Równania różniczkowe: poza metodę różnic skończonych
- rozwiązania w bazie funkcyjnej

Plan:

metoda kolokacji

metoda najmniejszych kwadratów

metoda Galerkina

formalizm reszt ważonych

do metody elementów skończonych

metoda wariacyjna Reyleigha-Ritza

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

u(-1)=0
u(1)=0

---

poszukujemy rozwiązania w bazie analitycznie zadanych funkcji

!

$$u(x) \simeq v(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x)$$

funkcje bazowe [trafny wybór: dobre przybliżenie przy minimalnym N]

wybór bazy: zawęża przestrzeń poszukiwań optymalnego rozwiązania

optymalne rozwiązanie znaczy optymalne współczynniki c_i

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)}$$

u(-1)=0
u(1)=0

---

poszukujemy rozwiązania w bazie analitycznie zadanych funkcji

!

$$u(x) \simeq v(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x)$$

funkcje bazowe [trafny wybór: dobre przybliżenie przy minimalnym N]

wybór bazy: zawęża przestrzeń poszukiwań optymalnego rozwiązania

optymalne rozwiązanie znaczy optymalne współczynniki c_i

błąd rozwiązania przybliżonego *v(x):*

$$\boxed{E(x) = \frac{d^2v}{dx^2} + \sin(\pi x)}$$

jeśli *u=v*, *E=0*

tak dobieramy c_i aby *E* był „mały”

zależnie od wyboru definicji małości 3 metody kolokacji, najmniejszych kwadratów, Galerkina

Metoda reszt ważonych

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x)$$

$$E(x) = \frac{d^2 v}{dx^2} + \sin(\pi x)$$

$$R_j = \int_{-1}^{1} E(x) w_j(x) dx$$

całki błędu z funkcjami wagowymi w_j
(musi ich być *N* liniowo niezależnych)

Jeden z możliwych wyborów funkcji wagowych: daje **metodę Galerkina**: $w_j = f_j$ (wagi tożsame z funkcjami bazowymi)

$$E(x) = 2c_1 + 6c_2 x + 12 c_3 x^2 - 2c_3 + \sin(\pi x)$$

$f_i(x)=(x+1)(x-1)x^{i-1}$

R_j = układ równań na c_j

Metoda Galerkina

problem różniczkowy: *Au=f*

(silna forma równania)

1) *E=Au-f*

2) $$u = \sum_{j=1}^{N} c_j \Phi_j$$

3) $$\int dx \Phi_k(x) \times$$

$$\sum_j c_j (\Phi_k, A\Phi_j) - (\Phi_k, f) = 0$$ (forma słaba)

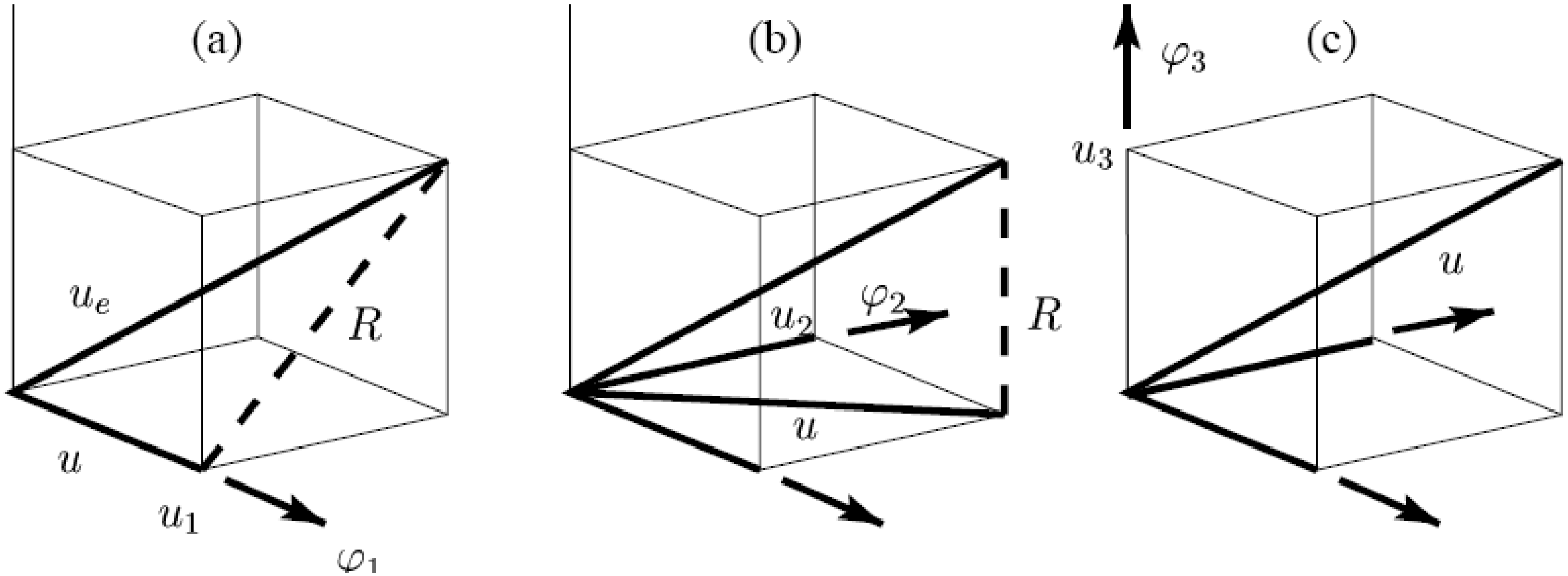
A c = F

układ równań na c

Ten sam układ równań uzyskamy bez definiowania błędu E, po rozwinięciu poszukiwanej funkcji w bazie i wyrzutowaniu równania na element bazowy.

residuum $r=Au-f$:

$(r,v)=0$ dlatego r ortogonalne do każdego wektora bazowego v_j



Inaczej mówiąc: w metodzie Galerkina rzutujemy rozwiązanie dokładne na bazę

Metoda Galerkina - równoważna metodzie wariacyjnej, (gdy ta stosowalna)

metoda wariacyjna (Reyleigha-Ritza)

Na jednym z poprzednich wykładów pokazaliśmy, że

$$\nabla^2\phi = -\rho \longleftrightarrow S = min$$

$$S = \int \left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \rho\phi\right) dv$$

S – używaliśmy jako parametr zbieżności
metod iteracyjnego rozwiązywania równania Poissona

Warunek minimum funkcjonału + baza funkcyjna = metoda wariacyjna RR

metoda wariacyjna Reyleigha-Ritza

u(0)=u(1)=0

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \rho(x)$$

$$Au=f$$

$$S(u) = \int_0^1 u\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2u}{dx^2} - \rho(x)\right)dx$$

$$S(u) = \int_\Omega u\left(\frac{1}{2}Au - f\right)$$

---

iloczyn skalarny w przestrzeni rzeczywistych funkcji całkowalnych z kwadratem

$$(a,b) = \int_\Omega a(x)b(x)dx$$

$$S(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, f)$$

iloczyn skalarny:
przyporządkowanie
para wektorów -liczba
przemienne
liniowe
dodatnio określone

Baza: $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_N$ funkcji spełniających jednorodny warunek brzegowy

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i \Phi_i \longrightarrow$$

poszukujemy c_i dla których $S(u)$ minimalny w wybranej bazie

$$S(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, f)$$

metoda wariacyjna Reyleigha-Ritza

$$S(u) = \frac{1}{2}(u, Au) - (u, f)$$

$$u = \sum_{i=1}^{N} c_i \Phi_i$$ baza funkcji *rzeczywistych*

liniowość A

$$S(u) = \frac{1}{2}\left(\sum_i c_i \Phi_i, \sum_j c_j A\Phi_j\right) - \left(\sum_i c_i \Phi_i, f\right)$$

$$S(u) = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j c_i c_j (\Phi_i, A\Phi_j) - \sum_i c_i (\Phi_i, f)$$

liniowość iloczynu skalarnego

$$\frac{dS(u)}{dc_k} = 0$$

$$\frac{1}{2}\sum_i \sum_j \delta_{ik} c_j (\Phi_i, A\Phi_j) + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j \delta_{jk} c_i (\Phi_i, A\Phi_j) - \sum_i \delta_{ik} (\Phi_i, f) = 0$$

sumowanie po deltach

$$\frac{1}{2}\sum_j c_j (\Phi_k, A\Phi_j) + \frac{1}{2}\sum_i c_i (\Phi_i, A\Phi_k) - (\Phi_k, f) = 0$$

przepisane:

$$\frac{1}{2}\sum_j c_j(\Phi_k, A\Phi_j) + \frac{1}{2}\sum_i c_i(\Phi_i, A\Phi_k) - (\Phi_k, f) = 0$$

zmiana indeksu i / j

$$\frac{1}{2}\sum_j c_j(\Phi_k, A\Phi_j) + \frac{1}{2}\sum_j c_j(\Phi_j, A\Phi_k) - (\Phi_k, f) = 0$$

przemienność iloczynu skalarnego+**samosprzężoność** A

$$\sum_j c_j(\Phi_k, A\Phi_j) - (\Phi_k, f) = 0$$

A c = F

układ równań na c

Podobnie: zobaczymy na następnych zajęciach, że algebraiczne równanie własne z rzutowania równania Schroedingera na funkcje bazowe jest identyczne z wynikiem kwantowomechanicznego twierdzenia wariacyjnego.

zapis równania na *c w metodzie wariacyjnej Reyleigha-Ritza*
- *identyczny jak w metodzie Galerkina*

ale: metoda Galerkina - bardziej ogólna
tzn.:
działa również dla operatorów, które nie są
samosprzężone / liniowe / dodatnio określone
tzn.:
dla operatorów, dla których nie można (nie jest łatwe)
wskazać odpowiedni funkcjonał do minimalizacji