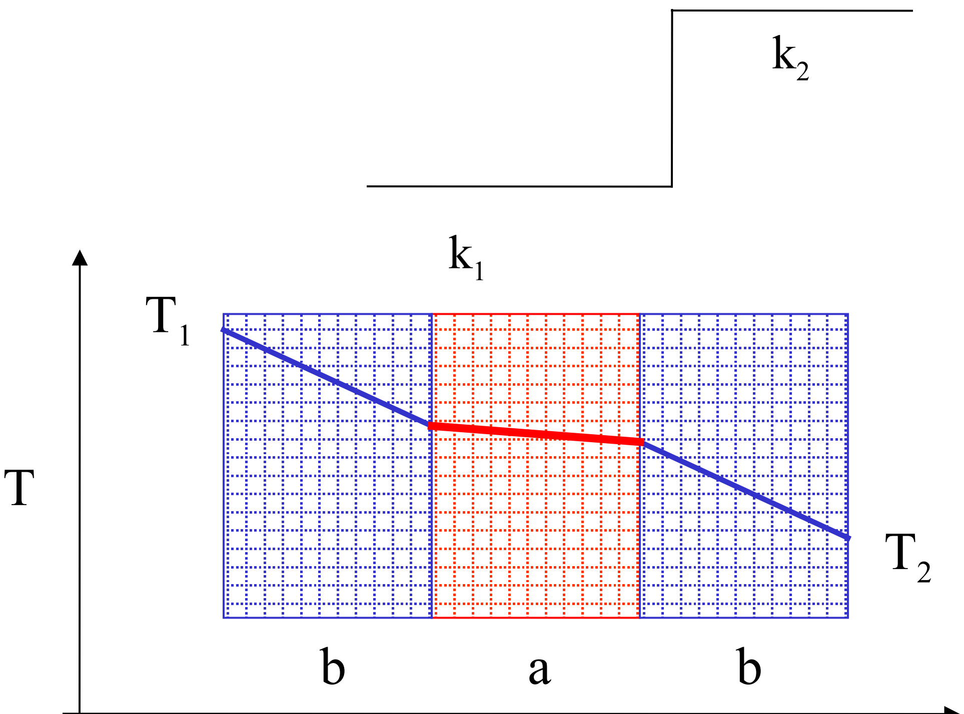
$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

w stanie ustalonym, różnice w gęstości i cieple właściwym nie mają znaczenia ważny tylko *k*, w 1D:

$$\frac{dk}{dx}\frac{dT}{dx} + k(x)\frac{d^2T}{dx^2} = -\dot{q}$$

---

kontakt dwóch materiałów



Ciągłość *q*:

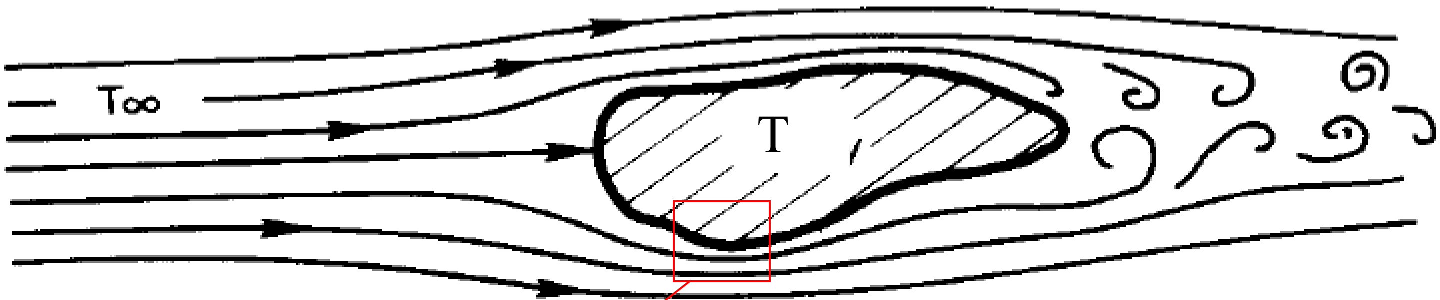
$$k_1 \frac{dT}{dx} = k_2 \frac{dT}{dx}$$

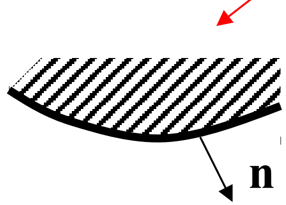
Z lewej

Z prawej

ogólnie: pochodne normalne do powierzchni kontaktów

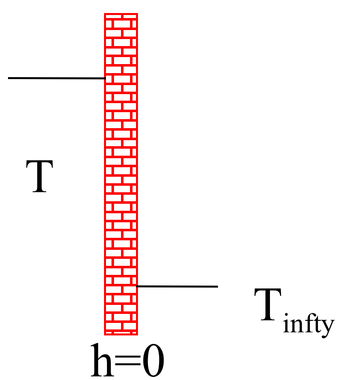
Konwekcyjne warunki brzegowe

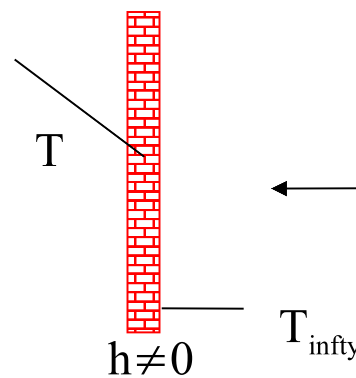




$q_{konwekcji} = q_{przewodzenia\ na\ powierzchni}$

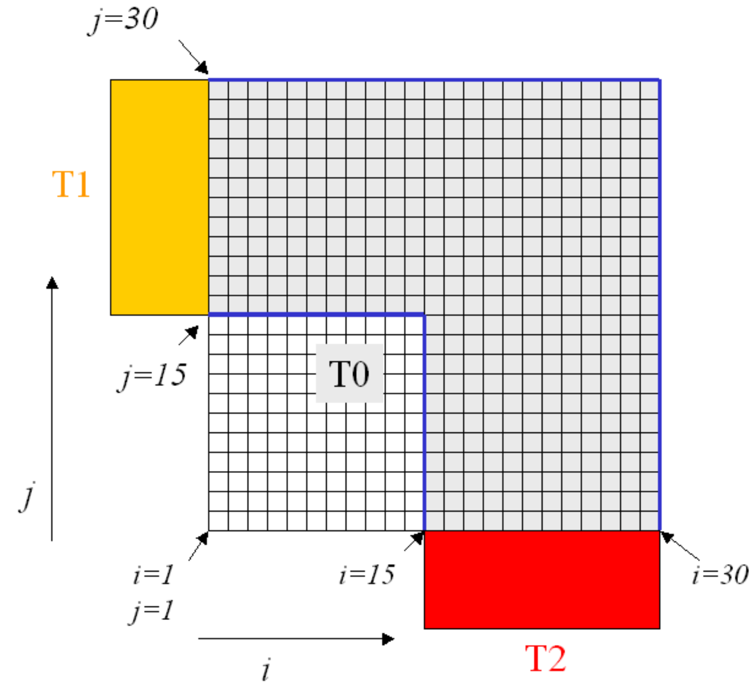
$$h(T - T_\infty) = -k\frac{\partial T}{\partial n}$$





latem może być
na odwrót

2D



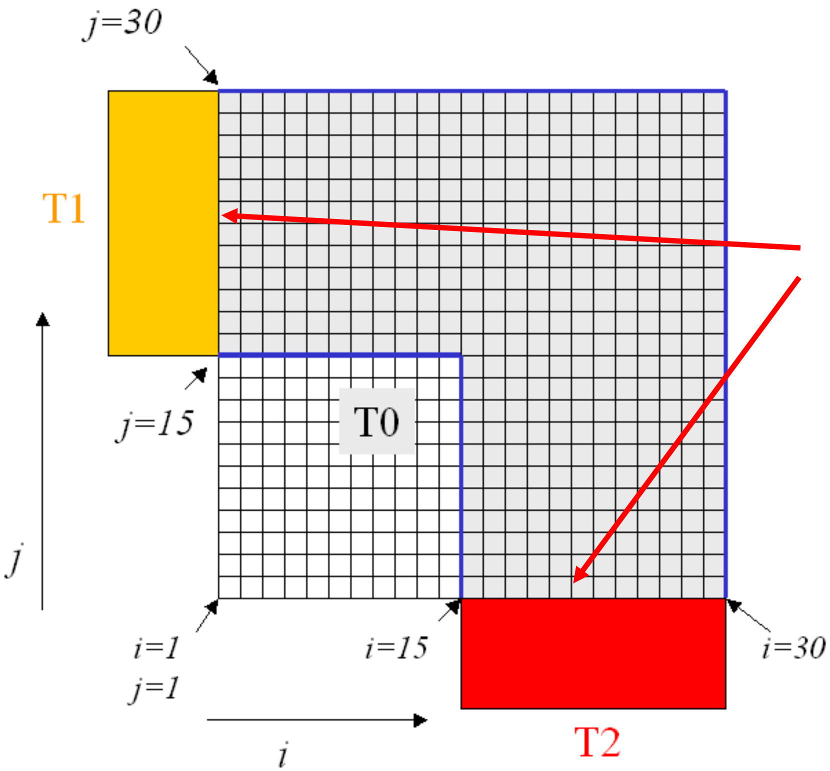
$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

jeden materiał:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\dot{q}}{\rho c} + \frac{k}{\rho c} \nabla^2 T$$

Cranck-Nicholson 2D: laplasjan rozpisany na n-ty i n+1 szy krok czasowy

$$T_{ij}^{n+1} = T_{ij}^{n} + \Delta t \frac{\dot{q}_{ij}^{n}}{\rho c} + \underbrace{\Delta t \frac{k}{2\rho c \Delta^2}}_{\gamma} \Big(T_{i+1,j}^{n} + T_{i-1,j}^{n} - 2T_{ij}^{n} + T_{i,j+1}^{n} + T_{i,j-1}^{n} - 2T_{ij}^{n}$$
$$+ T_{i+1,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{ij}^{n+1} \Big)$$



na ścianach wewnętrznych budynku zadajemy $T=T_{bc}$

(podobnie dla „zmarnowanej” ćwiartki poza budynkiem)

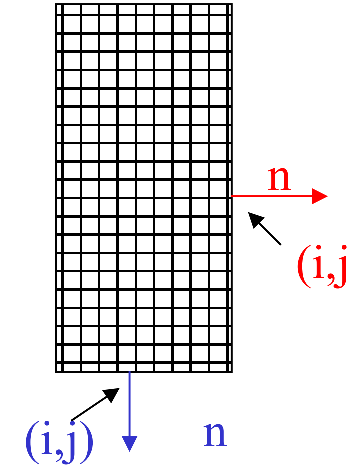
$$\mathbf{AT^{n+1}=BT^{n}+c}$$

$$T_l = T_{bc}$$

w *l* tym wierszu A dajemy jedynkę na diagonali, poza tym zera
cały *l*-ty wiersz B dajemy zero, a $b_l=T_{bc}$

Na krawędzi budynku
konwekcyjne wb.

$$h(T - T_o) = -k\frac{\partial T}{\partial n}$$



(i,j) na prawej krawędzi:

$$h(T_{ij} - T_o) = -k\frac{T_{ij} - T_{i-1,j}}{\Delta x}$$

$$(h + \frac{k}{\Delta x})T_{ij} - \frac{k}{\Delta x}T_{i-1,j} = hT_o$$

w *l*-tym wierszu A
tylko diagonala
i poddiagonala

T_{ij} wyliczane z tego równania zamiast WB

(i,j) dolna krawędź:

$$h(T_{ij} - T_o) = -k\frac{T_{ij} - T_{i,j+1}}{\Delta y}$$

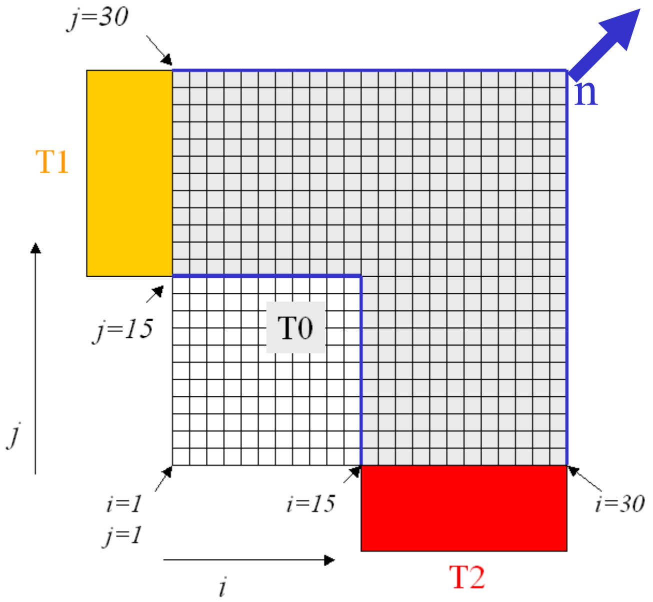
$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$(h + \frac{k}{\Delta x})T_{ij} - \frac{k}{\Delta x}T_{i,j+1} = hT_o$$

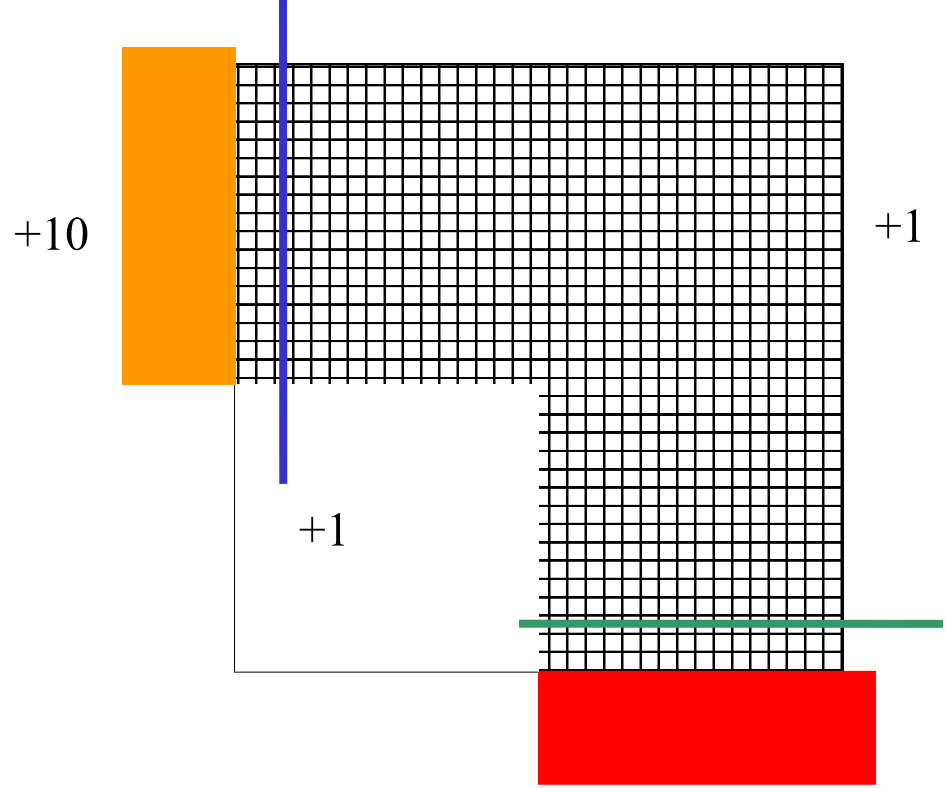
konwekcyjny warunek brzegowy na narożnikach:

$$h(T - T_o) = -k\frac{\partial T}{\partial n}$$

$$h(T_{ij} - T_o) = -k\frac{T_{ij} - T_{i-1,j-1}}{\sqrt{2}\Delta x}$$



1-szy rachunek
doskonale izolowane
ściany zewnętrzne:

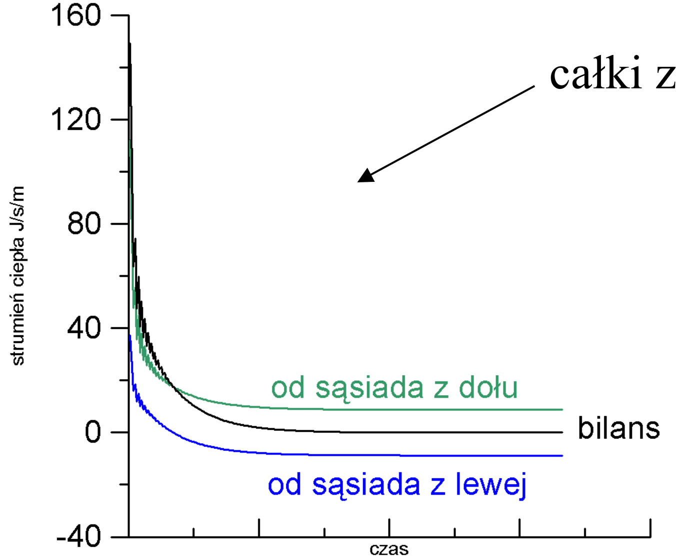


w chwili początkowej
pomieszczenie w temp +1

Wstawić raz.gif

+30

całki z –k grad T



(musi wyjść na zero)
pomarańczowy najpierw oddaje ciepło
potem odbiera

2 rachunek

ściany zewnętrzne nie są idealnymi izolatorami:

dwa.gif

3. rachunek
okna h=0.5
sciany h=0.01

trzy.gif

4 rachunek
grzejnik q=10

cztery.gif

5 rachunek: 3 grzejniki z otwieraniem okien
i wyłączeniem ogrzewania

piec.gif

siedem.gif : T1=T2=10, T0=30