

# w stronę metody elementów skończonych

przypomnienie: metoda ważonych reszt

$Lu=f$  (na  $\Omega$ )  $\longrightarrow$  Rozwiązanie dokładne (silnej postaci równania)  
jest „trudne”.

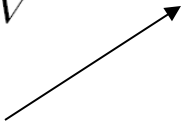
$Bu=g$  (na  $d\Omega$ ) szukamy rozwiązania przybliżonego w bazie funkcji

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x) \quad \text{(rozwiązanie w podprzestrzeni wektorowej rozpiętej przez wektory bazy)}$$

Działając operatorami  $L$  i  $B$  na rozwiązanie przybliżone dostajemy funkcje resztkowe (rezydualne) zamiast zera:

$$\begin{aligned} L\tilde{u} - f &= r \\ B\tilde{u} - g &= s \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \text{zależy nam, aby reszty } r \text{ i } s \text{ były jak najmniejsze}$$

$c$  wyznaczamy z ważenia reszty:

$$\int_V r(x) w_j(x) dx = 0$$


dla metody Galerkina bierzemy funkcje bazowe jako wagi:  $w_j = v_j$

powyższy przykład: baza wielomianów określonych na całym pudle obliczeniowym.  
Z wielu powodów jest to zły pomysł.

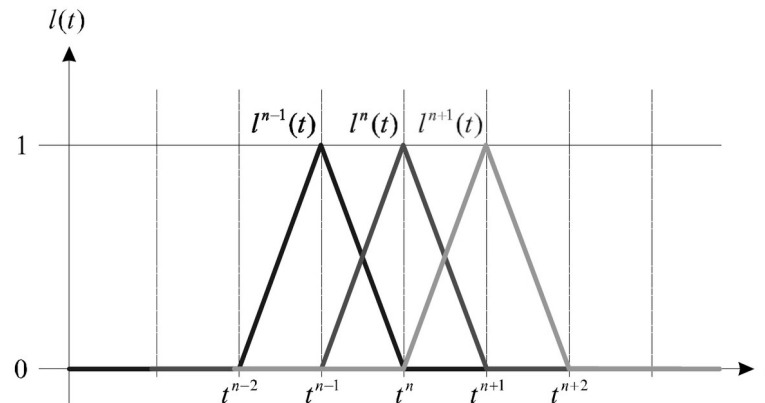
Wysokie potęgi wielomianów niewygodne w użyciu: całkowanie, efekty Rungego,  
powód najważniejszy:

**S** byłyby gęsta, problem nie do rozwiązania przy dużym  $N$ .

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

Galerkin z bazą funkcji rozłącznych przestrzennie → metoda elementów skończonych

**Metoda elementów skończonych:** funkcje rozłączne tak, żeby  $\mathbf{S}$  = rzadka



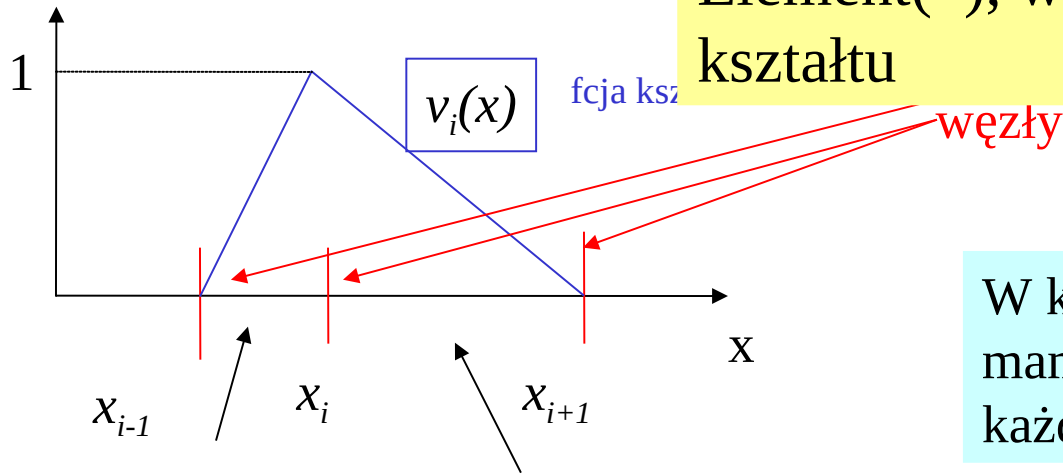
najprostszy wybór *funkcji kształtu*(\*): baza „kapełuszy”  
zbieżność dostaniemy w przestrzeni funkcji odcinkami liniowymi

(\*) trzecie pojęcie z żargonu MES

Zobaczymy w działaniu metodę elementów skończonych,  
ale na razie: bez jej charakterystycznych narzędzi:  
bez lokalnych macierzy sztywności związanych z każdym elementem  
bez ich składania do macierzy globalnej  
bez mapowania przestrzeni fizycznej do przestrzeni referencyjnej

będziemy mówili o metodzie z punktu widzenia węzłów:  
tak najłatwiej wprowadzić metodę, ale dla 2D i 3D – podejście niepraktyczne  
później: spojrzymy z punktu widzenia elementów

# Element(\*), węzły(\*), funkcje kształtu



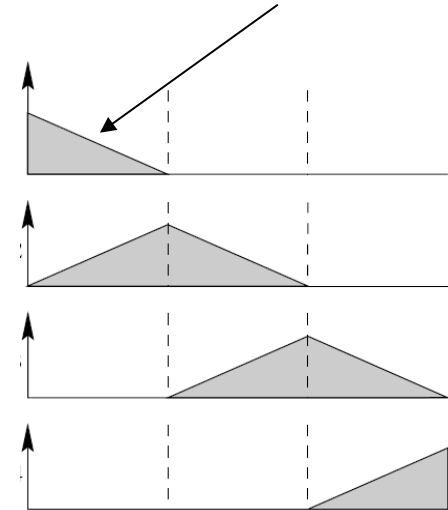
W każdym elemencie:  
mamy 2 funkcje,  
każda z innym węzłem związana

**element**  $K_i$  długości  
 $h_i = x_i - x_{i-1}$

**element**  $K_{i+1}$  długości  
 $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

funkcje bazowe i brzeg



$$u = \sum_{i=1}^n y_i v_i \longrightarrow \text{Dla jednorodnych warunków Dirichleta}$$

koniecznie mamy

$$y_{\text{pierwsze}} = y_{\text{ostatnie}} = 0$$

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

baza odcinkami liniowa  
MES

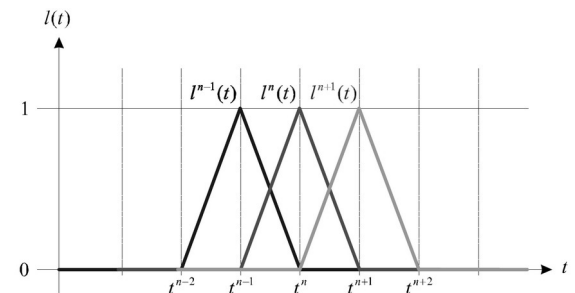
$$v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

→ pochodna na węzłach  
nie istnieje, ale to  
przy całkowaniu  
bez znaczenia

$S_{ij} = (Lv_i, v_j)$  niezerowe tylko dla  
 $i=j, i=j-1$  oraz  $i=j+1$  [bez przekrywania  
całka znika]

$$S_{ii} = \cancel{v'_i(x)v_i(x)} \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx v'_i(x)v'_i(x) dx$$

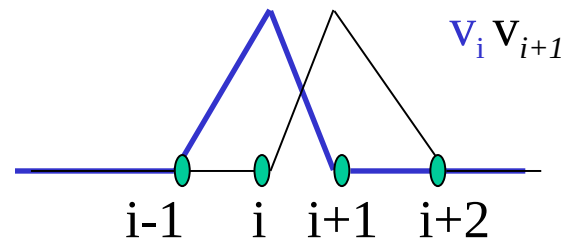
$$S_{ii} = -\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)$$



$$S_{ij} = (Lv_i, v_j) \quad \text{niech } j = i+1 \quad v'_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$S_{i,i+1} = + v'_i(x) v_{i+1}(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+2}} dx v'_i(x) v'_{i+1}(x) dx$$

$$S_{i,i+1} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx v'_i(x) v'_{i+1}(x) dx$$



gdy jedna pochodna  
dodatnia druga ujemna

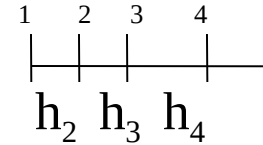
$$S_{i,i+1} = - \left( -\frac{1}{x_{i+1} - x_i} \times \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \times (x_{i+1} - x_i) \right) = \frac{1}{h_{i+1}}$$

$$S_{i,i-1} = \frac{1}{h_i} \quad \leftarrow \text{długość elementu o numerze większym z dwóch indeksów } S$$

# SY=F

Macierz sztywności dla  $n$  węzłów

+ warunek  $y_1=y_n=0$



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wiersz  $n-1 \rightarrow$

$$F_i = (v_i, f)$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

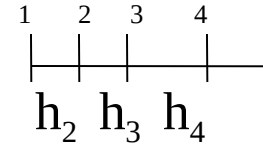
$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

po elemencie  $K_i$                       po  $K_{i+1}$

# SY=F

Macierz sztywności dla  $n$  węzłów

+ warunek  $y_1=y_n=0$



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wiersz  $n-1 \rightarrow$

$$F_i = (v_i, f)$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

po elemencie  $K_i$

po  $K_{i+1}$

dla równoodległych węzłów S jak macierz metody RS (razy  $h=dx$ ), ale wektor obciążeń F – nie! w MRS mielibyśmy  $F_i=f(x_i) dx$



$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

dla  $f(x) = -\sin(\pi x)$

$$F_i = -\frac{\sin(x_i \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i-1})} + \frac{\sin(x_{i-1} \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i-1})} - \frac{\sin(x_{i+1} \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i+1})} + \frac{\sin(x_i \pi)}{\pi^2(x_i - x_{i+1})}$$

warunki brzegowe (jednorodne Dirichleta): forma  $S$  oraz  $F_1 = F_n = 0$

ten URL wygląda prawie jak dla MRS...  
zobaczmy wyniki

$$\mathbf{SY}=\mathbf{F}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -\left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -\left(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Układ równań z macierzą trójkątną – przypomnienie.  
Jak rozwiązać?

# Dekompozycja LU macierzy trójkątnej

$$SY=F$$

$$S=LU \quad (LU - \text{trójkątne})$$

$$(LU)Y=F$$

$$UY=x$$

$Lx=F$  - najpierw rozwiążemy ten układ

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

dwuprzekątne

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_3 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

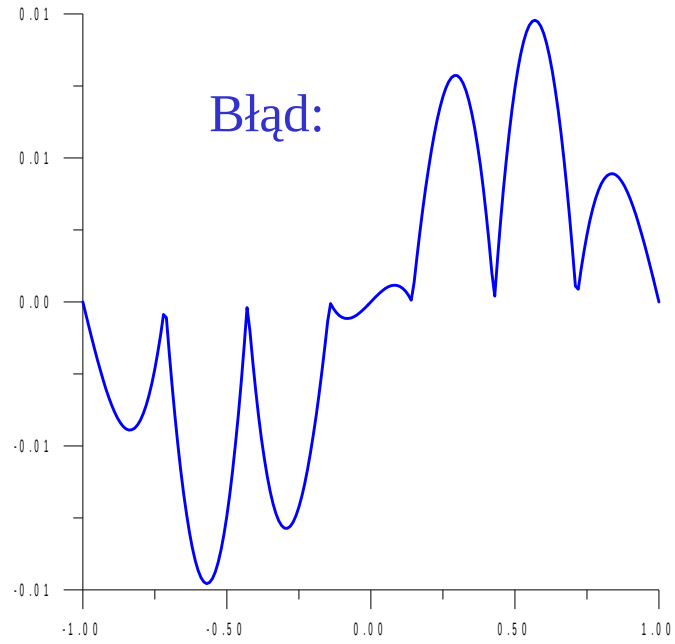
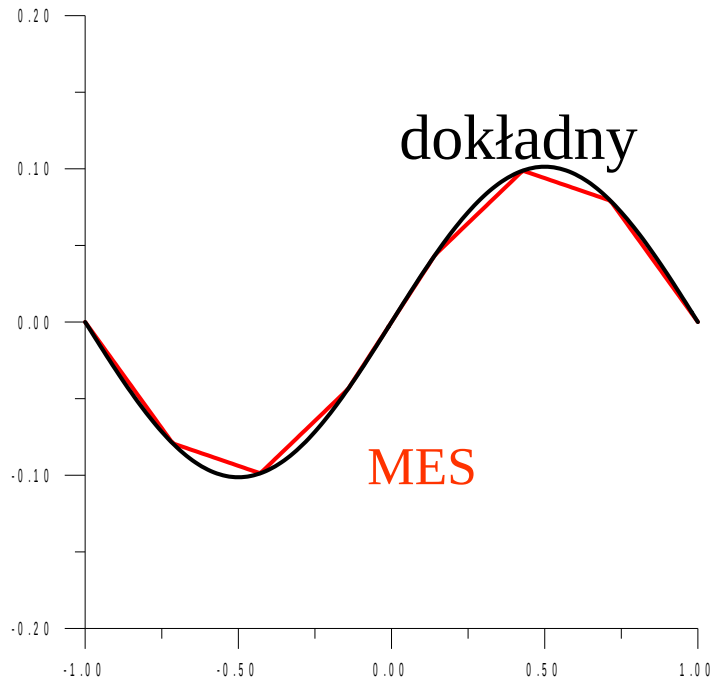
bez zmian

$$\alpha_1 = a_1 \quad \left| \quad \beta_i = \frac{b_i}{\alpha_{i-1}} \quad \text{dla } i > 1 \right.$$

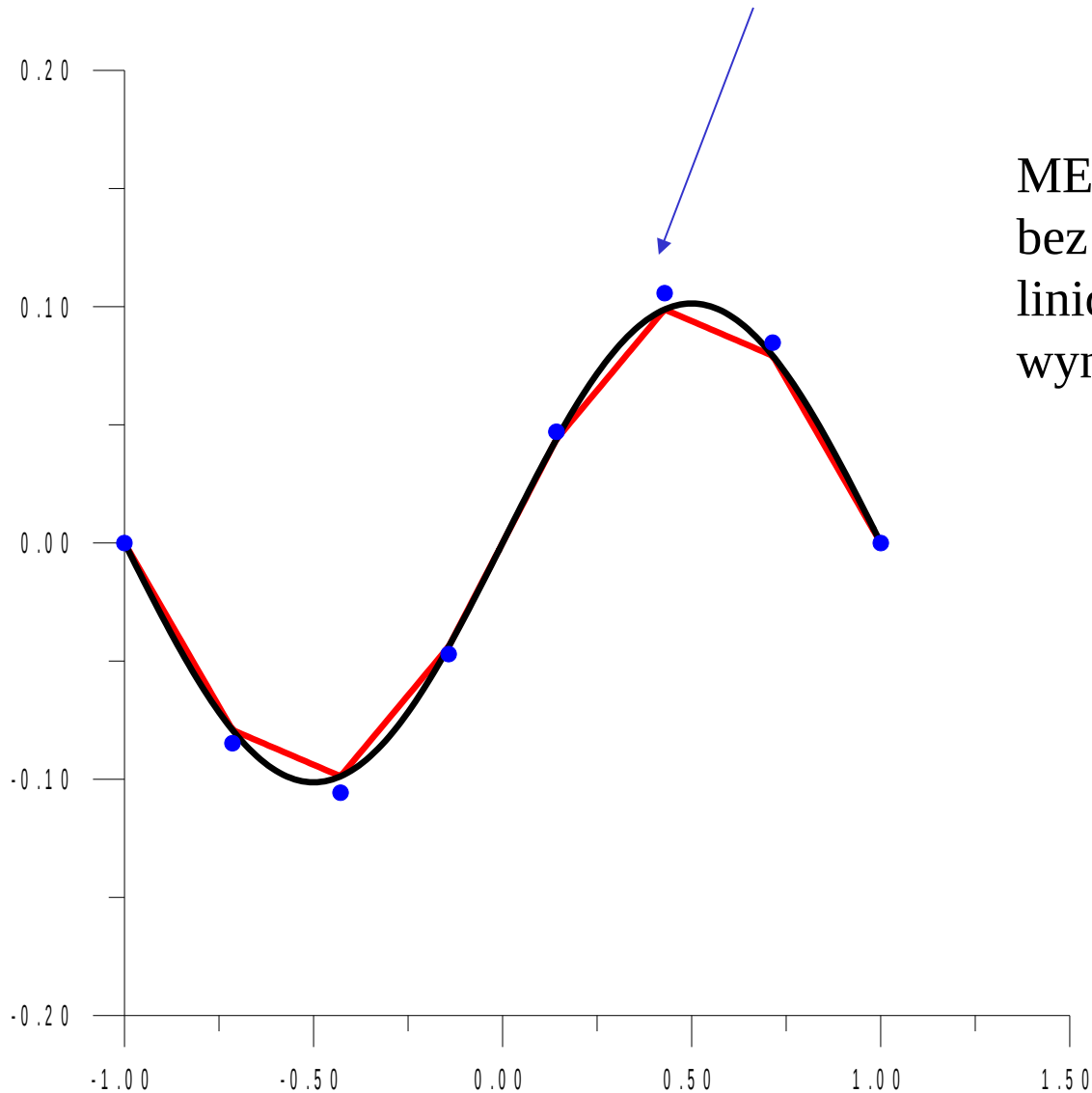
$$\left. \alpha_i = a_i - \beta_i c_{i-1} \right.$$

Wynik: równoodległe węzły

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

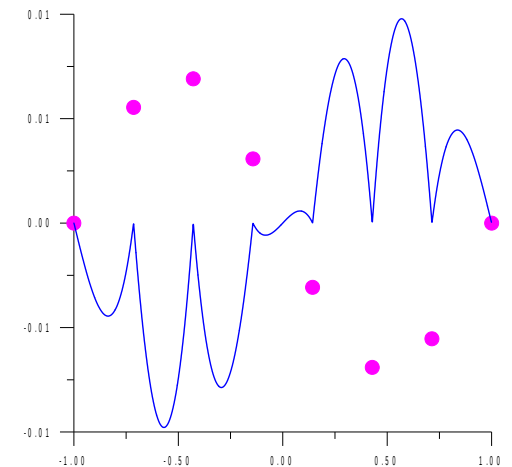


MES (równoodległe węzły) a MRS (węzły w tych samych punktach):

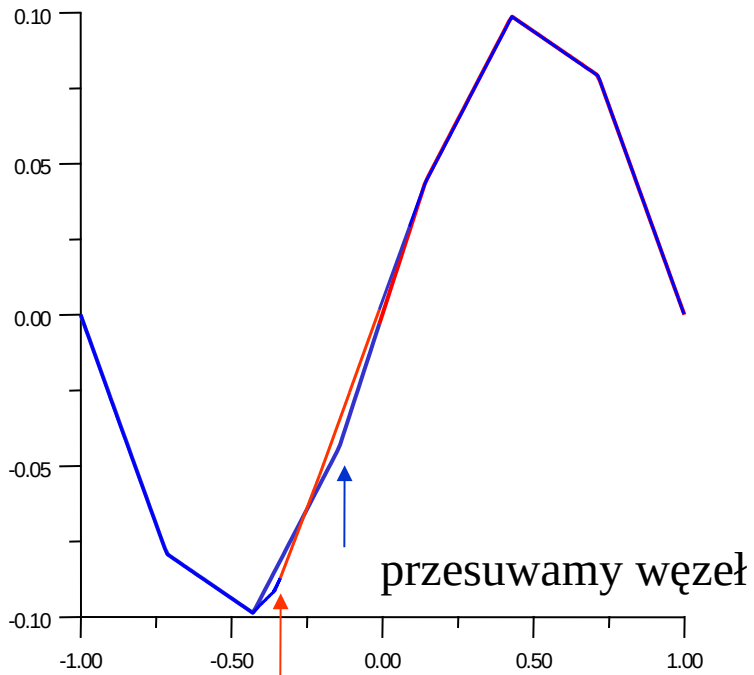


MES dla laplasjanu  
bez pochodnej z funkcjami  
liniowymi: w węzłach  
wynik dokładny !!!

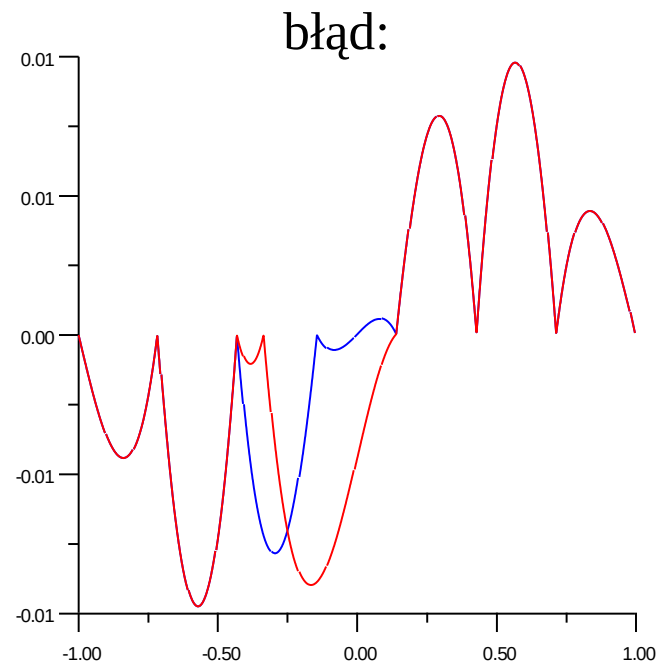
błąd MRS i MES

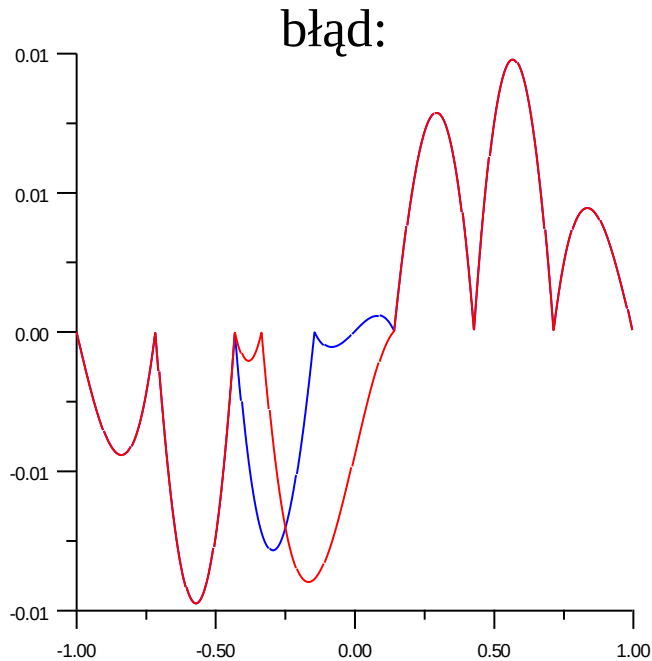


znikanie błędu MES (1D, liniowe f.kształtu) w węzłach zachodzi również dla nierównomiernego rozkładu węzłów:



Dla MRS: dla nierównomiernej siatki musielibyśmy używać niesymetrycznych ilorazów o [jak widzieliśmy] niższej dokładności





Równanie Poissona,  
funkcje kształtu liniowe  
wynik MES **dokładny** w węzłach

MES: produkuje oszacowanie  
wyniku również między węzłami

MRS: tylko w węzłach

MRS: wartości w węzłach,  
są dokładne **TYLKO**  
w granicy  $\Delta x \rightarrow 0$

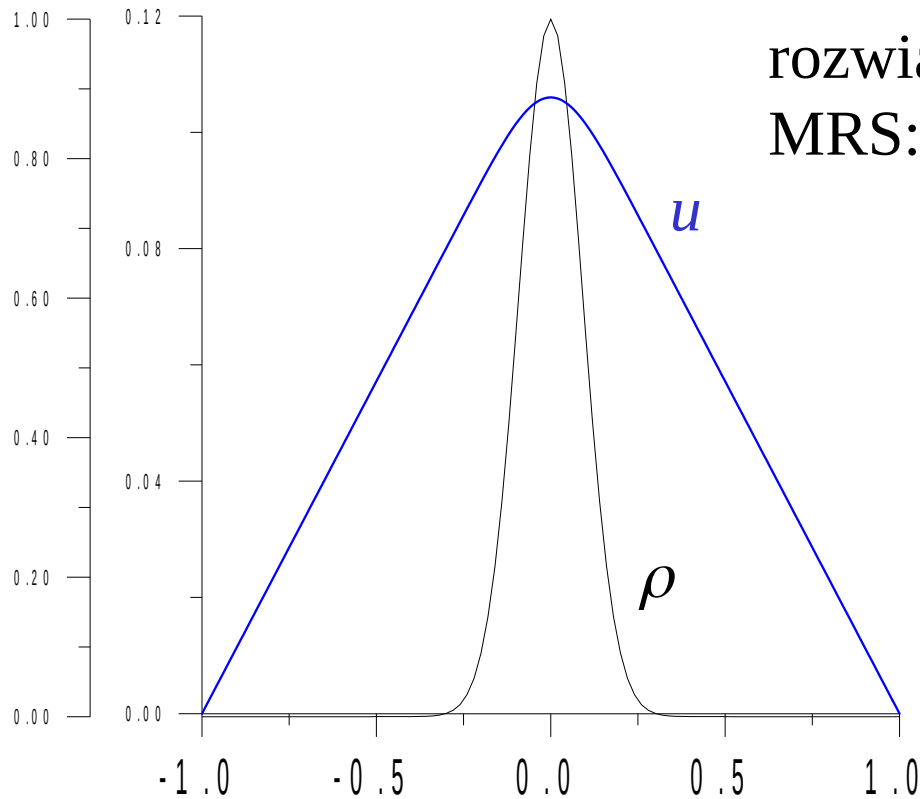
dowód dokładności MES w tej wersji - za parę folii

następne laboratorium

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\rho(x)$$

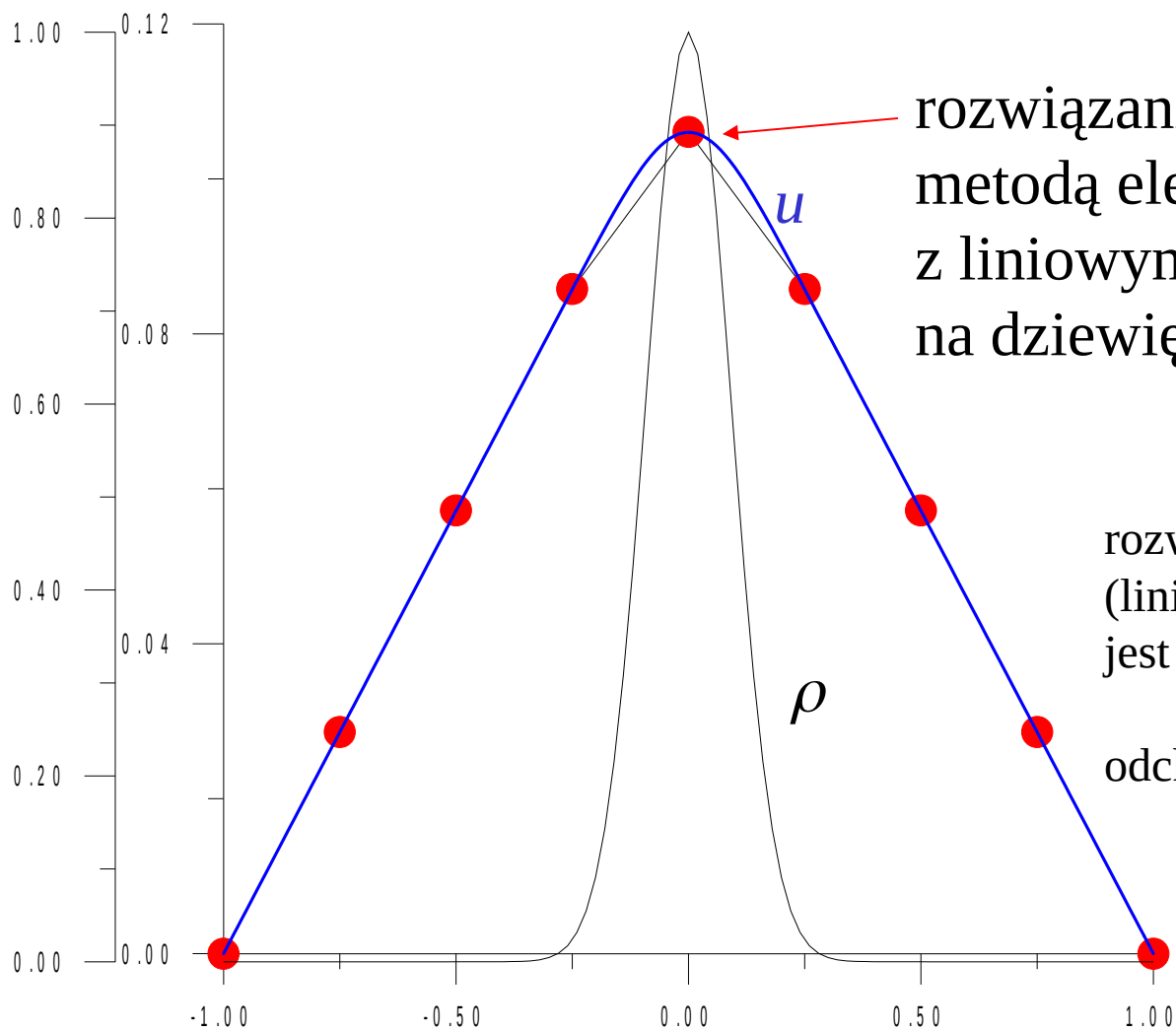
$$\rho(x) = \exp(-60x^2)$$

$$u(-1) = u(1) = 0$$



rozwiązanie (bardzo) dokładne  
MRS: gęsta siatka

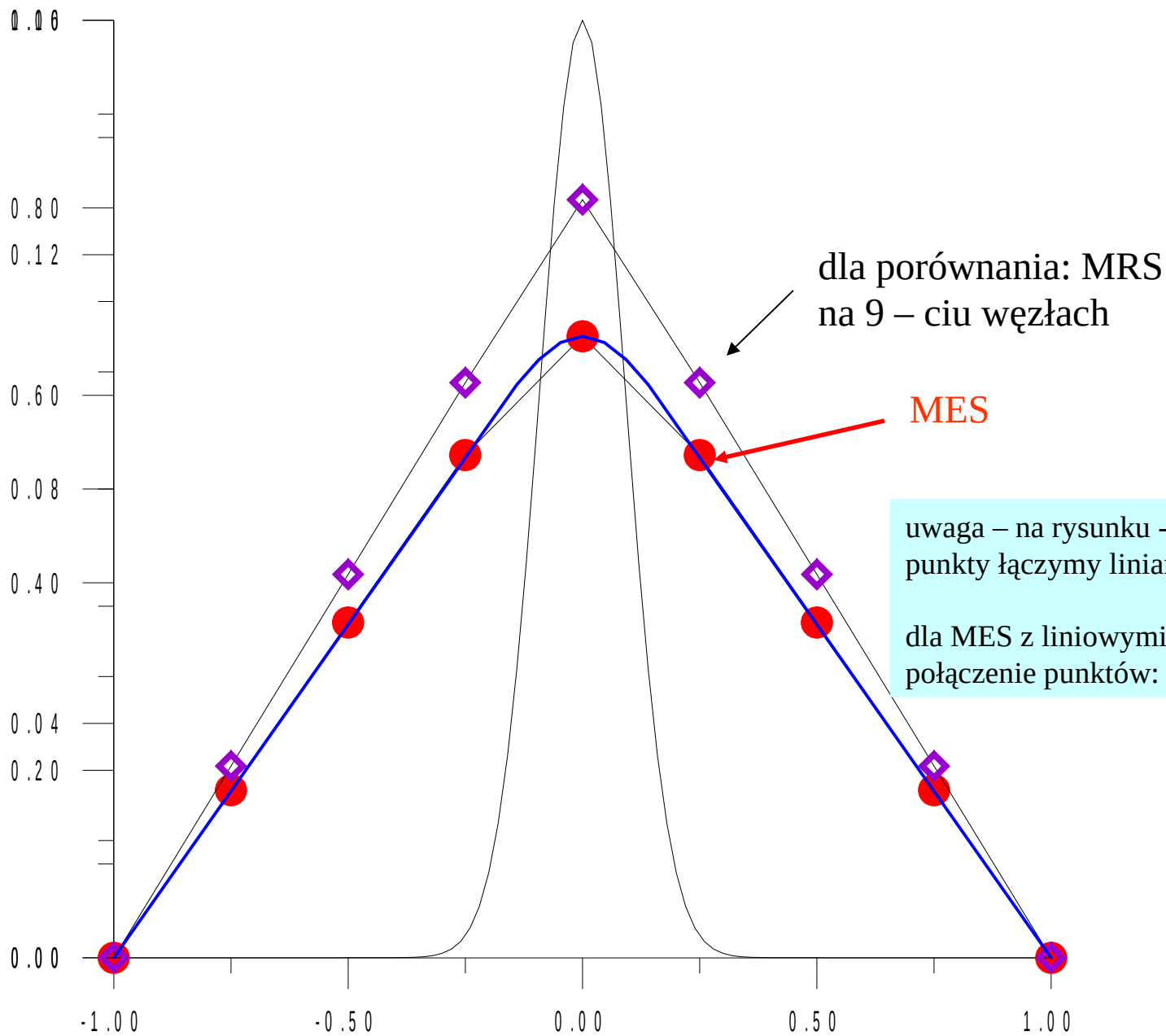




rozwiązanie  
metodą elementów skończonych  
z liniowymi funkcjami kształtu  
na dziewięciu węzłach

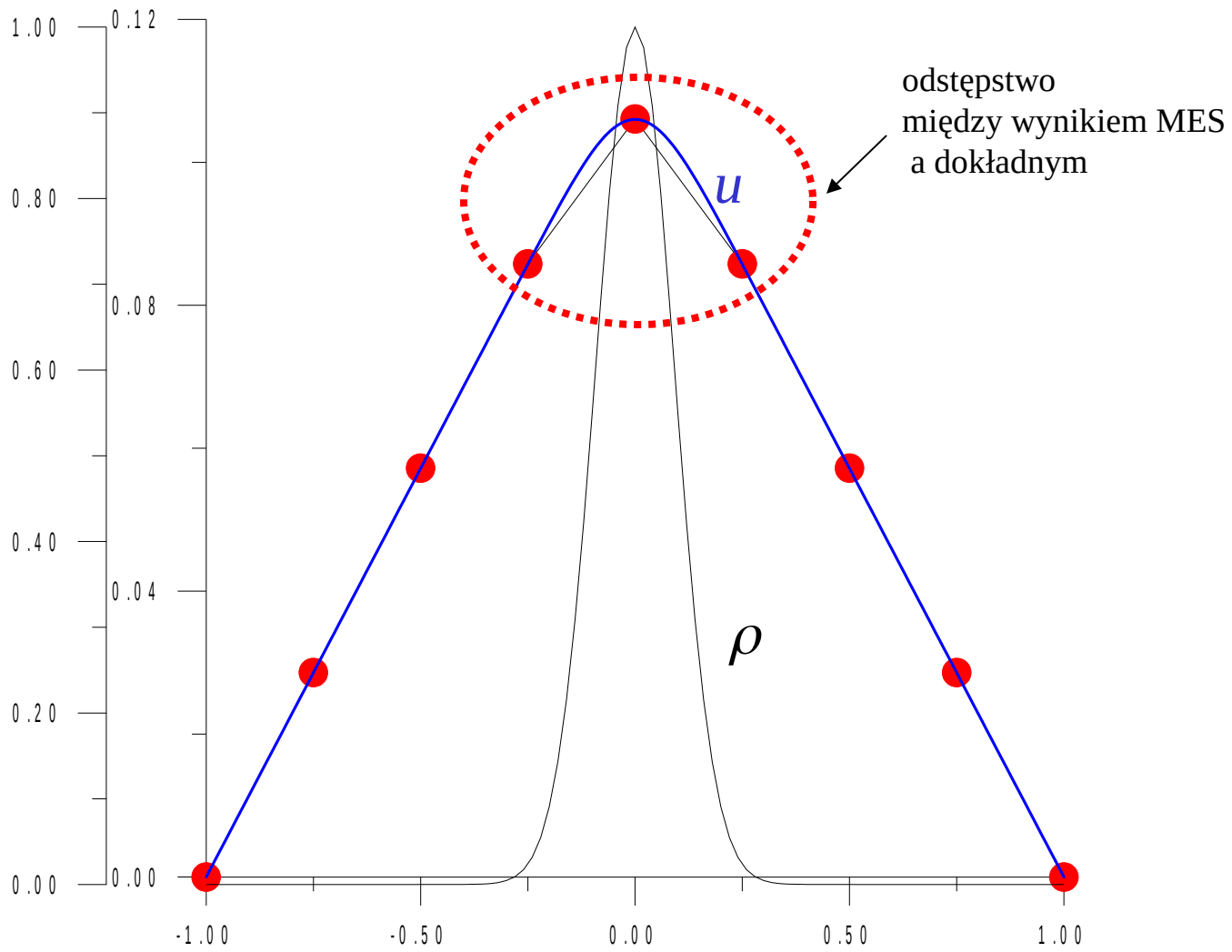
rozwiązanie MES w tej wersji  
(liniowe fcje kształtu 1D)  
jest dokładne w węzłach

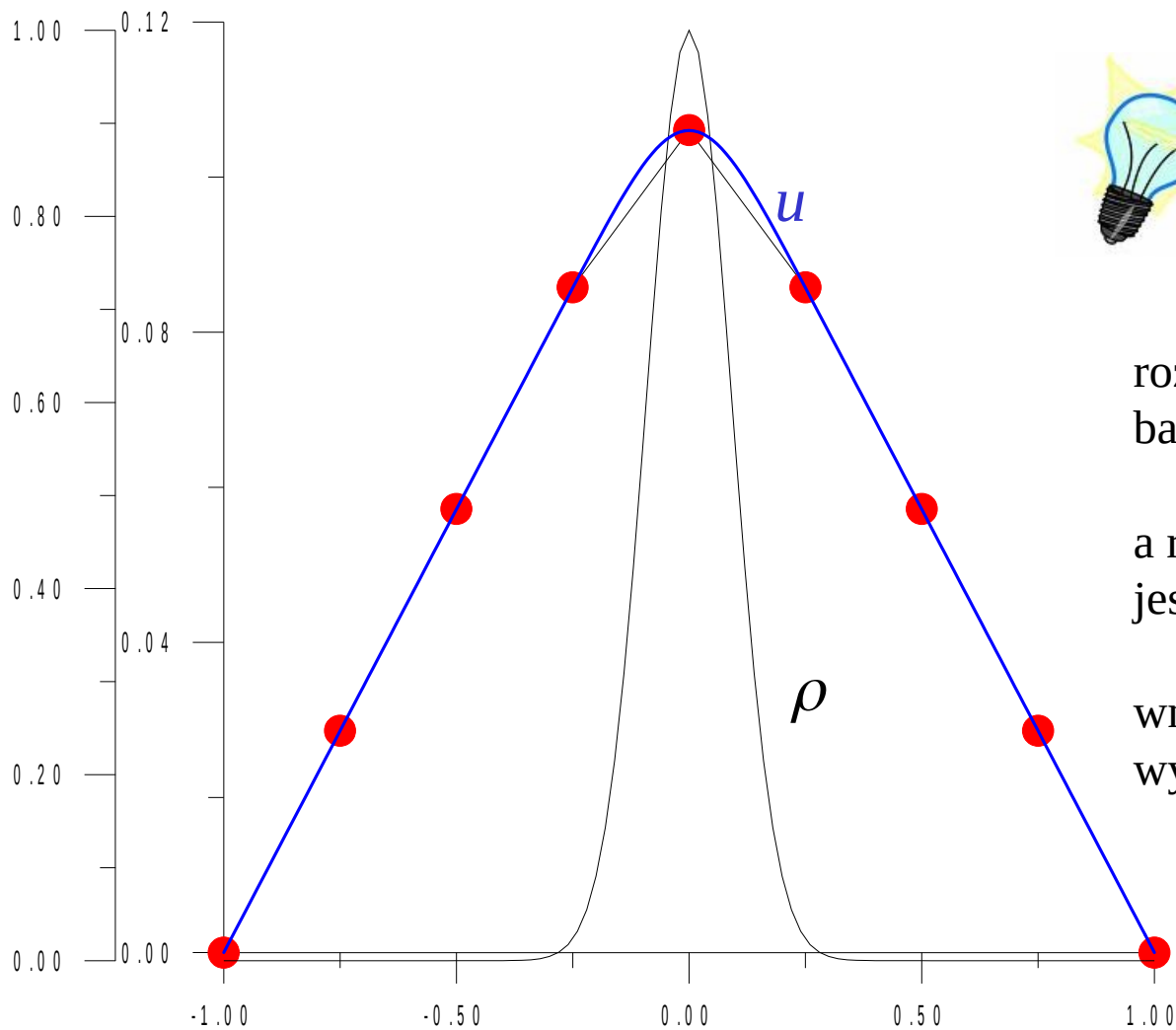
odchylenia: tylko między węzłami



uwaga – na rysunku - dla MRS punkty łączymy liniami tylko dla ilustracji

dla MES z liniowymi funkcjami kształtu połączenie punktów: ma znaczenie dosłowne





rozwiązanie MES w naszej  
bazie jest odcinkami liniowe

a rozwiązanie dokładne  
jest liniowe tam gdzie  $\rho=0$

wniosek: tam gdzie  $\rho=0$   
wystarczy jeden element!

pomysł: przesunąć wszystkie węzły poza brzegowymi do obszaru gdzie nie znika  
gęstość ładunku – tam gdzie  $u$  zaokrąglone.

wiemy już, że przesuwanie czerwonych punktów pójdzie po krzywej dokładnej.

$x_1 = -x_9 = -1$  zacieśniamy węzły wokół  $x=0$

$$x_i = -b_x + \frac{i-2}{3}b_x \quad i=2,8$$

Kryterium wyboru węzłów? ( $b_x$ )

przy okazji dyskusji metod relaksacyjnych dowiedzieliśmy się, że najbliższe prawdzie jest rozwiązanie, które minimalizuje funkcjonal całki działania

wykorzystajmy działanie jako kryterium jakości rozwiązania w metodzie elementów skończonych

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\rho(x)$$

$$a = \int_{-1}^1 dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \rho(x)u(x) \right)$$

$$a = \int_{-1}^1 dx \left( \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 - \rho(x)u(x) \right) \quad u(x) = \sum_{i=1}^N c_i v_i(x)$$

$$a = \left( \frac{1}{2} \sum_{ij} c_i c_j \int_{-1}^1 v_i'(x) v_j'(x) dx \right) - \left( \sum_i c_i \int_{-1}^1 \rho(x) v_i(x) dx \right)$$

$$a = \left( -\frac{1}{2} \sum_{ij} c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) - \left( \sum_i c_i \int_{-1}^1 \rho(x) v_i(x) dx \right)$$

$$a = \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=2, j=2}^8 c_i c_j \mathbf{A}_{ij} \right) + \left( \sum_{i=2}^8 c_i \mathbf{F}_i \right)$$

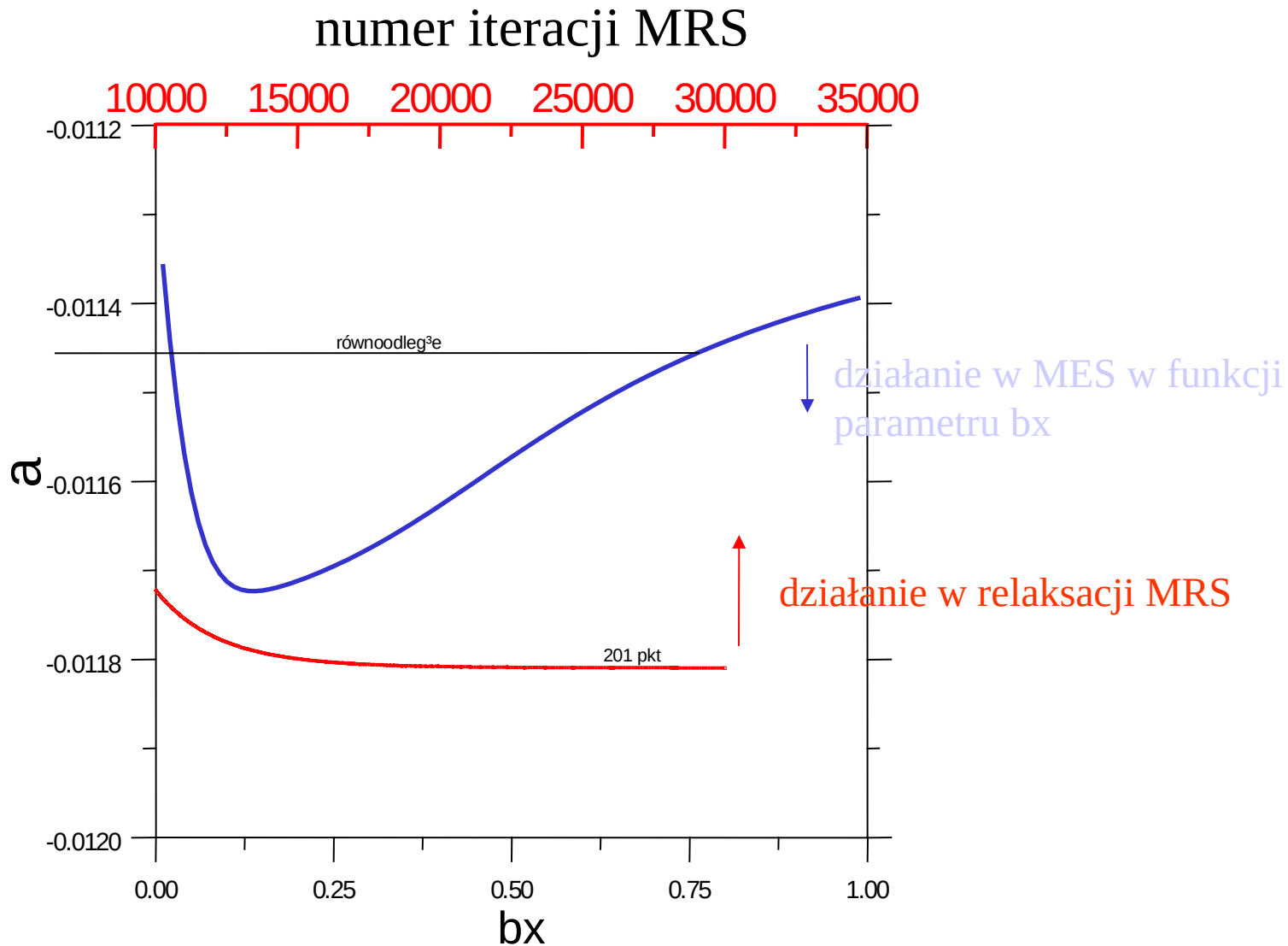
$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ji} &= \int_{-1}^1 v_i''(x) v_j(x) dx \\ &= - \int_{-1}^1 v_i'(x) v_j'(x) dx, \end{aligned}$$

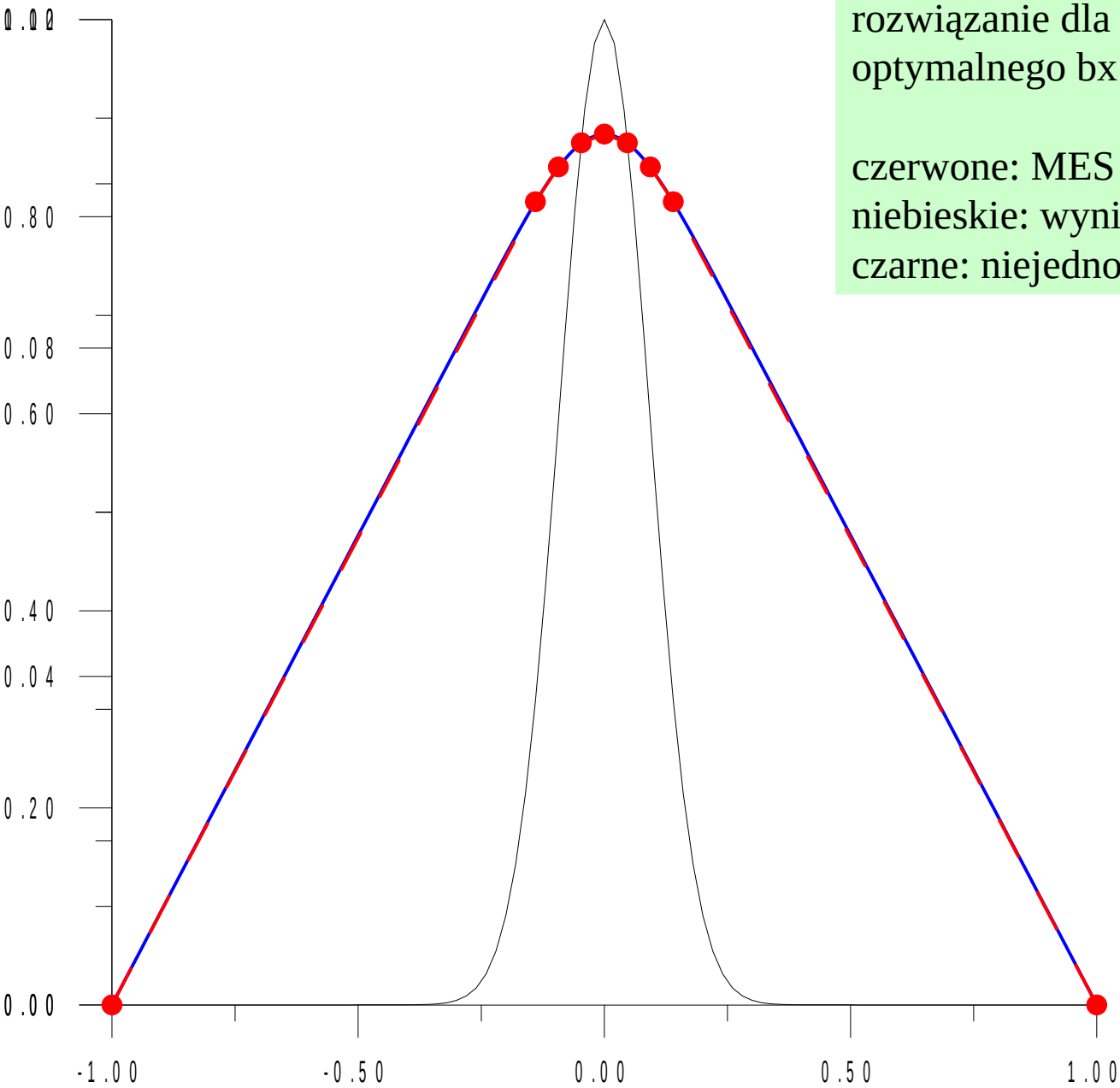
$c_1=c_9=0$  (warunki brzegowe)

$$\mathbf{F}_j = - \int_{-1}^1 \rho(x) v_j(x) dx.$$

do oceny jakości wyboru węzłów użyjemy macierzy A i F, które i tak musimy wyznaczyć aby wyliczyć c.

funkcjonał działania a wybór położeń węzłów:





rozwiązanie dla  
optymalnego bx:

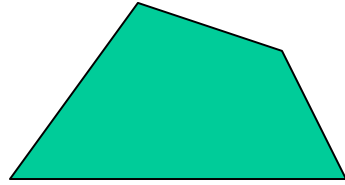
czerwone: MES  
niebieskie: wynik dokładny  
czarne: niejednorodność równania



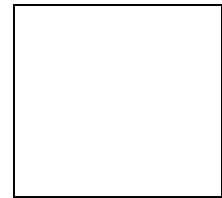
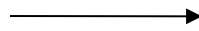
wybrane narzędzia MES umożliwiające  
jej automatyzację w więcej niż 1D:

- 1) macierze sztywności pojedynczych elementów  
oraz ich
- 2) składanie do globalnej macierzy sztywności
- 3) przestrzeń odniesienia i jej mapowanie do przestrzeni fizycznej

# Przestrzeń referencyjna [odniesienia]



element w przestrzeni fizycznej



$x = -1$        $1$

$y = 1$

$y = -1$

element w przestrzeni odniesienia

w 1D

Problem fizycznie zadany jest na siatce  $[x_1, x_2, x_3, \dots, x_N]$

Rachunki (całkowanie elementów macierzowych)

dla każdego elementu chcemy przenieść do przedziału  $(-1, 1)$

Element  $K_m = (x_{m-1}, x_m) \rightarrow (-1, 1)$

mapowanie z  $(-1, 1)$  do  $K_m$ :

$x = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$  ,      gdzie  $\xi$  z przedziału  $(-1, 1)$

Modelowy operator

$$L = a_2 \frac{d^2 x}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

będziemy całkować jego elementy macierzowe w przestrzeni odniesienia

$$L = a_2 \frac{d^2 x}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

## Całkowanie macierzy sztywności w przestrzeni referencyjnej

element macierzowy całkowany w elemencie [fizycznym]

$$C_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \underline{-a_2 v'_i(x) v'_j(x) + a_1 v'_i(x) v_j(x) + a_0 v_i(x) v_j(x)} dx$$

całkę i pochodne przenosimy do przestrzeni odniesienia:

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$J_m = (x_m - x_{m-1})/2$$

skala transformacji  $m$ -tego elementu:  
(czynnik skali, jacobian)  $J_m = \frac{dx}{d\xi}$

pole elementu fizycznego  
/ pole elementu odniesienia

przy transformacji: granice całki  
zmieniają się na  $-1, 1$ , poza tym  $dx = J_m d\xi$

transformacja pochodnych:

$$u'(x) = \frac{du(x(\xi))}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J_m}$$

1D:  $J$  niezależne od  $\xi$   
w 2D: zobaczymy,  
że nie zawsze tak jest  
[gdy element zmienia  
swój kształt w mapowaniu.  
w 1D: odcinek  $\rightarrow$  odcinek]

## Całkowanie macierzy sztywności w przestrzeni referencyjnej

$$C_m = \int_{x_m}^{x_{m+1}} -a_2 v'_i(x) v'_j(x) + a_1 v'_i(x) v_j(x) + a_0 v_i(x) v_j(x) dx$$

$$u'(x) = \frac{du(x(\xi))}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{du(\xi)}{d\xi} \frac{1}{J_m}$$

$$x(\xi) = (x_{m-1} + x_m)/2 + (x_m - x_{m-1})/2 \xi$$

$$C_m = \int_{-1}^1 \left( -a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m^2} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) \right) J_m d\xi$$

$$C_m = \int_{-1}^1 -a_2 v'_i(\xi) v'_j(\xi) \frac{1}{J_m} + a_1 v'_i(\xi) v_j(\xi) + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) J_m d\xi$$

całkowanie wektora sztywności: całka  $(f, v_j)$  transformuje się jak wyraz z  $a_0$ .

odcinkowo liniowe funkcje kształtu w przestrzeni odniesienia

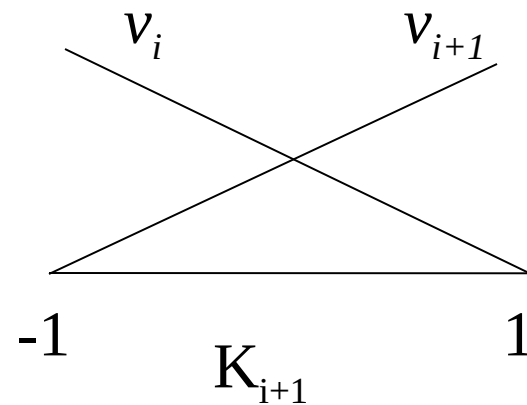
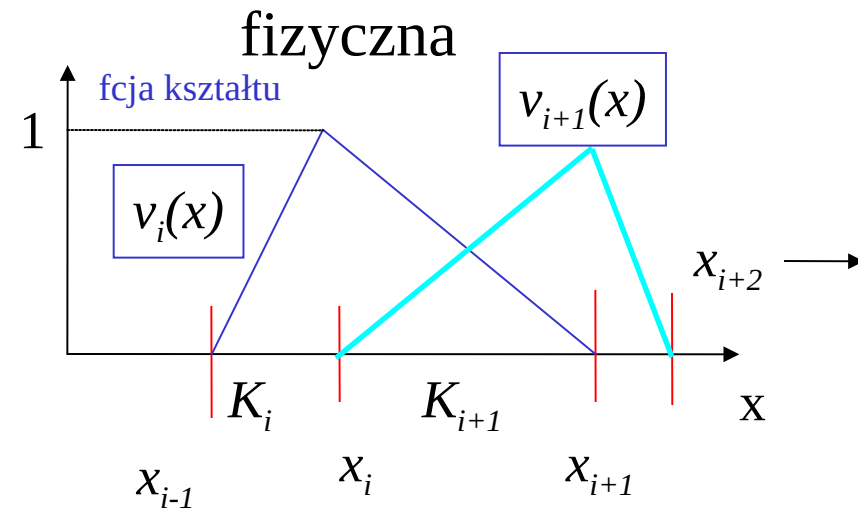
$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \cup K_{i+1} \end{cases}$$

$$x(\xi) = (x_i + x_{i+1})/2 + (x_{i+1} - x_i)/2 \xi$$

W elemencie  $i+1$   
dwie funkcje kształtu

$$v_i(x(\xi)) = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$v_{i+1}(x(\xi)) = 1/2 \xi + 1/2$$



odniesienia

# Macierz sztywności pojedynczego elementu składanie macierzy globalnej

Zmieniamy punkt widzenia:  
(z funkcji kształtu na elementy)

$$v_i(x(\xi)) = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$v_{i+1}(x(\xi)) = 1/2 \xi + 1/2$$

$$\begin{array}{ccc} u_1 & & u_2 \text{ (parametry węzłowe} \\ x_{m-1} & & x_m \text{ niewiadome)} \\ \hline -1 & & 1 \\ & \text{element} & \end{array} \quad J_m = h_m/2$$

$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

$$\phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$\phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi$$

[ funkcje bazowe :  
ważone  
parametrami  
węzłowymi ]

Pokazać w2-11.pdf

Zmieniamy punkt widzenia:  
(z funkcji kształtu na elementy)

$$\begin{array}{ccc} u_1 & & u_2 \text{ (parametry węzłowe)} \\ x_{m-1} & & x_m \text{ (nieznane)} \\ \hline -1 & & 1 \\ & \text{element} & \end{array} \quad J_m = h_m/2$$

$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

macierz sztywności  
elementu  $m$

[wymiar taki jak liczba funkcji  
kształtu na element]

$$\phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$\phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi$$

$$E^m = \begin{bmatrix} E_{11}^m & E_{12}^m \\ E_{21}^m & E_{22}^m \end{bmatrix}$$

$$E_{ij}^m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \phi_i(x) L \phi_j(x) dx$$

$$L = a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0$$

zależność od  $m$  np. w  $J_m$  :

$$x(\xi) = (x_i + x_{i+1})/2 + (x_{i+1} - x_i)/2 \xi$$

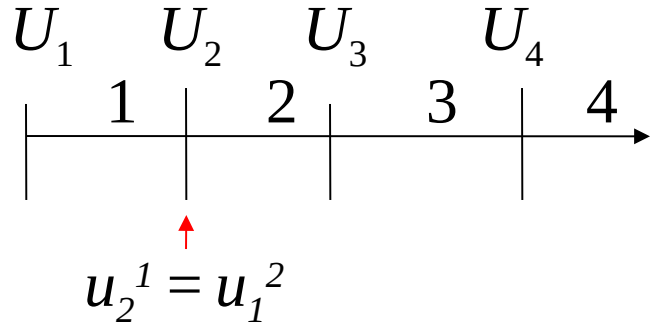
$$E_{ij} = \int_{-1}^1 -a_2 v_i'(\xi) v_j'(\xi) \frac{1}{J_m} + a_1 v_i'(\xi) v_j(\xi) + a_0 v_i(\xi) v_j(\xi) J_m d\xi$$



# Składanie (assembly) globalnej macierzy sztywności

$$u^m(\xi) = u_1^m \phi_1(\xi) + u_2^m \phi_2(\xi)$$

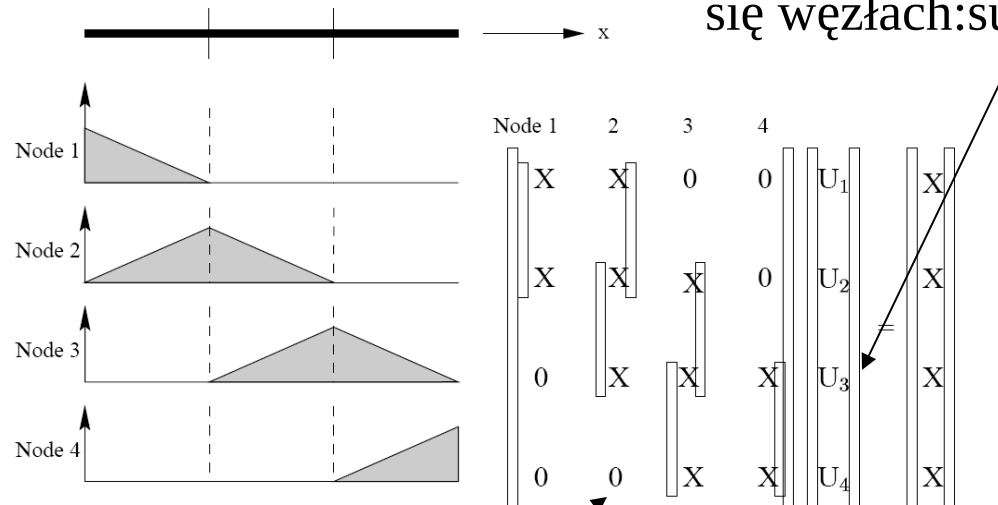
węzły na granicy elementów  
obsługują więcej niż jeden element



globalna  $[U]$  i lokalna  $[u]$  numeracja węzłów

na przekrywających się węzłach: suma

$$E^m = \begin{bmatrix} E_{11}^m & E_{12}^m \\ E_{21}^m & E_{22}^m \end{bmatrix}$$



macierz globalna  $S$  (rozmiar = liczbie węzłów)

## case study

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x) \quad \begin{array}{l} u(x=-1)=0 \\ u(x=1)=0 \end{array}$$

Przedział  $(-1,1)$   
Podzielony na 7 elementów  
(8 węzłów)

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \underline{x_{m-1}} & x_m \\ -1 & 1 \end{array} \quad J_m = h_m/2$$

$$u(\xi) = u_1 \phi_1(\xi) + u_2 \phi_2(\xi)$$

$$\phi_1 = 1/2 - 1/2 \xi$$

$$\phi_2 = 1/2 + 1/2 \xi$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[ -\frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{d\phi_j}{d\xi} \right] d\xi$$

$$E_{ij}^m = \frac{2}{h_m} 2 \frac{1}{4} (-1)^{i+j+1} = \frac{(-1)^{i+j+1}}{h_m}$$

$$E_{ij}^m = \frac{1}{h_m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

# Składanie (assembly) macierzy sztywności z całek po elementach

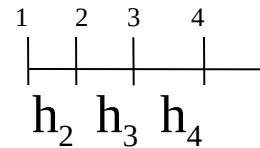
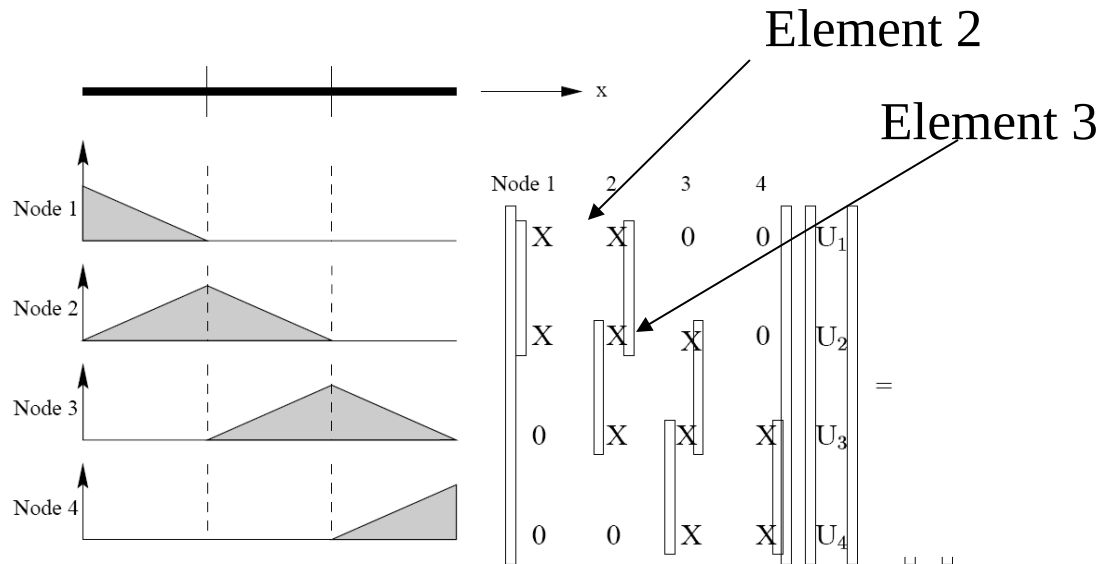
$$E_{ij}^m = \frac{1}{h_m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dodajemy elementy  
 z różnych macierzy lokalnych  
 które odpowiadają temu samemu węzłowi

$$S_{mm} = E_{22}^m + E_{11}^{m+1}$$

$$S_{m,m+1} = E_{12}^{m+1}$$

$$S_{m,m-1} = E_{21}^m$$



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{h_2} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_3} & -(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}) & \frac{1}{h_4} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_{n-1}} & -(\frac{1}{h_{n-1}} + \frac{1}{h_n}) & \frac{1}{h_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

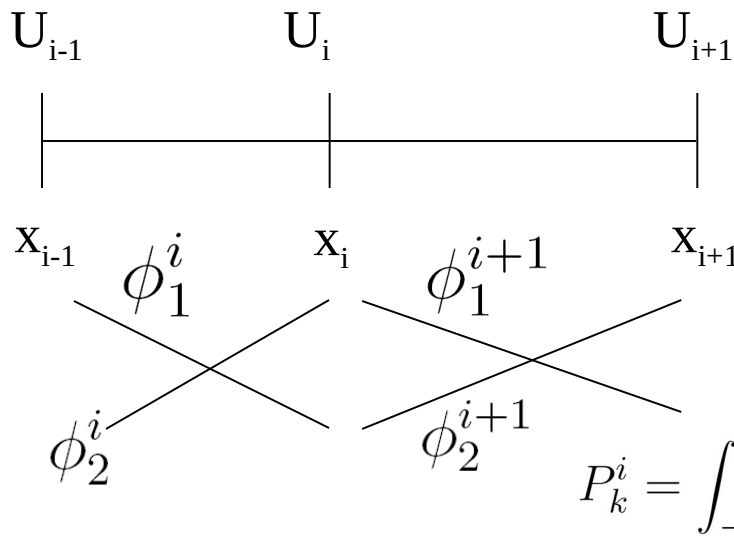
# Wektor obciążeń pojedynczego elementu/składanie globalnego

$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} v_i(x) f(x) dx$$

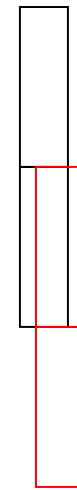
$$F_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-x + x_{i+1}}{x_{i+1} - x_i} f(x) dx$$

po elemencie  $K_i$

po  $K_{i+1}$



$$P^i = \begin{pmatrix} P_1^i \\ P_2^i \end{pmatrix}$$



$$P_k^i = \int_{-1}^1 f(\xi) \phi_k^i(\xi) J_i d\xi$$

$$F_i = P_2^i + P_1^{i+1}$$

druga funkcja elementu  $i$   
i pierwsza elementu  $i+1 =$  ta sama  $v_i(x)$

o potrzebie używania wyższych funkcji kształtu (i o laboratorium):

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x) \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

$$u(1)=u(-1)=0$$

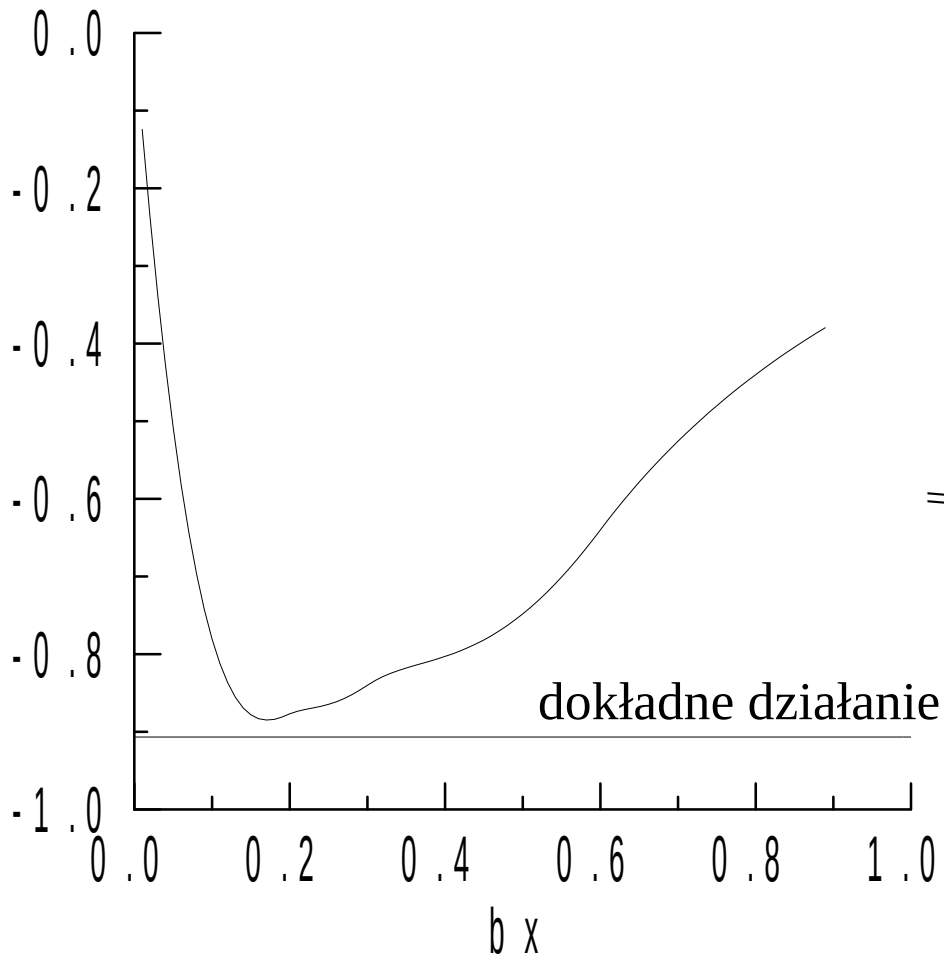
z liniowymi funkcjami kształtu: poza węzłami nie uzyskamy dokładnego rozwiązania tego równania (nigdy nie uzyskamy rozwiązania silnej postaci równania, druga pochodna wewnątrz elementów jest zawsze równa zero a ma być równa niejednorodności dla równań elektrostatyki – źródło potencjału, dla równania przew. ciepl. – źródło ciepła)

rozwiązanie dokładne:

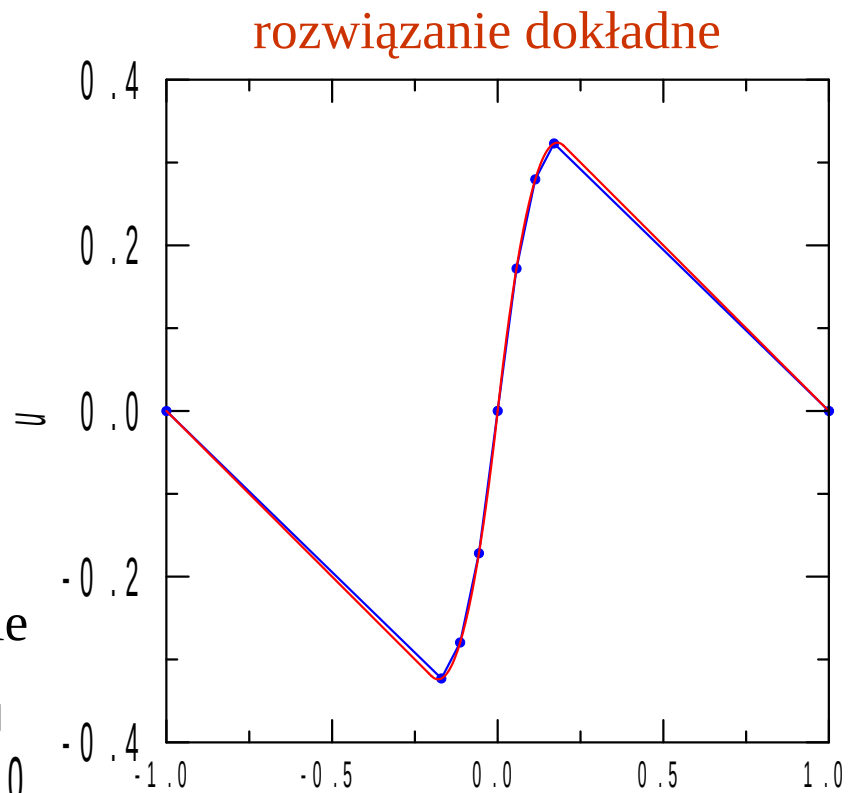
$$u(x) = \begin{cases} -\frac{2}{5}(x+1) & \text{dla } x \in (-1, -0.2] \\ 10x^2 + 3.6x & \text{dla } x \in (-0.2, 0] \\ -10x^2 + 3.6x & \text{dla } x \in (0, 0.2] \\ -\frac{2}{5}(x-1) & \text{dla } x \in (0.2, 1) \end{cases}$$

Odpowiada mu działanie  $a = -0.9666(6)$

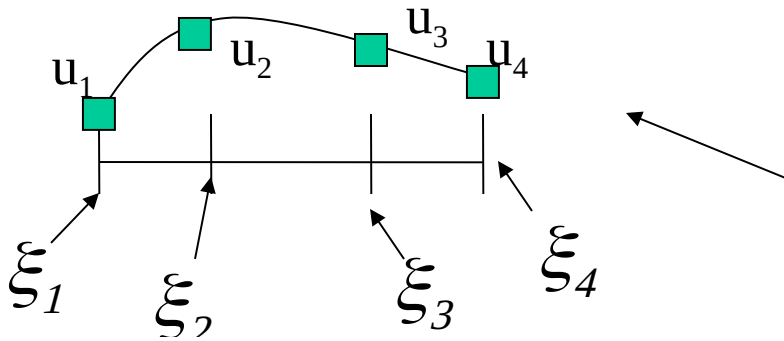
całka działania a rozkład elementów  
dla funkcji odcinkowo liniowych:



optymalne rozwiązanie  
odcinkami liniowe



## Funkcje kształtu wyższych rzędów:



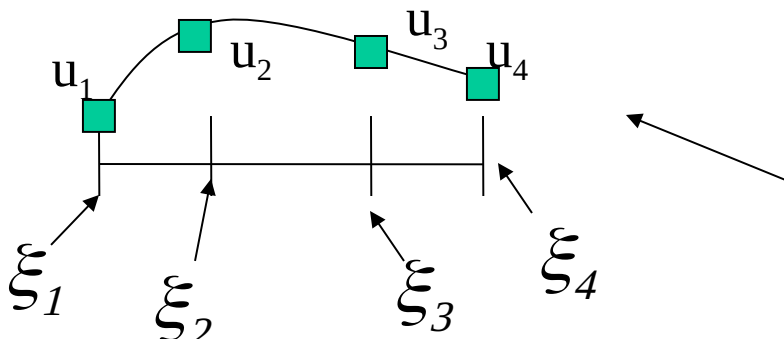
jeden element, cztery ( $n$ ) węzły

$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi) + u_4\phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

$\phi_i(\xi)$  wielomian stopnia  $n-1$ , taki, że  $\phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$

## Funkcje kształtu wyższych rzędów:



jeden element, cztery ( $n$ ) węzły

$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi) + u_4\phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

$$\phi_i(\xi) \quad \text{wielomian stopnia } n-1, \text{ taki, że } \phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

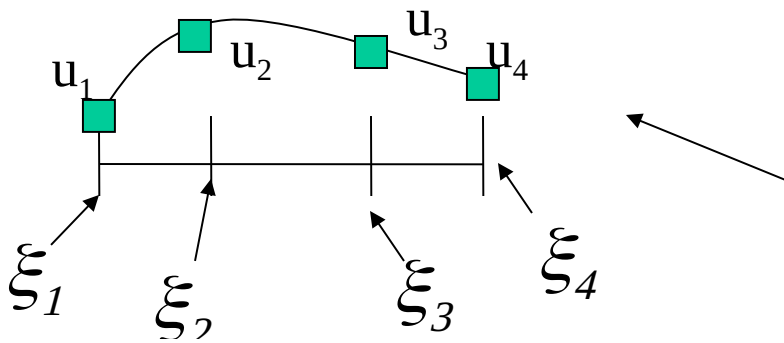
wiemy jak go wskazać:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} = l_i(\xi)$$

wielomian węzłowy  
Lagrange'a



## Funkcje kształtu wyższych rzędów:



jeden element, cztery ( $n$ ) węzły

$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi) + u_4\phi_4(\xi)$$

funkcje kształtu

$$\phi_i(\xi) \quad \text{wielomian stopnia } n-1, \text{ taki, że } \phi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

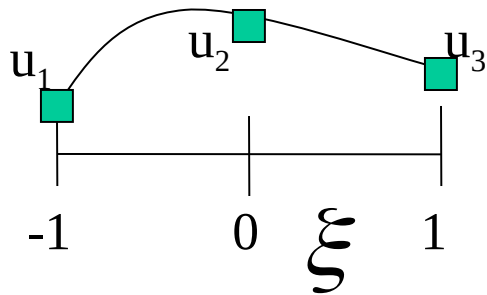
wiemy jak go wskazać:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{j \neq i} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} = l_i(\xi)$$

wielomian węzłowy  
Lagrange'a

funkcje kształtu Lagrange'a: rozwiązanie interpolowane wielomianowo w każdym z elementów. jedynie ciągłość rozwiązania między elementami. w przeciwieństwie do problemów z KSN: wartości funkcji w węzłach **nie są znane**. należy je wyliczyć. istota FEM.

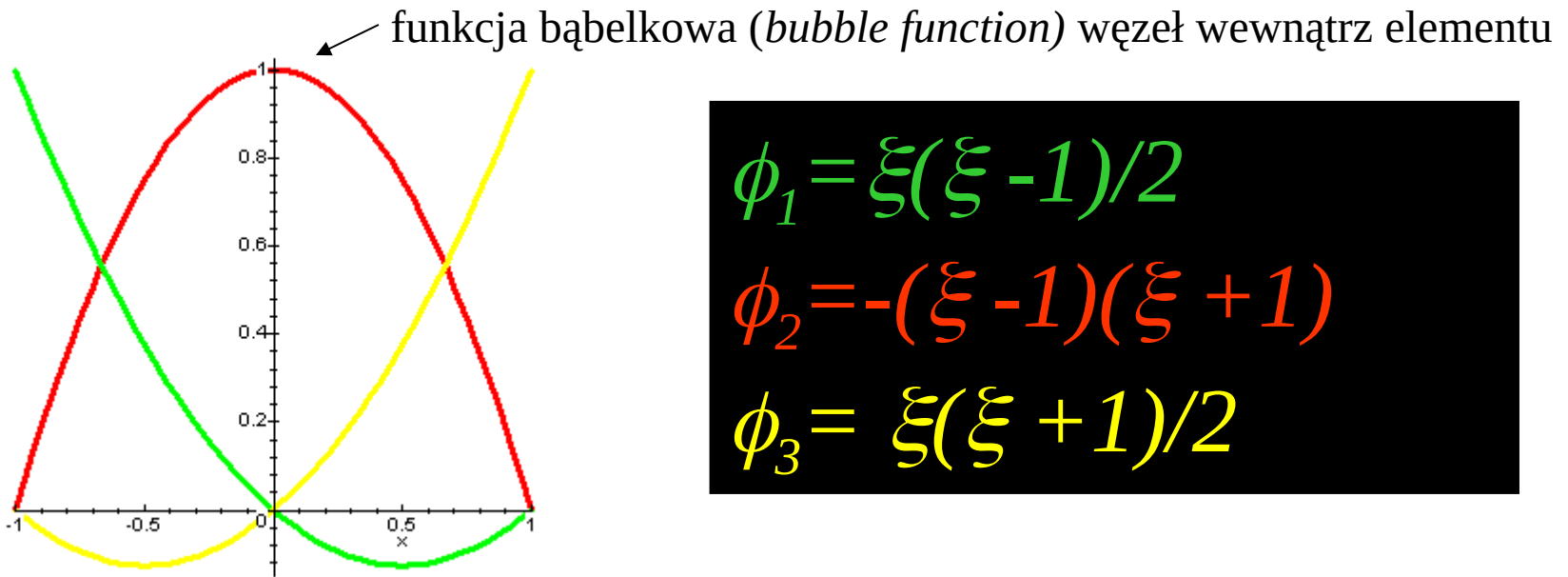
## Elementy wyższych rzędów:



$$u(\xi) = u_1\phi_1(\xi) + u_2\phi_2(\xi) + u_3\phi_3(\xi)$$

Jeden element, trzy funkcje bazowe, 3 parametry węzłowe

Funkcje bazowe : w danym węźle tylko jedna z nich niezerowa  
(co min. gwarantuje liniową niezależność funkcji bazowych)



$$\phi_1 = \xi(\xi - 1)/2$$

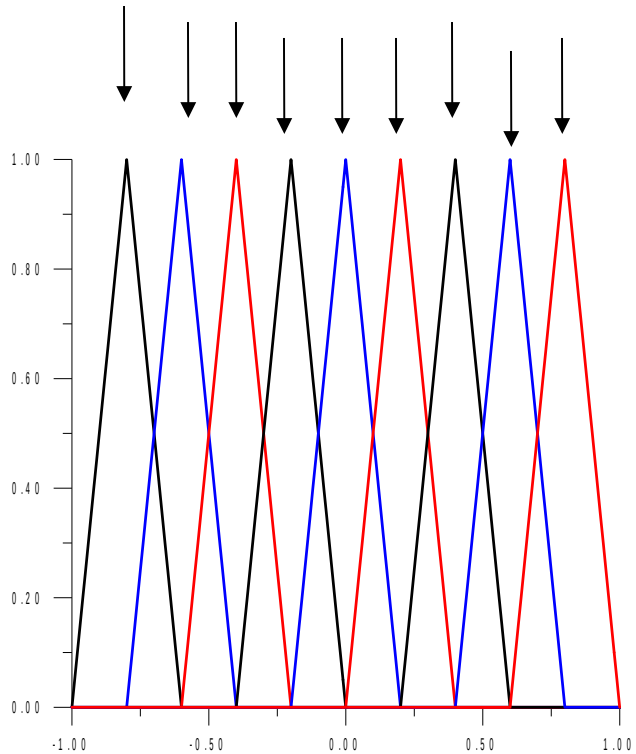
$$\phi_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1)$$

$$\phi_3 = \xi(\xi + 1)/2$$

funkcje wierzchołkowe (*vertex functions*) 1 na krawędziach elementu

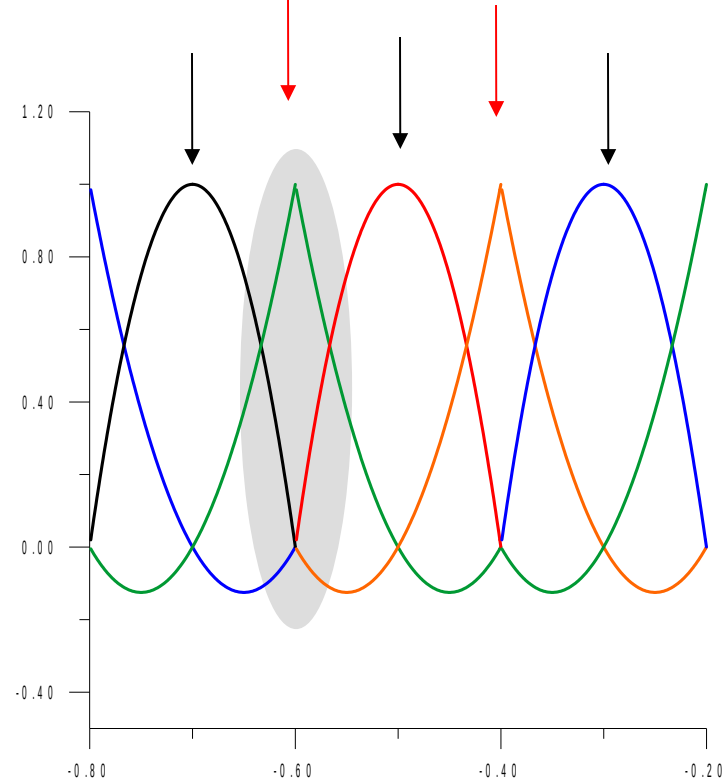
# Funkcje kształtu Lagrange'a: odcinkowo liniowe i kwadratowe

węzły= granice elementów



liniowa baza Lagrange'a

każda strzałka to węzeł  
granice elementów czerwone



kwadratowa baza Lagrange'a

# Macierz sztywności dla kwadratowych f. Lagrange'a

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^1 \frac{1}{J_m} \left[ -\frac{d\phi_i}{d\xi} \frac{d\phi_j}{d\xi} \right] d\xi$$

$$E^m = \frac{1}{3h_m} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

przy równym podziale przedziału E takie samo dla każdego elementu

lecz P **nie!** [inny zakres  $x(\xi)$ ]

$$x(\xi) = (x_m + x_{m+1})/2 + (x_{m+1} - x_m)/2 \xi$$

$$\phi_1 = \xi(\xi - 1)/2$$

$$\phi_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1)$$

$$\phi_3 = \xi(\xi + 1)/2$$

całki wyliczone analitycznie:  
ilu punktowego Gaussa należałoby użyć aby dokładnie scałkować m.sztywności numerycznie?

$$P_k^i = \int_{-1}^1 f(\xi) \phi_k^i(\xi) J_i d\xi$$

liczone numerycznie metodą Gaussa

$$P^m = \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{pmatrix}$$

# Składanie globalnej macierzy sztywności i wektora obciążeń dla kwadratowych funkcji Lagrange'a

$$E^m = \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m \\ d_m & e_m & f_m \\ g_m & i_m & j_m \end{pmatrix}$$

lokalne

$$P^m = \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \\ C_m \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & e_2 & f_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_2 & i_2 & j_2 + a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & e_3 & f_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 & i_3 & j_3 + a_4 & b_4 & c_4 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & d_n & e_n & f_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

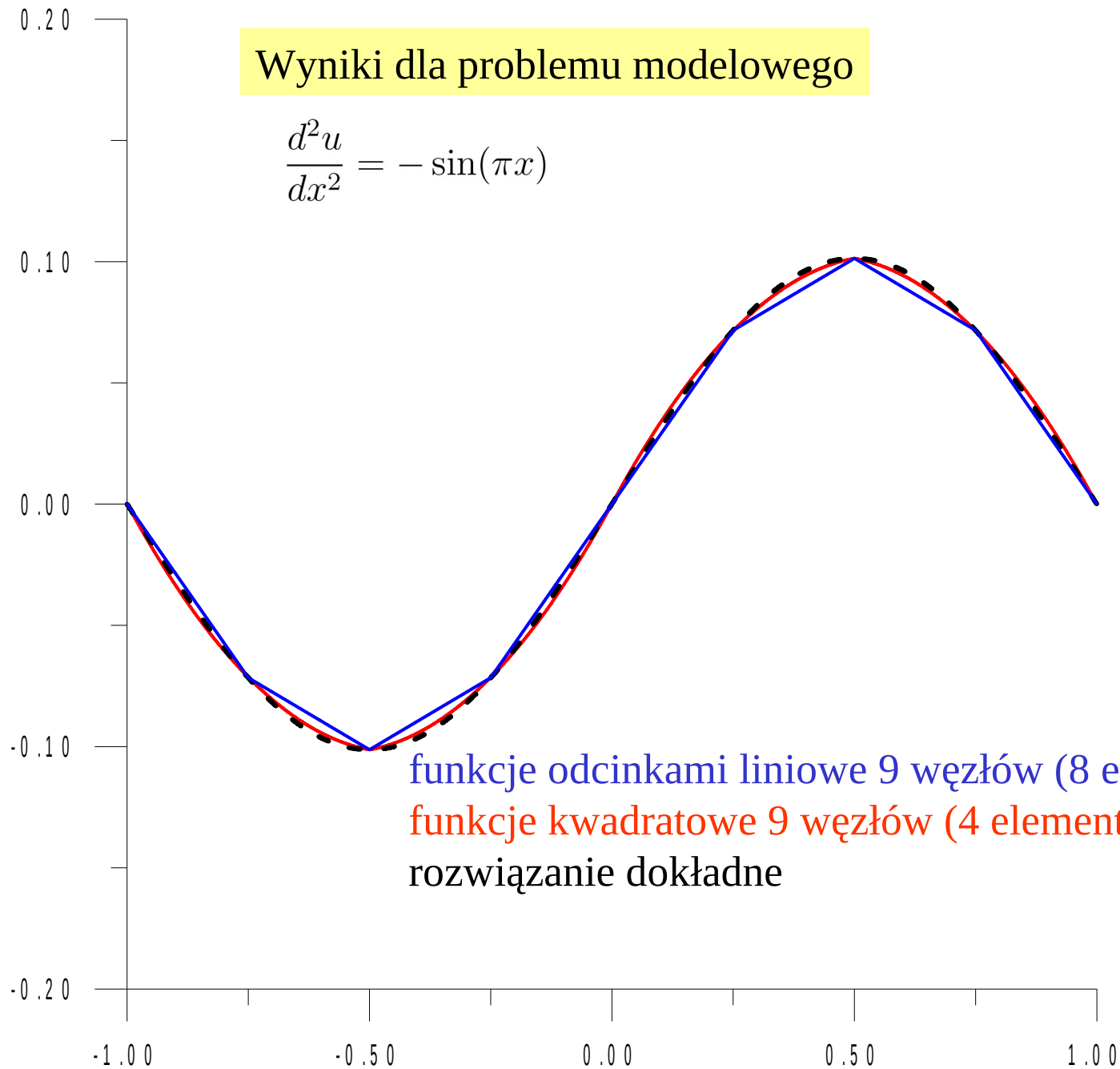
globalne

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \\ C_2 + A_3 \\ B_3 \\ C_3 + A_4 \\ \dots \\ B_n \\ 0 \end{pmatrix}$$

Liczba wierszy:  $2n+1$  (n-liczba elementów)

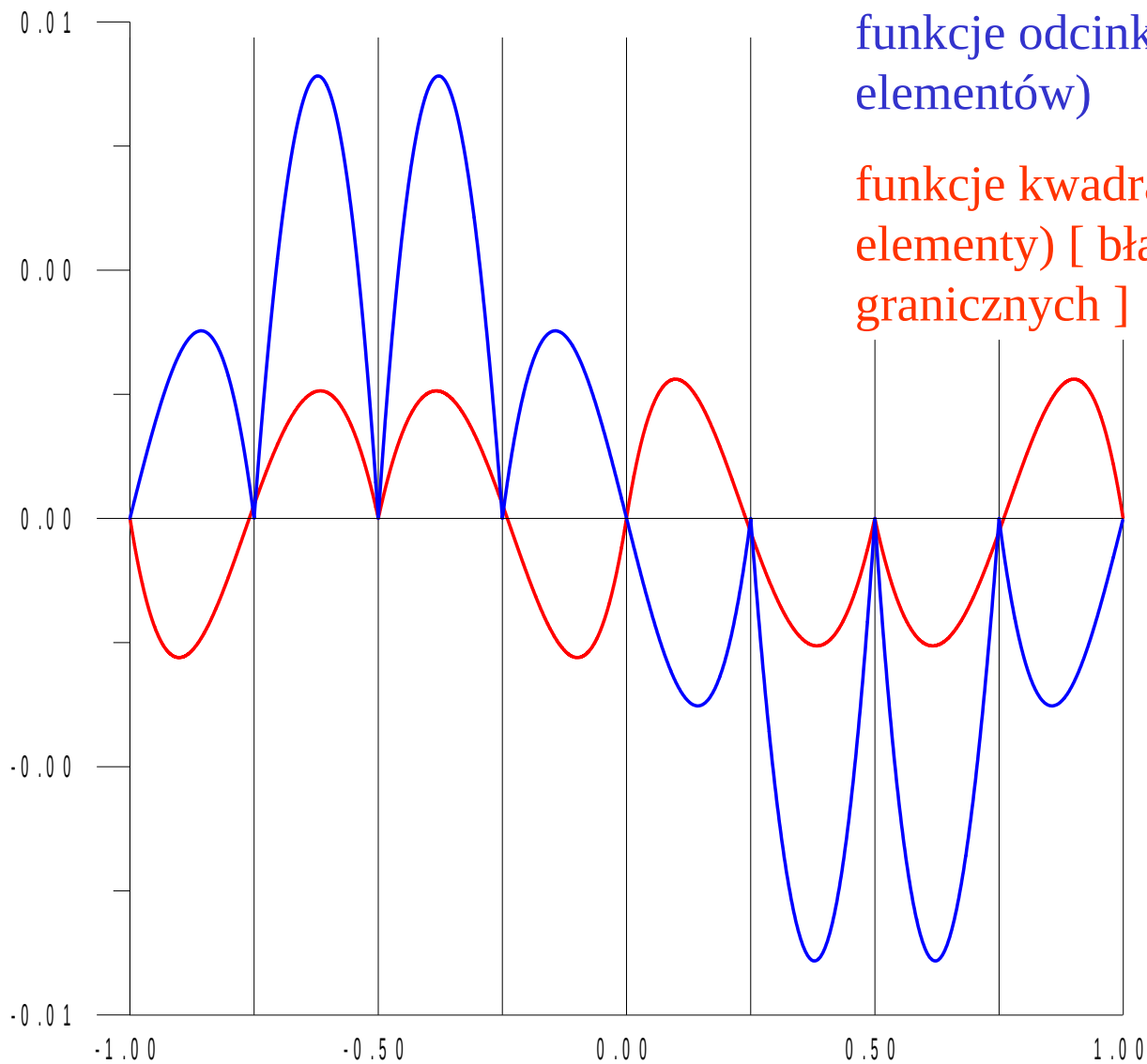
## Wyniki dla problemu modelowego

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$



$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

## Funkcje liniowe i kwadratowe



funkcje odcinkami liniowe 9 węzłów (8 elementów)

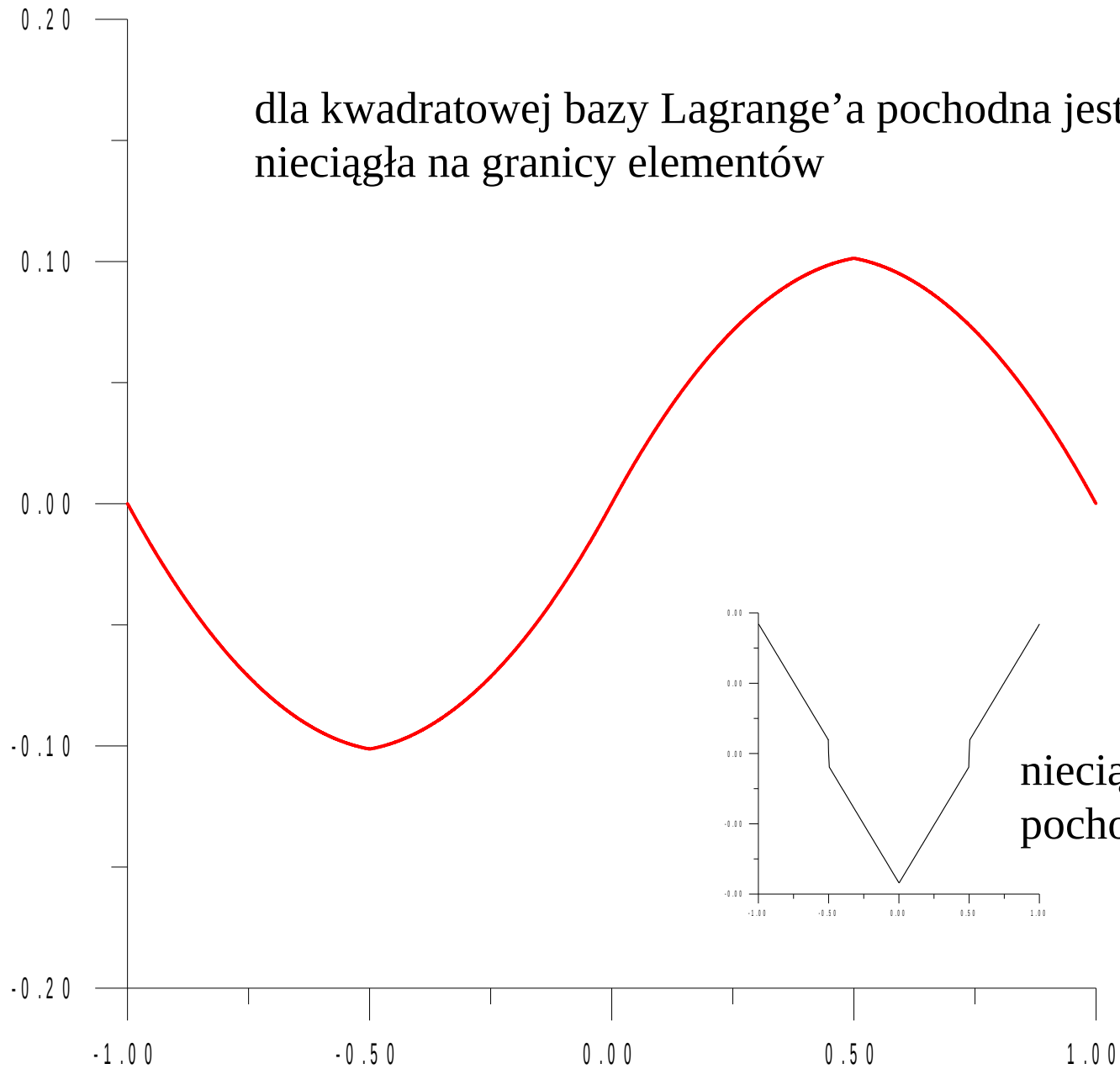
funkcje kwadratowe 9 węzłów (4 elementy) [ błąd =0 tylko na węzłach granicznych ]

jeden rząd funkcji kształtu więcej:  
maksymalny błąd  
zmniejszony trzykrotnie

rozmiar problemu liniowego bez zmian, ale **S** ma więcej niezerowych elementów

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\sin(\pi x)$$

dla kwadratowej bazy Lagrange'a pochodna jest  
nieciągła na granicy elementów

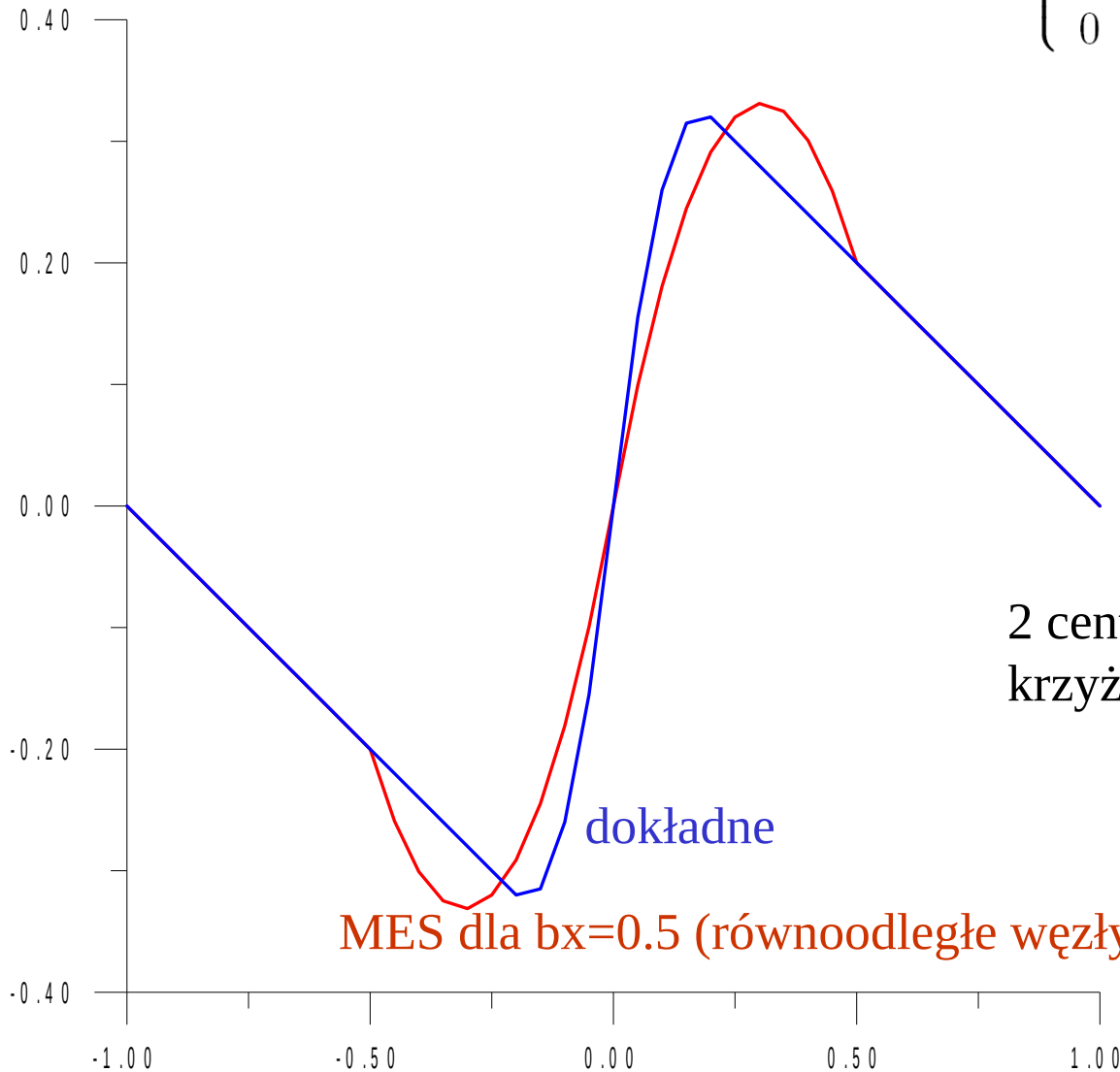




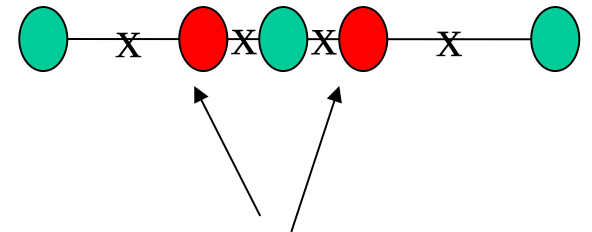
# Laboratorium:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\rho(x)$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$



4 elementy:

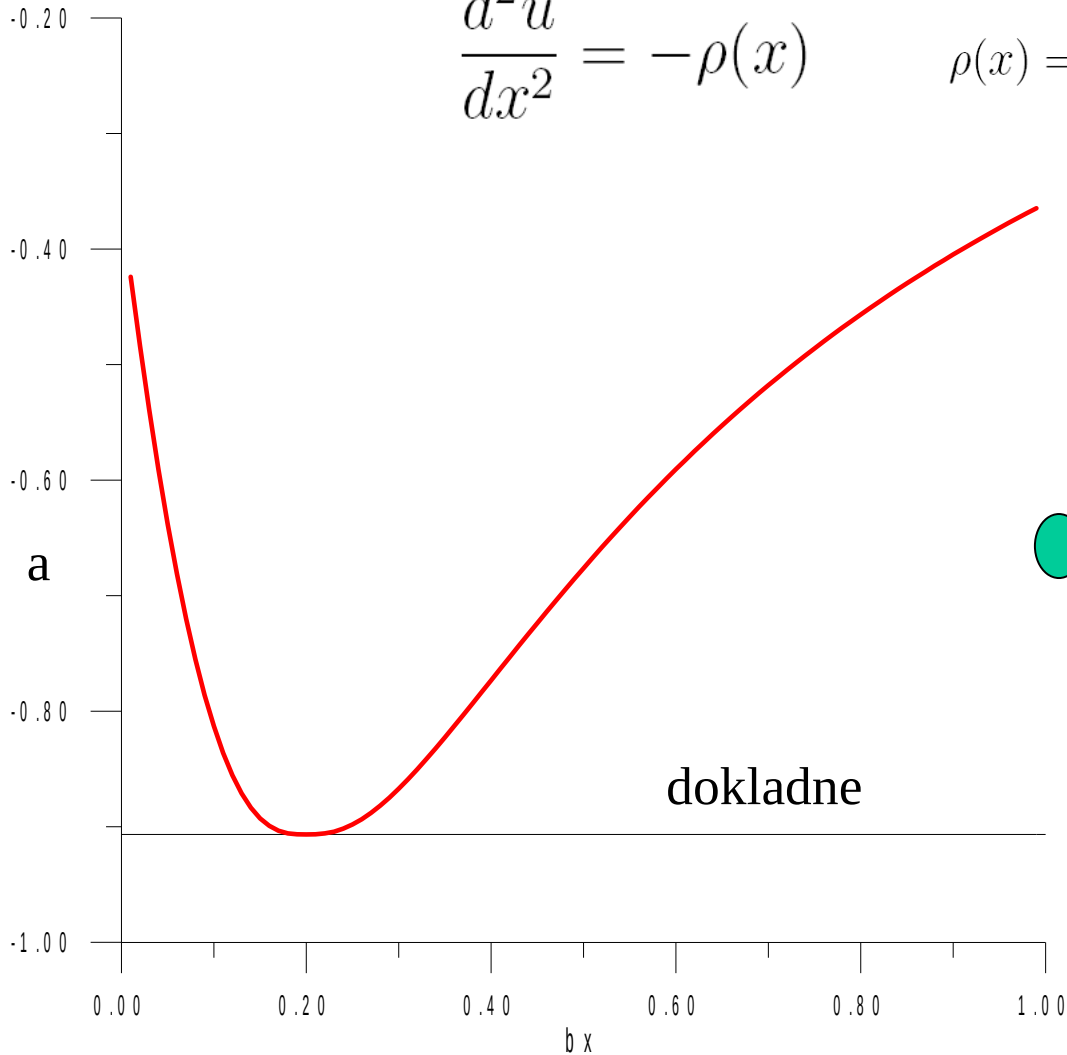


2 centralne elementy o długości  $b_x$   
krzyżyki: węzły bąbelkowe

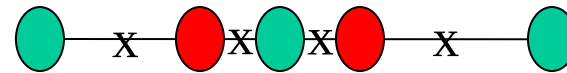
MES dla  $b_x=0.5$  (równoodległe węzły) widzimy: dokładne  
dla węzłów granicznych

# Laboratorium:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\rho(x) \quad \rho(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geq 0.2 \\ -20 & \text{dla } x \in (-0.2, 0) \\ 20 & \text{dla } x \in (0, 0.2) \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$



4 elementy:



2 centralne elementy o długości  $bx$   
krzyżyki: węzły bąbelkowe

na laboratorium zobaczymy, że potencjał dokładny odtworzony

