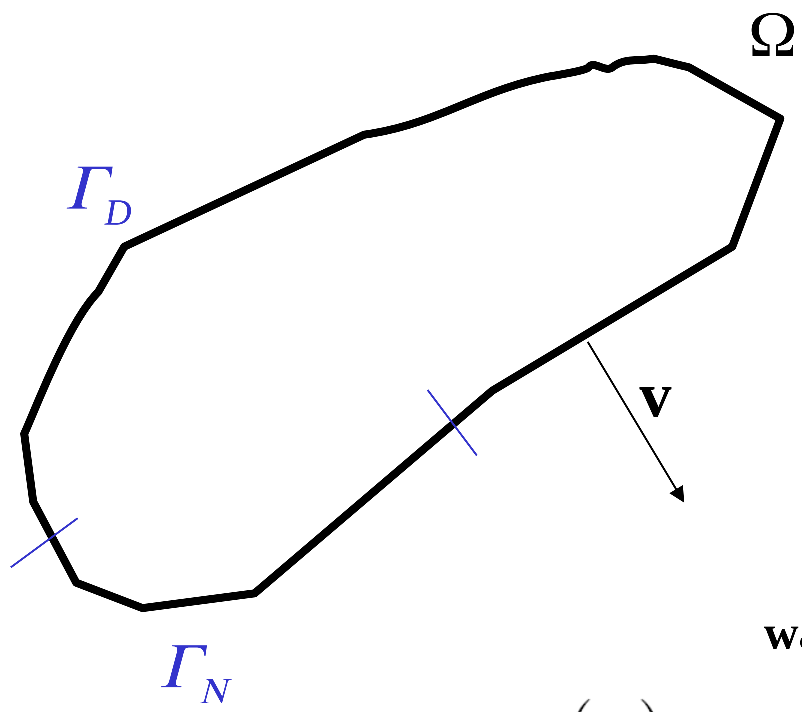
Metoda elementów skończonych, problemy dwuwymiarowe



problem modelowy:

$$-\nabla^2 u + a_0 u = f$$

w Ω

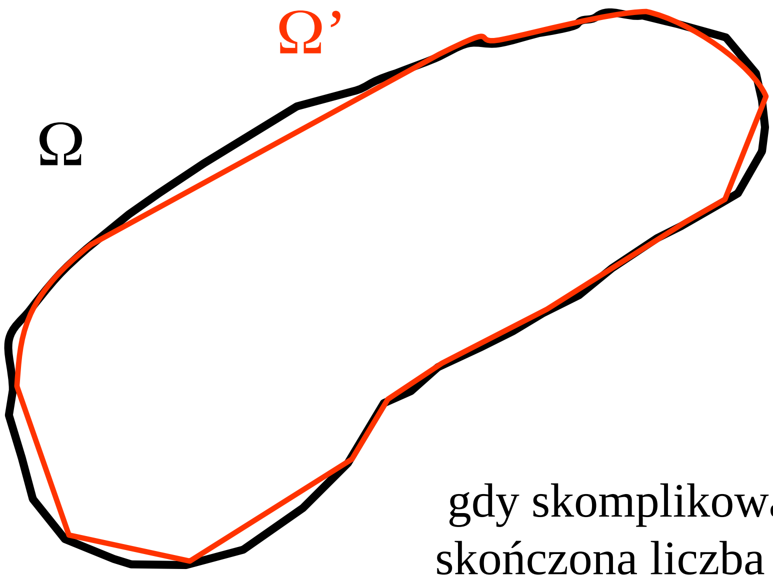
warunki brzegowe:

$$u(x) = g_D(x)$$ na Γ_D Dirichleta

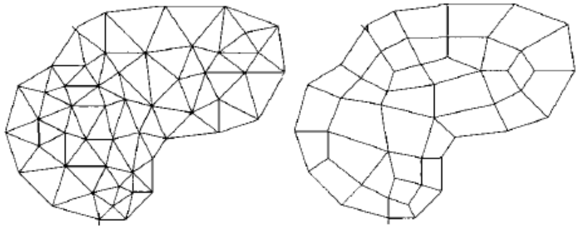
$$\frac{\partial u}{\partial v} = g_N(x)$$ na Γ_N Neumana

problem ma jednoznaczne rozwiązanie,
jeśli
brzeg Γ_D nie ma zerowej długości.

Przybliżenie brzegu



gdy skomplikowany brzeg:
skończona liczba elementów
(trójkątów, czworokątów itp)
opisuje problem tylko w sposób
przybliżony
= przybliżone warunki brzegowe



gdy brzeg opisany funkcja wielomianową
problem można opisać przypisać za pomocą
skończonej liczby elementów krzywoliniowych

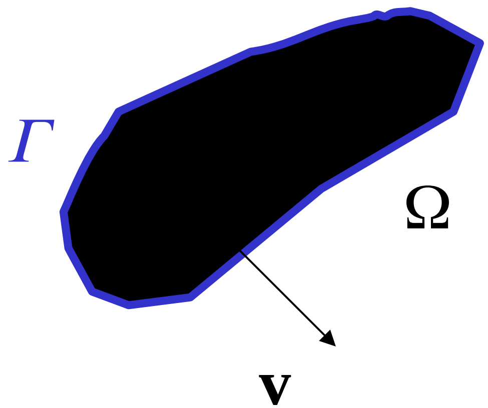
$$-\nabla^2 u + a_0 u = f$$

Słabe sformułowanie problemu z funkcją wagową *w(x)*

$$\int_\Omega \left(-\nabla^2 u + a_0 u\right) w(x) d\Omega = \int_\Omega f(x) w(x) d\Omega$$

całkowanie macierzy sztywności

Całkowanie przez części, 2 i więcej wymiary



Tw. Gaussa

$$\int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\Gamma = \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{A} d\Omega$$

strumień pola wektorowego przez zamkniętą powierzchnię = dywergencja pola wewnątrz objętości ograniczonej powierzchnią

A niech będzie potencjalnym polem wektorowym

$$\mathbf{A} = \nabla a$$

$$\int_\Gamma \nabla a \cdot d\Gamma = \int_\Omega \nabla \cdot \nabla a d\Omega$$

$$\int_\Gamma \mathbf{A}\cdot d\Gamma = \int_\Omega \nabla\cdot\mathbf{A}d\Omega$$

a,b – dwie funkcje skalarne

tożsamość:

$$\nabla\cdot(a\nabla b) = a\nabla^2 b + (\nabla a)\cdot(\nabla b)$$

scałkować po objętości

$$\int_\Omega \nabla\cdot(a\nabla b)d\Omega = \int_\Gamma a\nabla b d\Gamma$$

$$\int_\Gamma a\nabla b d\Gamma = \int_\Omega a\nabla^2 b d\Omega + \int_\Omega \nabla a\cdot\nabla b d\Omega$$

całkowanie przez części
tw. Gaussa-Greena

W 1D

$$a\frac{db}{dx}\bigg|_{x=x_1}^{x=x_2} = \int_{x_1}^{x_2} a\frac{d^2b}{dx^2}dx + \int_{x_1}^{x_2}\frac{da}{dx}\frac{db}{dx}dx$$

całka brzegowa w 1D: brzeg składa się z dwóch punktów wracamy do słabej formy równania różniczkowego

$$\int_\Omega \left(-\nabla^2 u + a_0 u\right) w(x) d\Omega = \int_\Omega f(x) w(x) d\Omega$$

tw. G-G

$$\int_\Gamma a \nabla b d\Gamma = \int_\Omega a \nabla^2 b d\Omega + \int_\Omega \nabla a \cdot \nabla b d\Omega$$

$$-\int_\Omega (\nabla^2 u) w d\Omega = \int_\Omega (\nabla u) \cdot (\nabla v) d\Omega - \int_\Gamma (\nabla u) w d\Gamma$$

redukuje rząd pochodnych

$$\int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla w + a_0 u w\right) d\Omega = \int_\Omega f w d\Omega + \underline{\int_\Gamma w \nabla u d\Gamma}$$

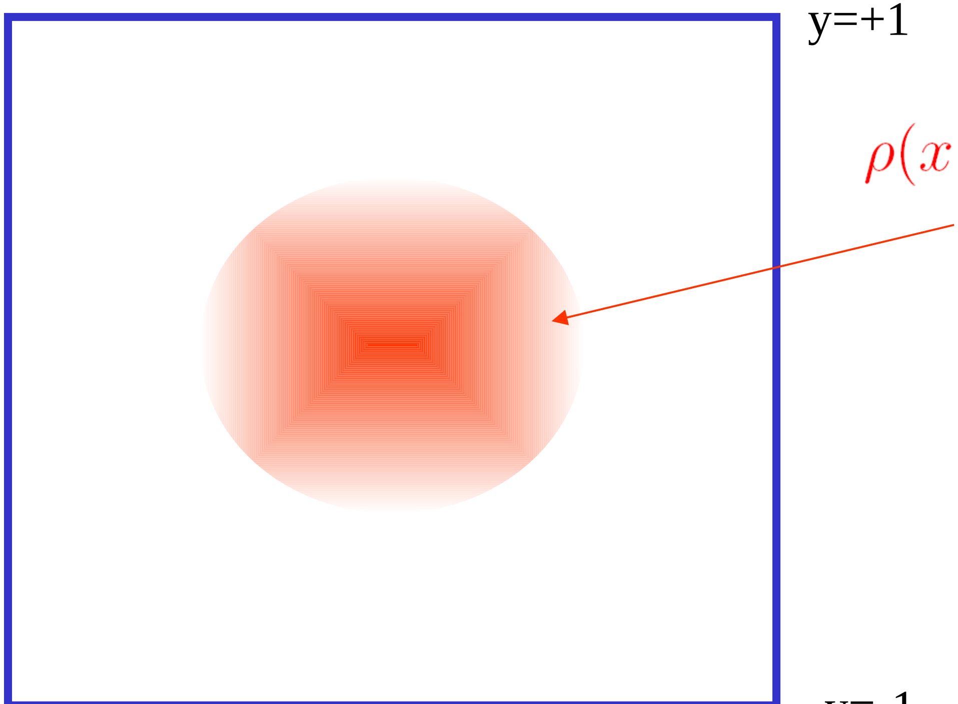
na części Γ: w. brzegowy na wartość u.
Całka po Γ znika jeśli *w*(na Γ)=0 . U Galerkina – *w* takie jak funkcje bazowe.
Jeśli rozwiązanie *u* nie znika na brzegu, całka brzegowa istnieje i trzeba się z nią uporać.
W dalszej części wykładu – metoda elementów brzegowych, gdzie tego typu całki omawianie

Pierwszy problem:

uziemiona skrzynka potencjał u=0

y=+1

$$\rho(x,y) = \exp(-50(x^2+y^2))$$



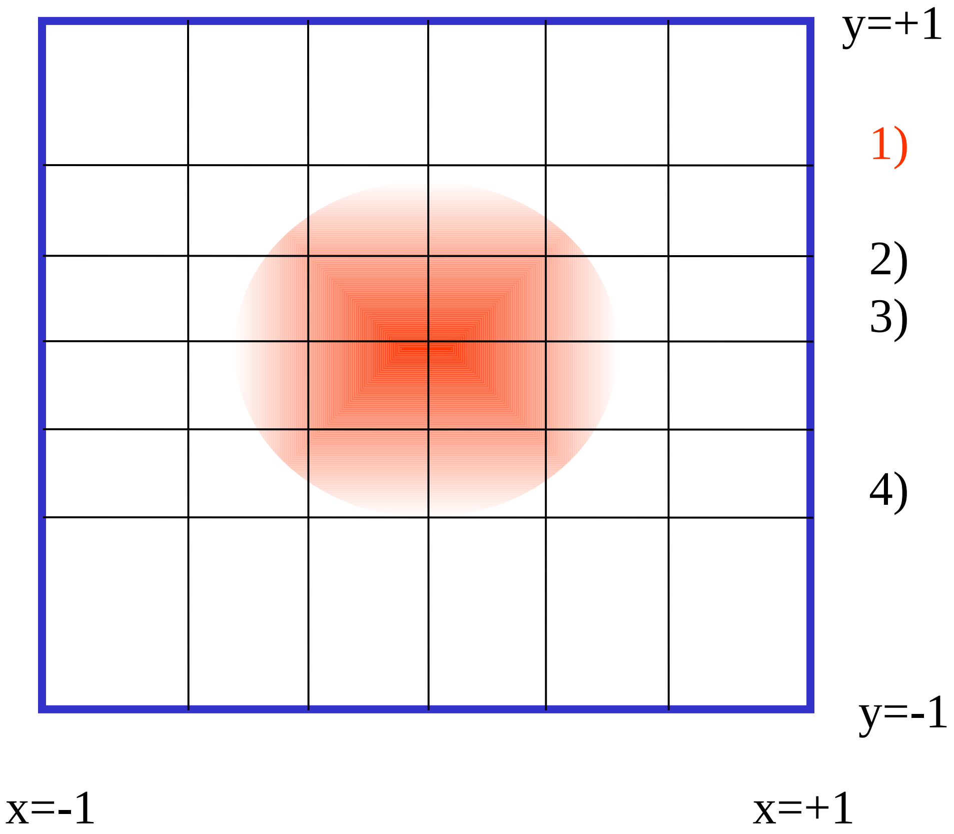
y=-1

x=-1

x=+1

$$\nabla^2 u = -\rho(x,y)$$

Pierwszy problem:

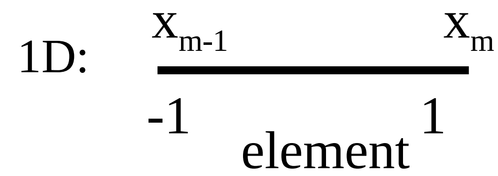


1) podzielić płaszczyznę na elementy (zaczniemy od czworokątnych el.)
2) wybrać funkcje kształtu
3) policzyć macierze sztywności i wektory obciążeń dla wszystkich elementów
4) złożyć globalną macierz sztywności i globalny wektor obciążeń

$$\nabla^2 u = -\rho(x, y)$$

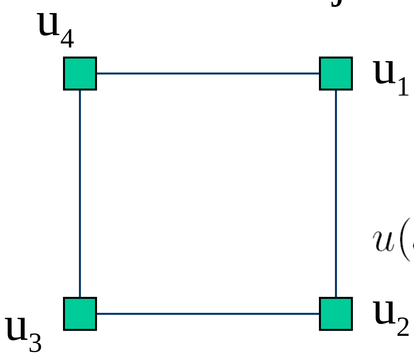
wybrać funkcje kształtu

najniższy rząd na kwadratowym elemencie:
biliniowe funkcje kształtu

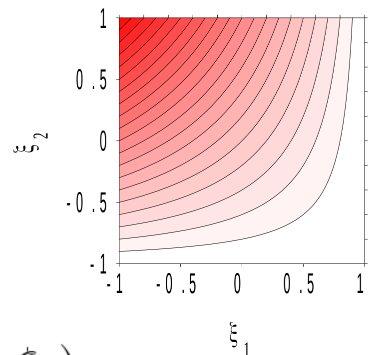


ϕ_1 =1/2 –1/2 ξ

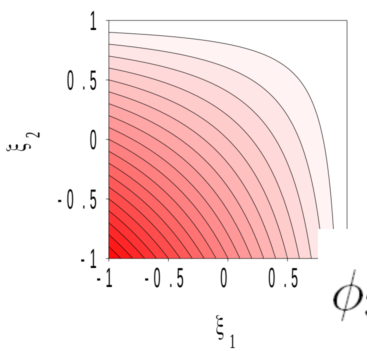
ϕ_2 =1/2 +1/2 ξ



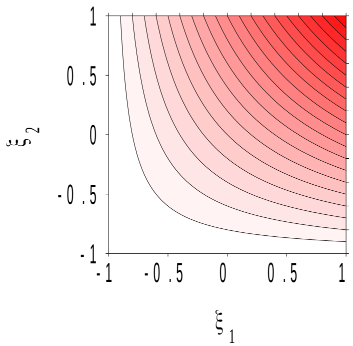
$$u(\xi_1,\xi_2) = u_1\phi_1(\xi_1,\xi_2) + u_2\phi_2(\xi_1,\xi_2) + u_3\phi_3(\xi_1,\xi_2) + u_4\phi_4(\xi_1,\xi_2)$$

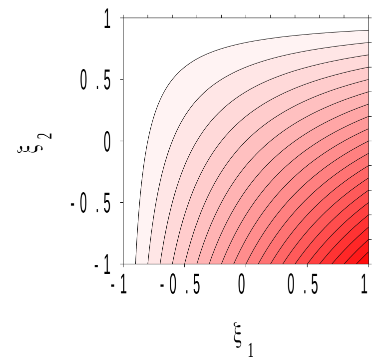


$$\phi_4(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$$



$$\phi_3(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$$



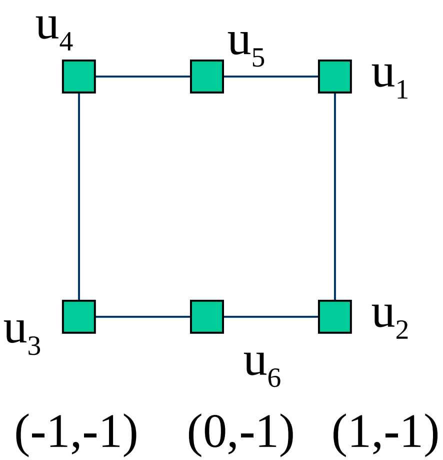


każda z funkcji kształtu:
osiąga wartość 1 w jednym za narożników
zeruje się w pozostałych

$$\phi_1(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \qquad \phi_2(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2)$$

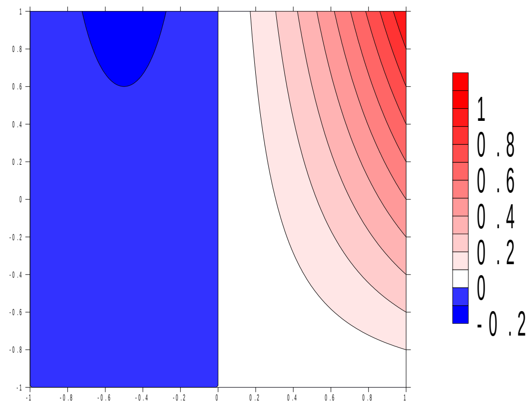
wyższego rzędu: iloczyny funkcji bazowych Lagrange'a w obydwu wymiarach

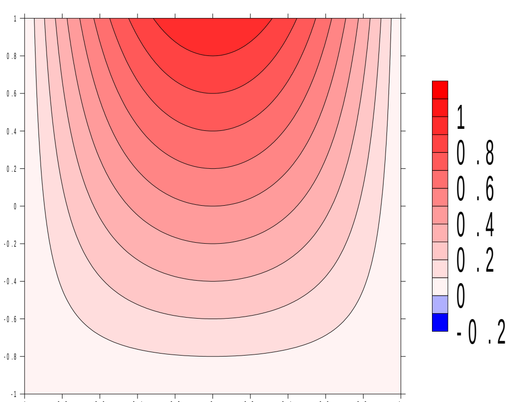
np. kwadratowe w x, liniowe w y



$$u(\xi_1,\xi_2)=\sum_{i=1}^{6}u_i\phi_i(\xi_1,\xi_2)$$

$$\phi_1(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{2}(\xi_2+1)\times\frac{(\xi_1)(\xi_1+1)}{2}$$

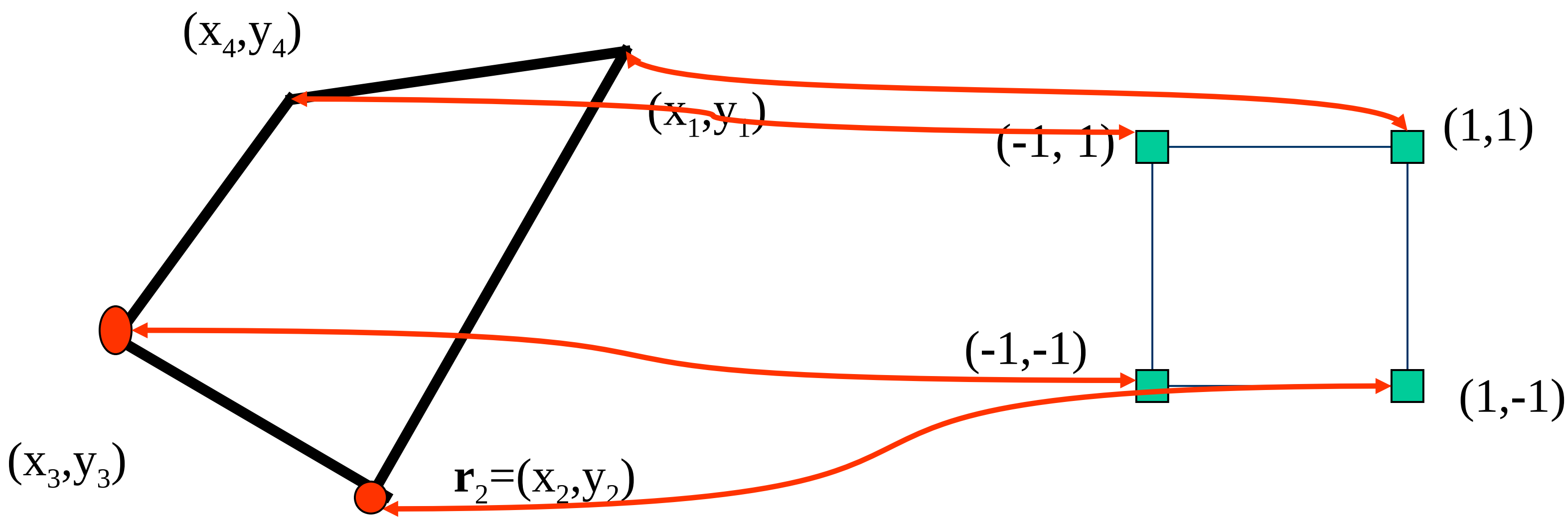




itd.

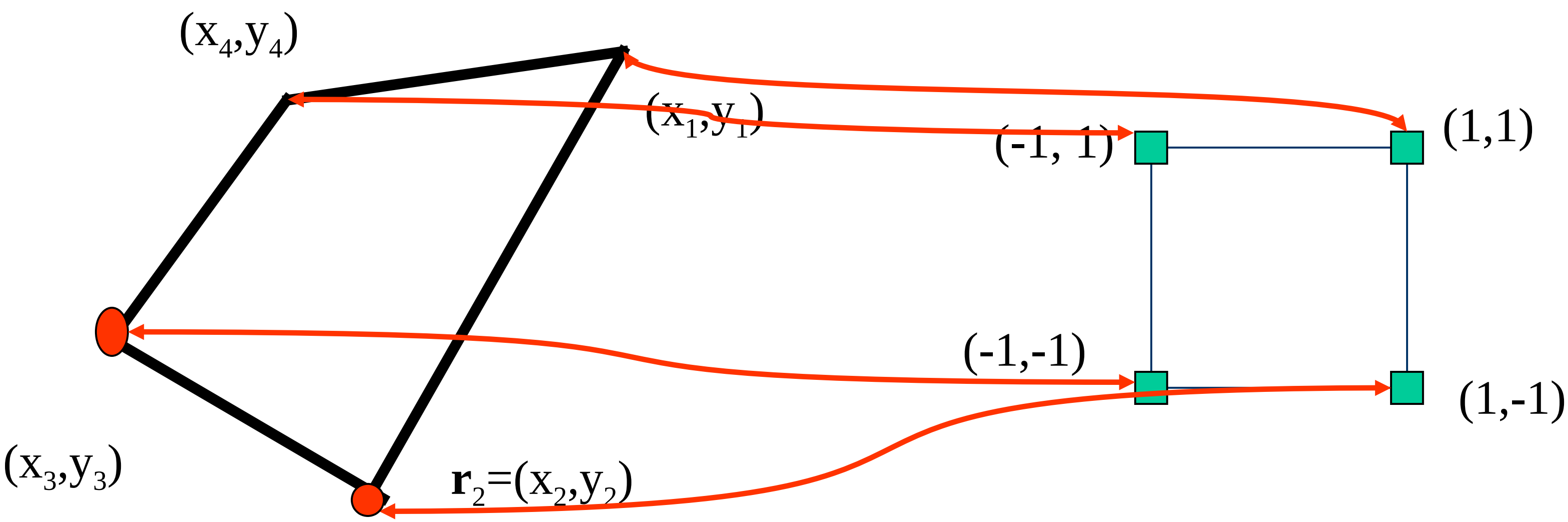
$$\phi_{\cancel{6}\,5}(\xi_1,\xi_2)=-\frac{1}{2}(\xi_2+1)\times(\xi_1-1)(\xi_1+1)$$

3) transformacja elementu z przestrzeni referencyjnej



wzajemnie jednoznaczne mapowanie ??? Jak to zrobić?

3) transformacja elementu z przestrzeni referencyjnej



wzajemnie jednoznaczne mapowanie:??? Jak to zrobić? - zaskakująco łatwo

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{r}_i \phi_i(\xi) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

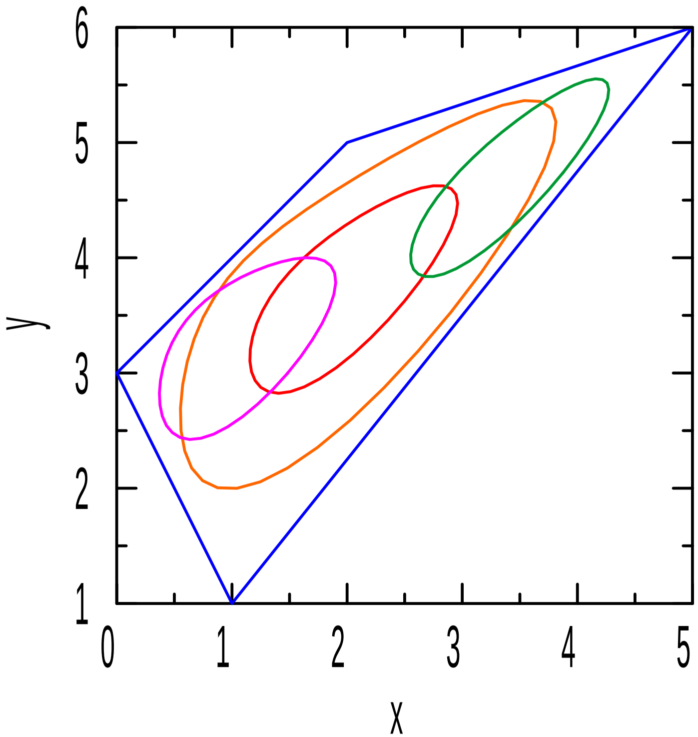
biliniowe funkcje kształtu (do mapowania zawsze, nawet gdy używane są później wyższe)

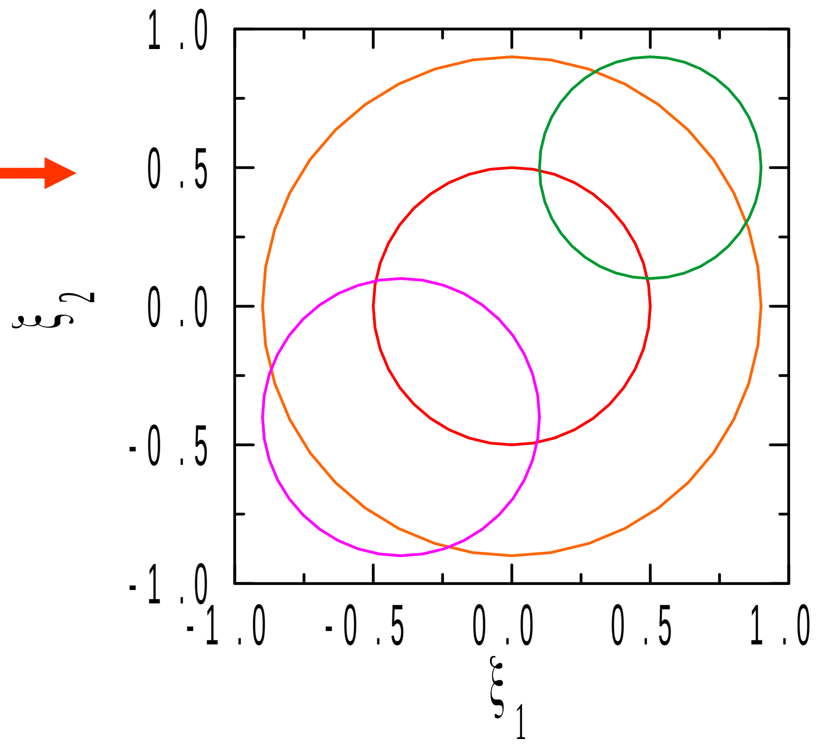
$$\phi_1(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \qquad \phi_3(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$$

$$\phi_2(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \qquad \phi_4(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$$

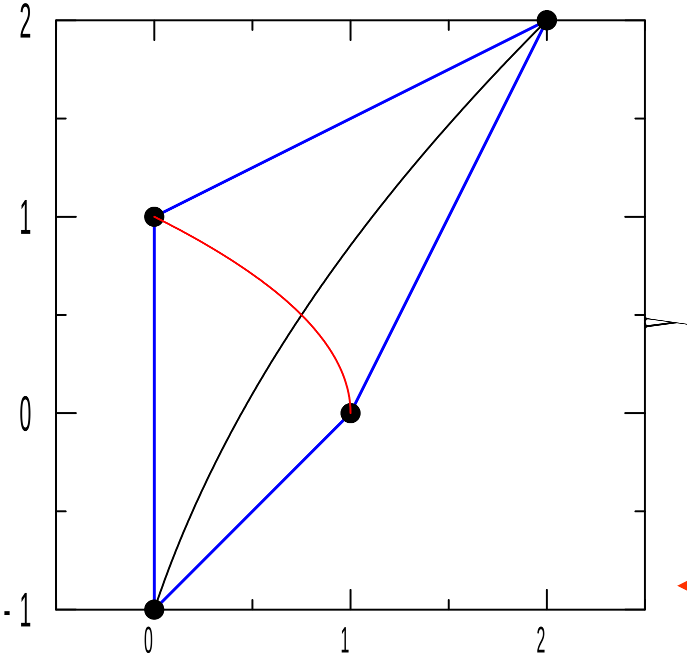
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

składanie narożników
: w każdym tylko 1 funkcja nie znika

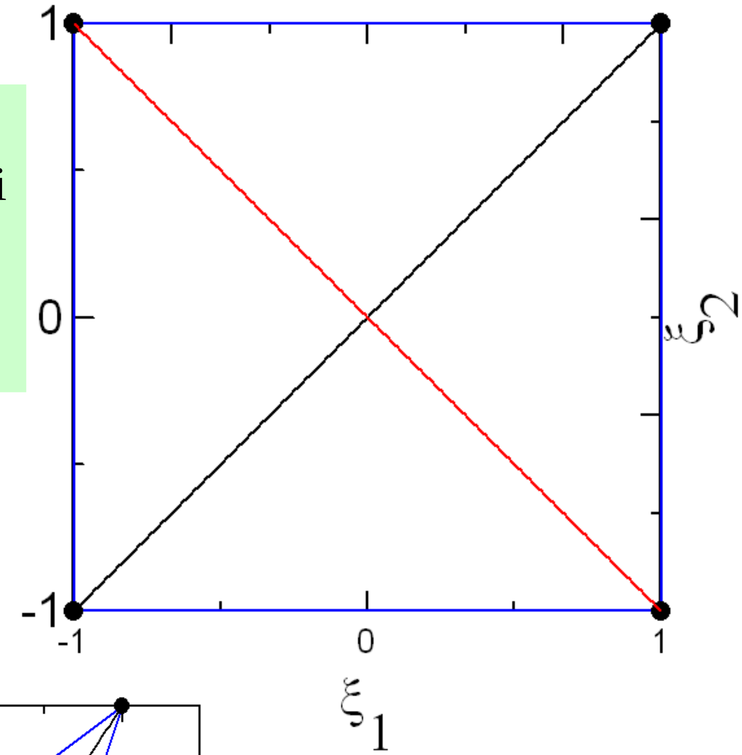


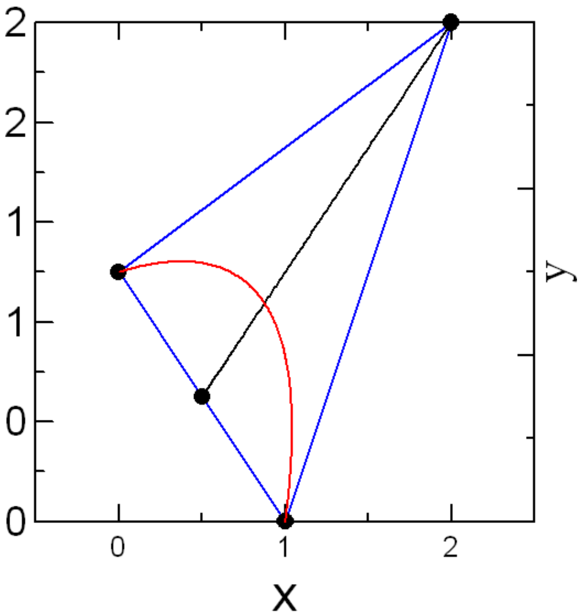


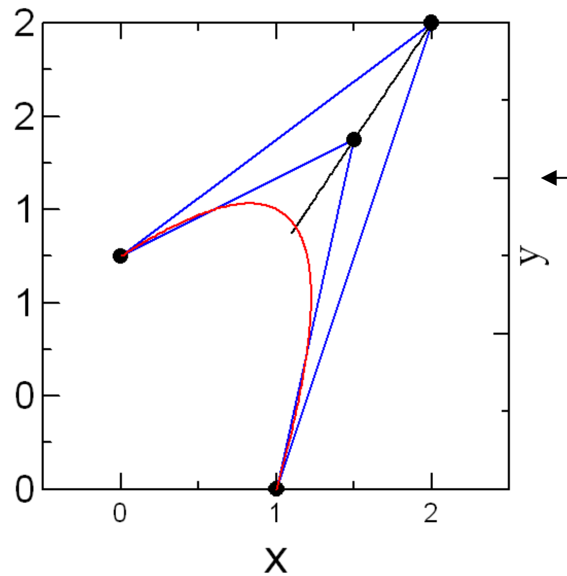
co się dzieje z przekątnymi? transformacja elementu do przestrzeni referencyjnej



przekształcenie nie jest liniowe i nie zachowuje równoległości prostych

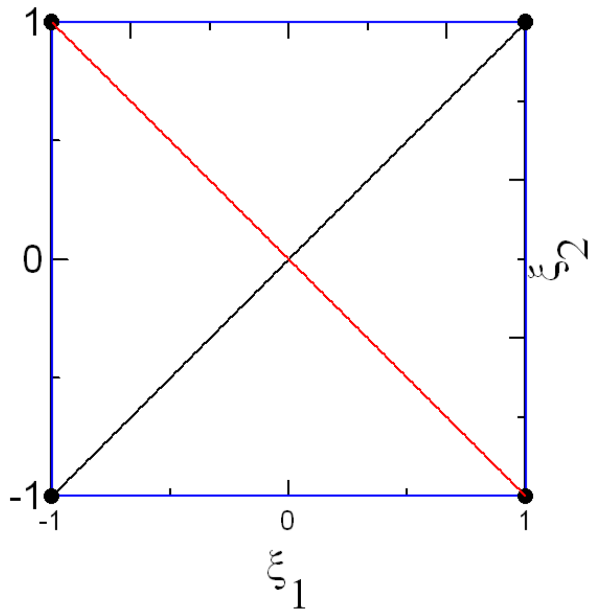


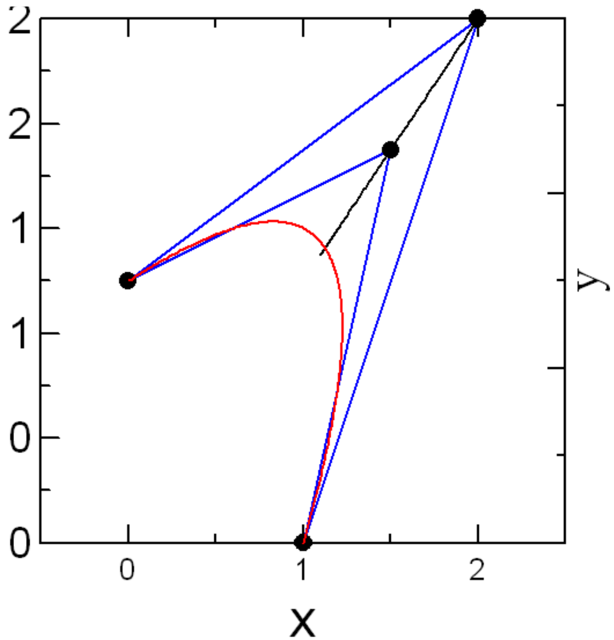


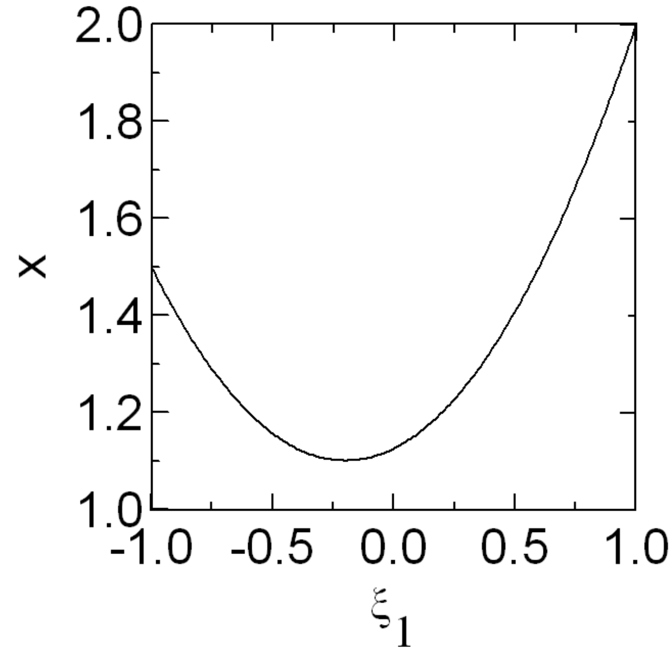


element wklęsły
wnętrze mapowane na zewnętrze,
nie chcemy takich elementów.
mają być wypukłe

element wklęsły niedobry -mapowanie nie jest bijekcją







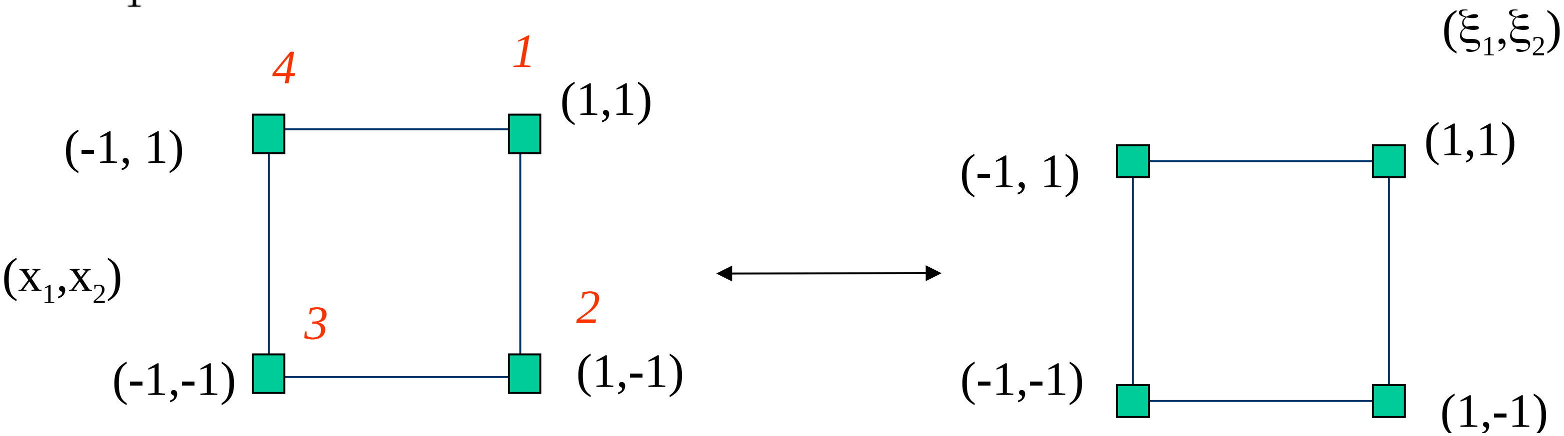
liczone wzdłuż antydiagonali

Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 1. tożsamość

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$\phi_1(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \qquad \phi_3(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$$

$$\phi_2(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \qquad \phi_4(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$$



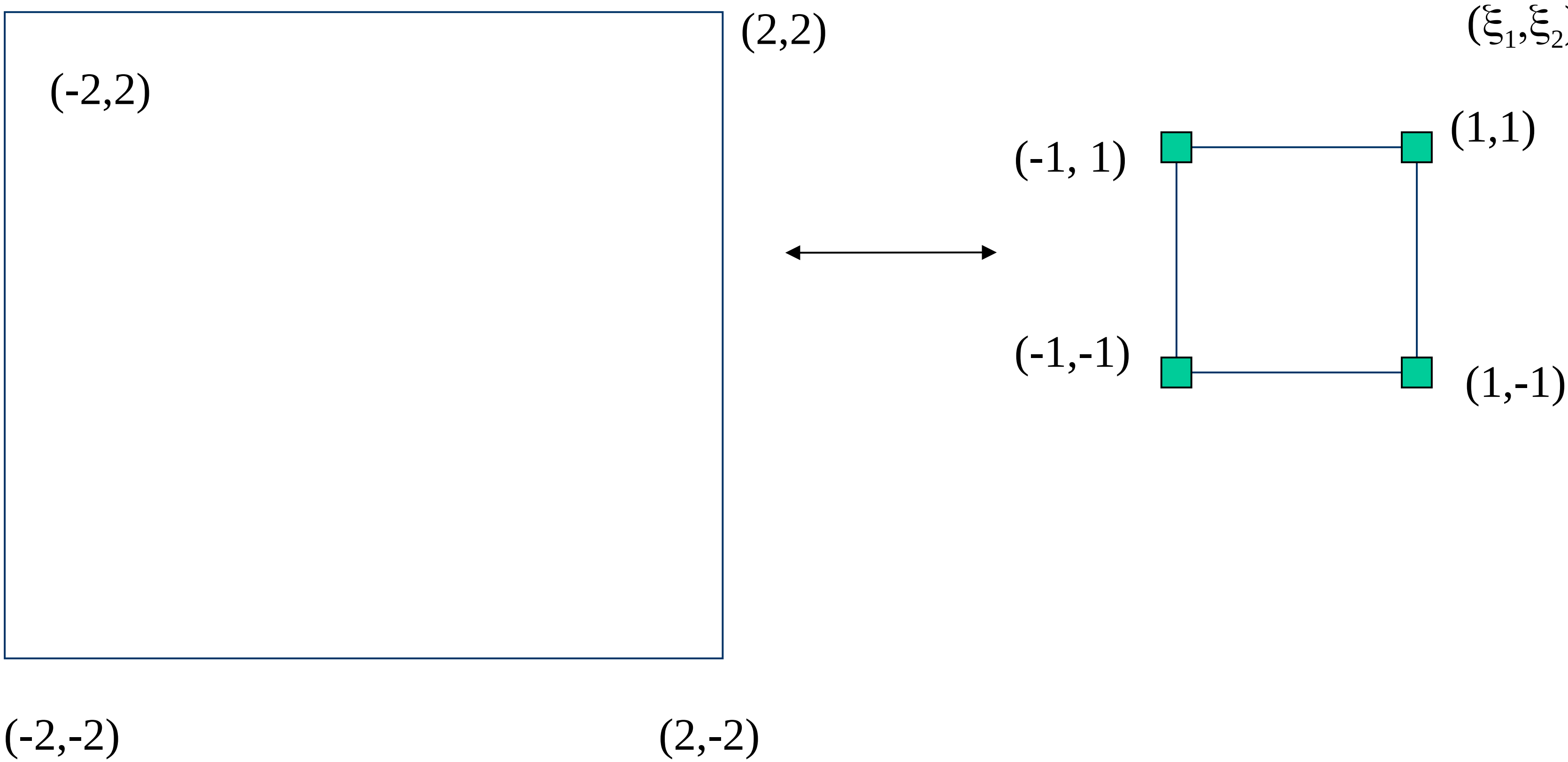
$$x = \frac{1}{4}\left[(1+\xi_1)(1+\xi_2) + (1+\xi_1)(1-\xi_2) - (1-\xi_1)(1-\xi_2) - (1-\xi_1)(1+\xi_2)\right]$$

$$x = \frac{1}{4}\left[2(1+\xi_1) - 2(1-\xi_1)\right] = \xi_1$$

$$y = \frac{1}{4}\left[(1+\xi_1)(1+\xi_2) - (1+\xi_1)(1-\xi_2) - (1-\xi_1)(1-\xi_2) + (1-\xi_1)(1+\xi_2)\right]$$

$$y = \frac{1}{4}\left[2(1+\xi_2) - 2(1-\xi_2)\right] = \xi_2$$

Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 2 powiększenie

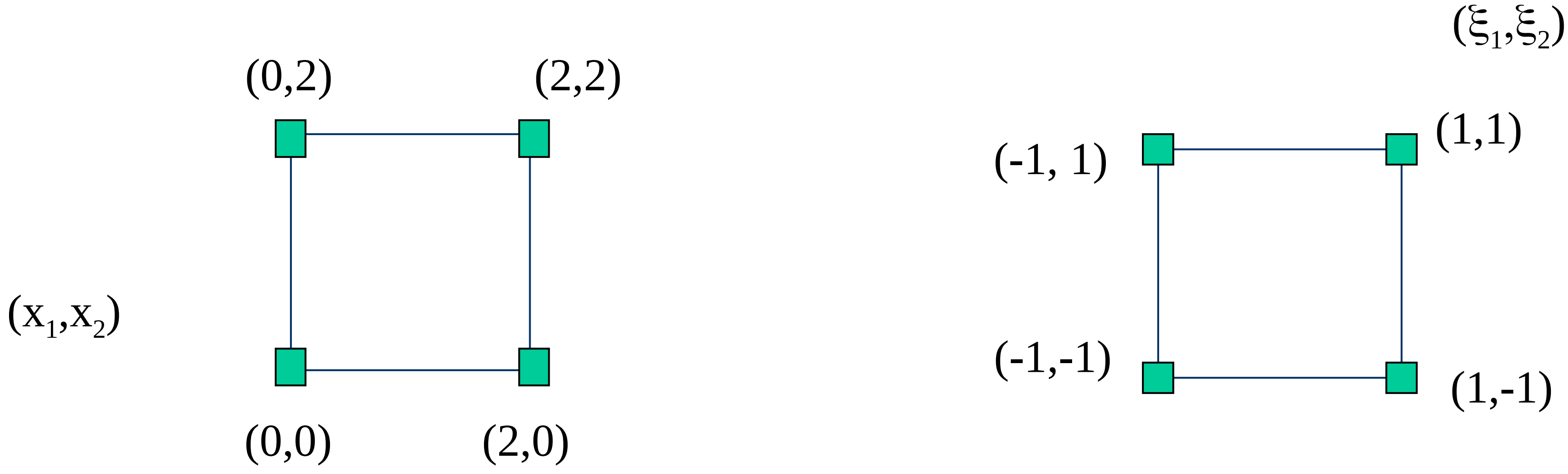


$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$x = 2\xi_1$$

$$y = 2\xi_2$$

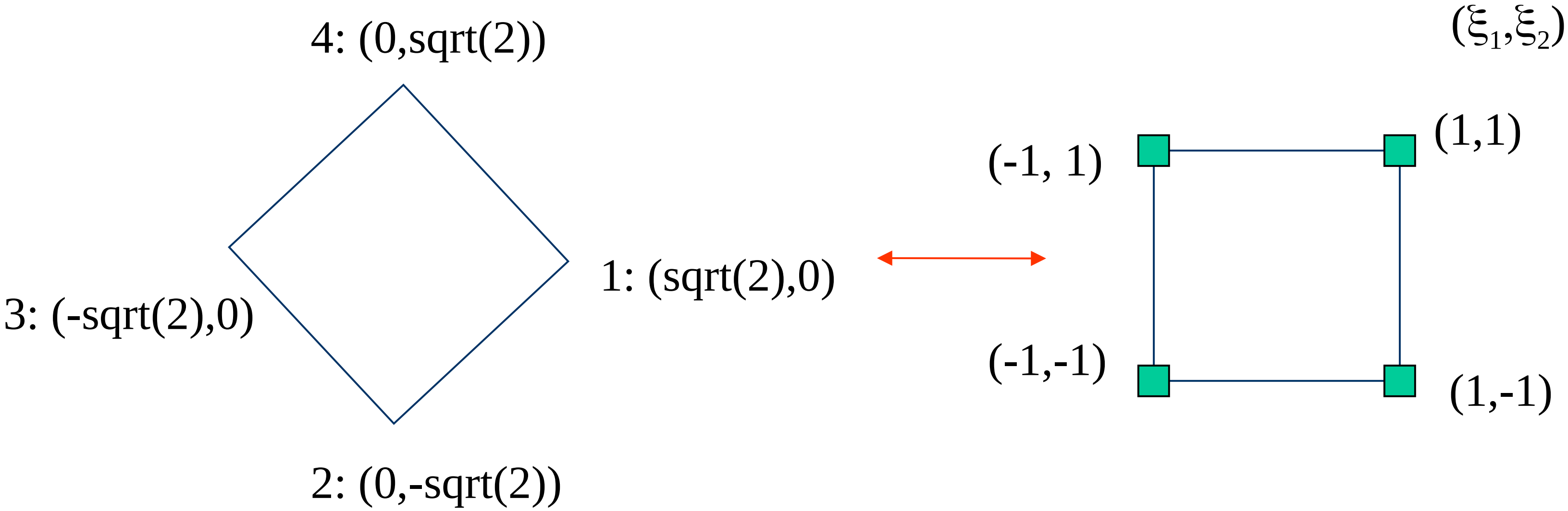
Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 3 przesunięcie



$$x = \frac{1}{4}\left[2(1+\xi_1)(1+\xi_2) + 2(1+\xi_1)(1-\xi_2)\right] = \xi_1 + 1$$

$$y = \frac{1}{4}\left[2(1+\xi_1)(1+\xi_2) + 2(1-\xi_1)(1+\xi_2)\right] = \xi_2 + 1$$

Mapowanie p. referencyjnej na fizyczną: przypadki szczególne 4 obrót



$$x = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}(1+\xi_1)(1+\xi_2) - \sqrt{2}(1-\xi_1)(1-\xi_2)\right) \qquad x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\xi_1 + \xi_2\right)$$

$$y = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{2}(1+\xi_1)(1-\xi_2) + \sqrt{2}(1-\xi_1)(1+\xi_2)\right) \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\xi_1 + \xi_2\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$\theta = -\pi/4$

Macierz sztywności-całkowanie w przestrzeni referencyjnej

f=-ρ(x,y)

bo warunki brzegowe

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w + \cancel{a_0} uw)\, d\Omega = \int_\Omega f w d\Omega + \int_\Gamma \cancel{w} \nabla u d\Gamma$$

bo tego nie ma w równaniu (Poissona)

$$u(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^{m} u_i \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

Galerkin: $w = \phi_j(\xi_1, \xi_2)$

do macierzy sztywności

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x}$$

$$\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \left(\sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right) \times \left(\sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial x}\right) + \left(\sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial y}\right) \times \left(\sum_k \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_k}\frac{\partial \xi_k}{\partial y}\right)$$

$$\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j = \left(\sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\right)\times\left(\sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\right)+\left(\sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial y}\right)\times\left(\sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial y}\right)$$

potrzebne

$$\frac{\partial\xi_k}{\partial x} \quad \frac{\partial\xi_k}{\partial y}$$ k=1,2 a mamy $x(\xi_1, \xi_2)$ i $y(\xi_1, \xi_2)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial y}{\partial\xi_2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial\xi_1}\frac{\partial y}{\partial\xi_2} - \frac{\partial y}{\partial\xi_1}\frac{\partial x}{\partial\xi_2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial\xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial\xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_1} \end{pmatrix}$$

Jakobian

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\frac{\partial x}{\partial \xi_2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2) \qquad \phi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1-\xi_2)$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1-\xi_2) \qquad \phi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1-\xi_1)(1+\xi_2)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}(1+\xi_2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}(1-\xi_2)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{4}(1-\xi_2)$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial \xi_1} = -\frac{1}{4}(1+\xi_2)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}(1+\xi_1)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{4}(1+\xi_1)$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{4}(1-\xi_1)$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}(1-\xi_1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}\left(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \xi_2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}\left(x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + \xi_1(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}\left(y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + \xi_2(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}\left(y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + \xi_1(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1}\frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi_1}\frac{\partial x}{\partial \xi_2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$$

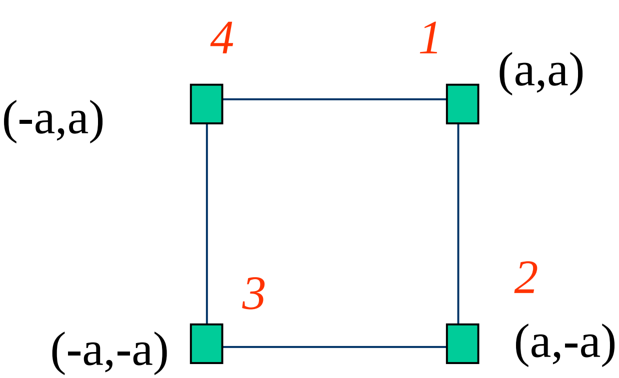
Jakobian (mianownik)

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{8}\xi_1 \left((x_1 - x_4)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_1 - y_4) \right) \\ &+ \frac{1}{8}\xi_2 \left((x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (x_3 - x_4)(y_1 - y_2) \right) \\ &+ \frac{1}{8}\left((x_1 - x_3)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_1 - y_3) \right) \end{aligned}$$

zależy od kształtu i rozmiaru elementu w przestrzeni fizycznej

---

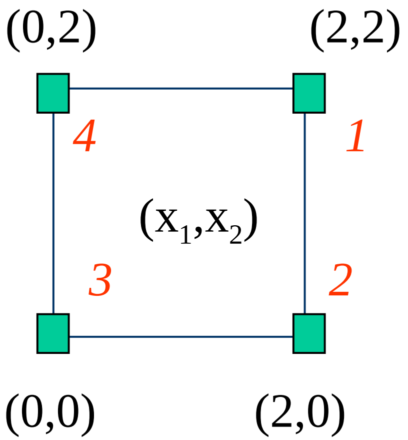
Jakobian dla powiększenia

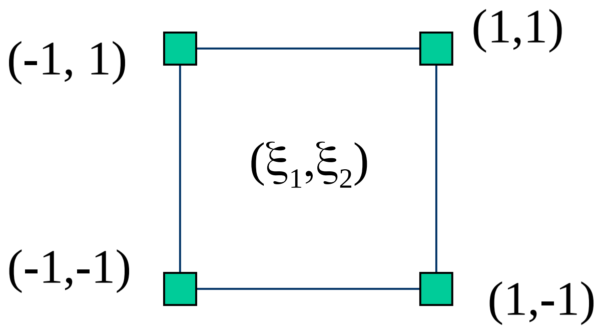


$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{8}\xi_1 \left((x_1 - x_4)(y_3 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_1 - y_4) \right) \\ &+ \frac{1}{8}\xi_2 \left((x_1 - x_2)(y_4 - y_3) + (x_3 - x_4)(y_1 - y_2) \right) \\ &+ \frac{1}{8}\left((x_1 - x_3)(y_4 - y_2) - (x_4 - x_2)(y_1 - y_3) \right) \end{aligned}$$

$\boxed{J=a^2}$

Jakobian dla przesunięcia

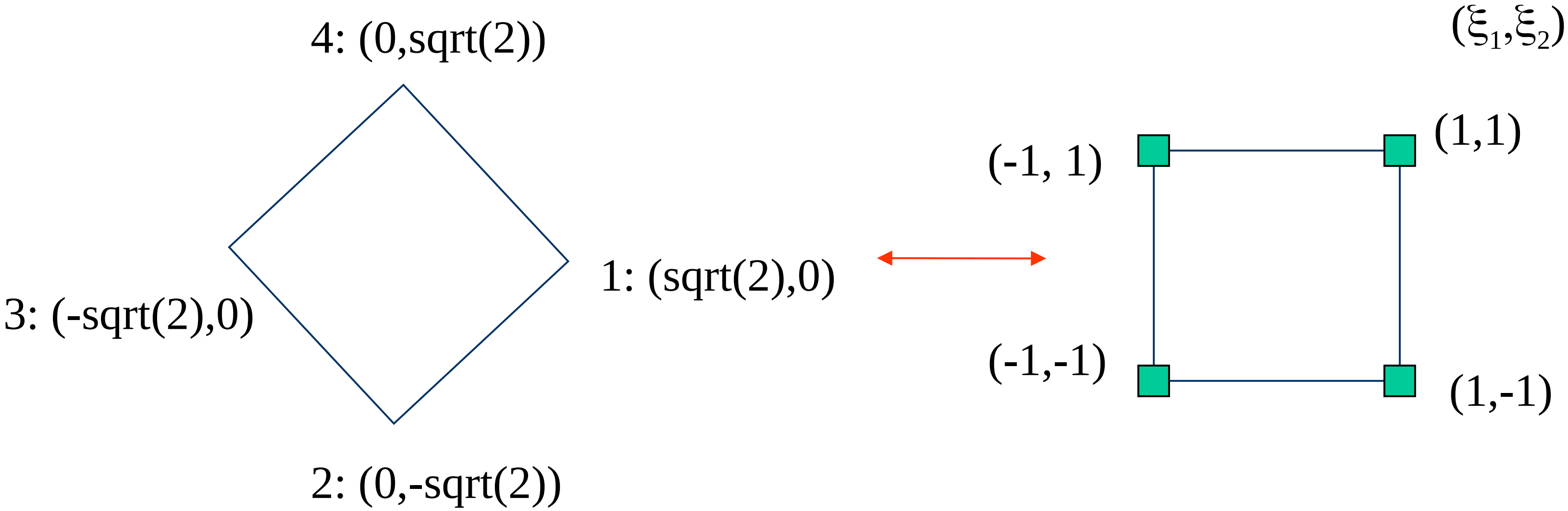




$$\begin{aligned} J \;=\; & \frac{1}{8}\xi_1 \left(\left(x_1 - x_4\right)\left(y_3 - y_2\right) + \left(x_2 - x_3\right)\left(y_1 - y_4\right)\right) \\ & + \frac{1}{8}\xi_2 \left(\left(x_1 - x_2\right)\left(y_4 - y_3\right) + \left(x_3 - x_4\right)\left(y_1 - y_2\right)\right) \\ & + \frac{1}{8}\left(\left(x_1 - x_3\right)\left(y_4 - y_2\right) - \left(x_4 - x_2\right)\left(y_1 - y_3\right)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{J=1}$$

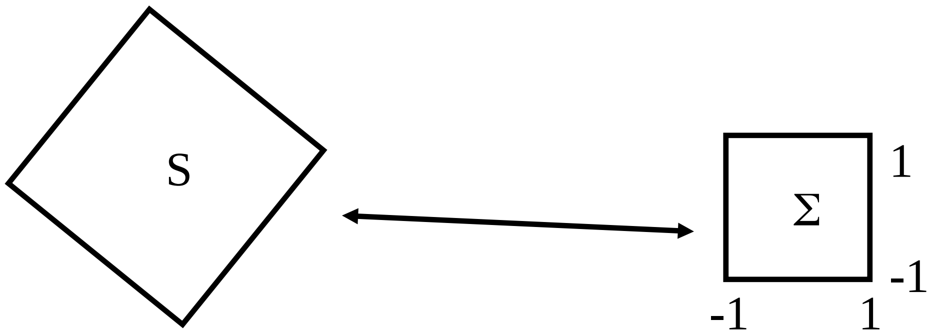
Jakobian dla obrotu



$$\begin{aligned} J \;=\; & \frac{1}{8}\xi_1\left(\left(x_1-x_4\right)\left(y_3-y_2\right)+\left(x_2-x_3\right)\left(y_1-y_4\right)\right) \\ & +\frac{1}{8}\xi_2\left(\left(x_1-x_2\right)\left(y_4-y_3\right)+\left(x_3-x_4\right)\left(y_1-y_2\right)\right) \\ & +\frac{1}{8}\left(\left(x_1-x_3\right)\left(y_4-y_2\right)-\left(x_4-x_2\right)\left(y_1-y_3\right)\right) \end{aligned}$$

J=1

Ogólnie, przy transformacjach zachowujących kształt [kwadrat=kwadrat] J=const



$$S = \int dS = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J(\xi_1, \xi_2) = 4J$$

$J=S/4$

stosunek pola elementu fizycznego
do pola elementu odniesienia (J=czynnik skali)

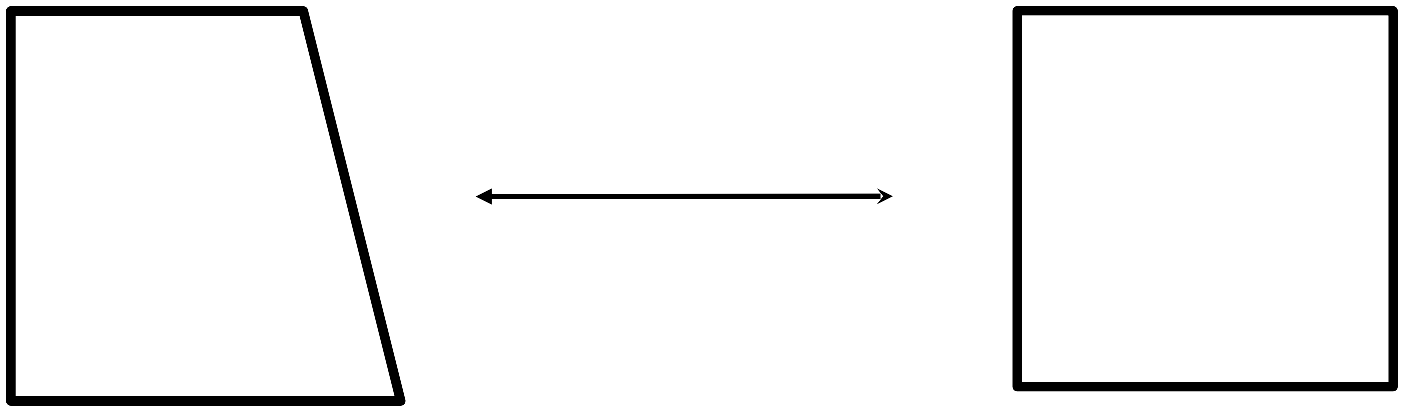
---

gdy transformacja=rozciągnięcie jednego z kierunków, powiedzmy *x* razy *a*

również wtedy jakobian = const

zależność *J* od współrzędnych referencyjnych
gdy różne fragmenty elementu mają wchodzić
do całki z różną wagą, tj.,

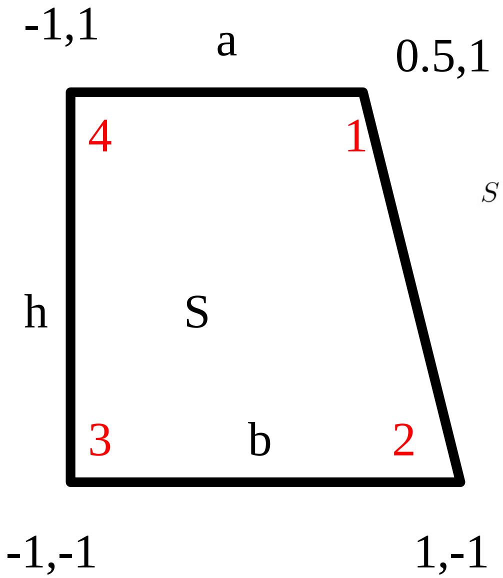
gdy element fizyczny nie jest prostokątny



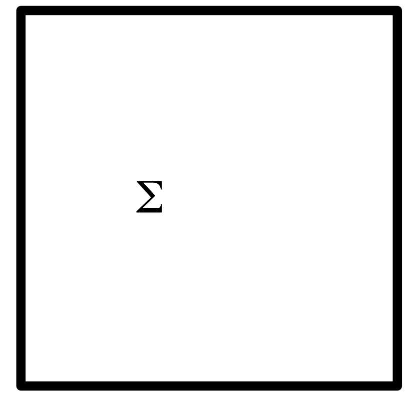
zawsze jest tak, że całka z J(ξ1,ξ2) po elemencie odniesienia
= Pole elementu fizycznego

Jakobian transformacji biliniowej
która nie zachowuje kształtu

S=(a+b)/2*h=3.5/2*2

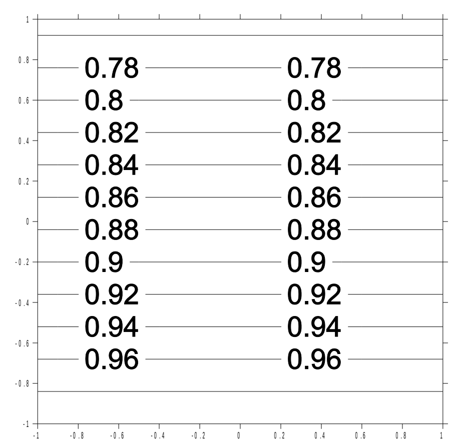


$$S = \int dS = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J(\xi_1,\xi_2) = 4J$$



$$\begin{aligned} J \;=\; & \frac{1}{8}\xi_1 \left((x_1-x_4)(y_3-y_2)+(x_2-x_3)(y_1-y_4)\right) \\ & +\frac{1}{8}\xi_2 \left((x_1-x_2)(y_4-y_3)+(x_3-x_4)(y_1-y_2)\right) \\ & +\frac{1}{8}\left((x_1-x_3)(y_4-y_2)-(x_4-x_2)(y_1-y_3)\right) \end{aligned}$$

$$J = -\frac{1}{8}\xi_2 + \frac{7}{8}$$



mniejsza
„waga”
punktów
z górnej
części elementu
referencyjnego

$$\int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J(\xi_1,\xi_2) = \frac{7}{2}$$

Macierz sztywności:

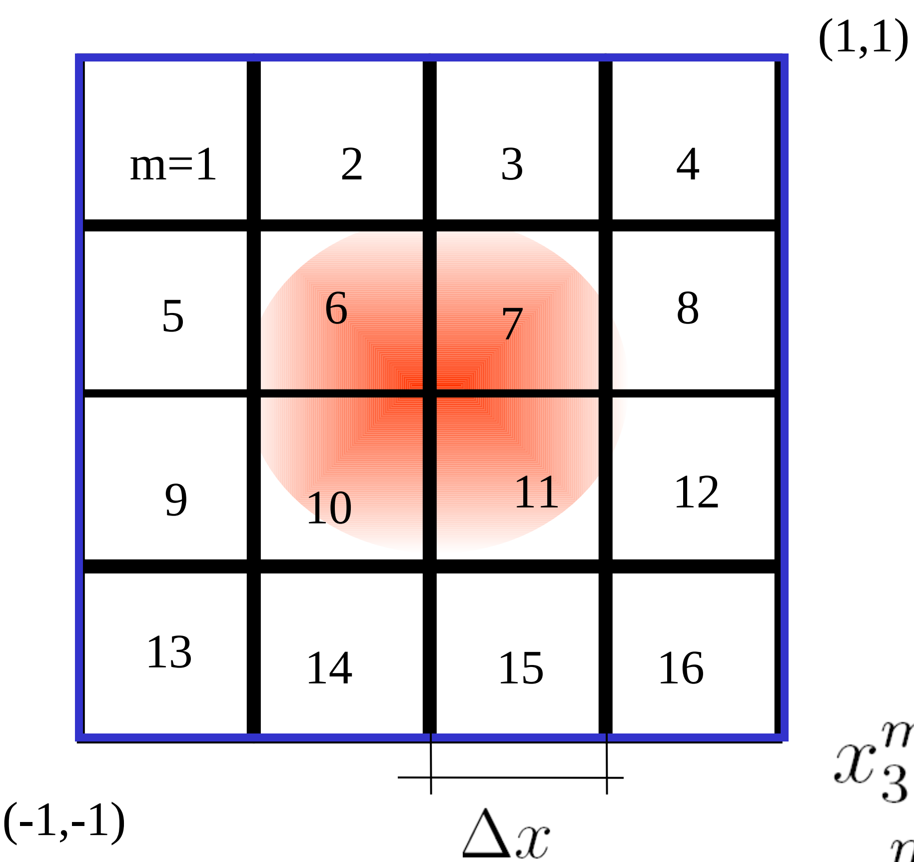
różniczkowanie w przestrzeni fizycznej zapisane
we wsp. referencyjnych

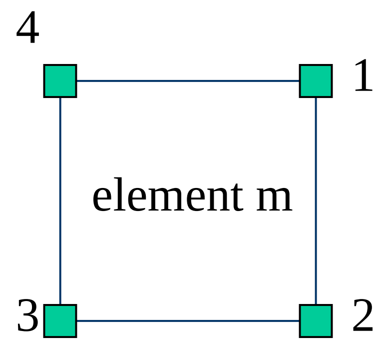
$$\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j = \left(\sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\right)\times\left(\sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\right)+\left(\sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial y}\right)\times\left(\sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial y}\right)$$

$$E_{ij}^m = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J_m \nabla\phi_i \nabla\phi_j$$

w całkowaniu : przy przejściu do współrzędnych referencyjnych uwzględniamy jakobian.

W naszym przykładzie
weźmy szesnaście kwadratowych elementów:





$$x_4^m = -1 + mod(m-1,4)\Delta x$$

$$y_4^m = 1 - \frac{m-1}{4}\Delta x$$

dzielenie integerów (bez reszty)

$$x_3^m = x_4^m$$

$$y_1^m = y_4^m$$

$$x_1^m = x_4^m + \Delta x$$

$$x_2^m = x_1^m$$

$$y_3^m = y_4^m - \Delta x$$

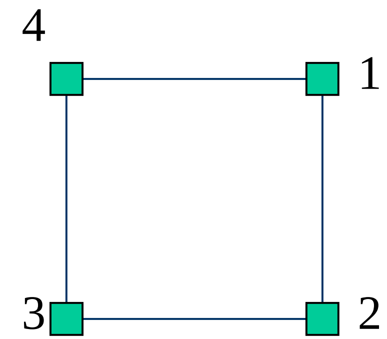
$$y_2^m = y_3^m$$

Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a

Macierz sztywności:

$$\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j = \left(\sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\right)\times\left(\sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\right)+\left(\sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial y}\right)\times\left(\sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial y}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial\xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial\xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial\xi_1} & \frac{\partial x}{\partial\xi_1} \end{pmatrix}$$



nie zależy od *m* (ten sam kształt i rozmiar)

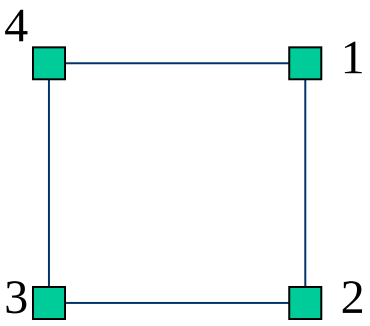
$$\begin{aligned} J = {} & \frac{1}{8}\xi_1\left((x_1-x_4)\underline{(y_3-y_2)}+(x_2-x_3)\underline{(y_1-y_4)}\right) \\ & +\frac{1}{8}\xi_2\left(\underline{(x_1-x_2)}(y_4-y_3)+\underline{(x_3-x_4)}(y_1-y_2)\right) \\ & +\frac{1}{8}\left((x_1-x_3)(y_4-y_2)-(x_4-x_2)(y_1-y_3)\right) \end{aligned}$$

Δx Δx - Δx Δx

podkreślam zera

$J = \Delta x^2/4$

Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu



$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}\left(x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \xi_2(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}\left(x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + \xi_1(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}\left(y_1 + y_2 - y_3 - y_4 + \xi_2(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}\left(y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + \xi_1(y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\right)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_1} = \frac{1}{4}(2\Delta x)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi_2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_1} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \frac{1}{4}(2\Delta x)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{4}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta x} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta x} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j = \left(\sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\right)\times\left(\sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial x}\right)+\left(\sum_k \frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial y}\right)\times\left(\sum_k \frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial\xi_k}{\partial y}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial x} & \frac{\partial\xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial x} & \frac{\partial\xi_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\Delta x} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\Delta x} \end{pmatrix}$$

Macierz sztywności 2D, **kwadratowe elementy**, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a

$$\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j = \left(\frac{2}{\Delta x}\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_1}\right)\left(\frac{2}{\Delta x}\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_1}\right)+\left(\frac{2}{\Delta x}\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_2}\right)\left(\frac{2}{\Delta x}\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_2}\right)$$

$$\nabla\phi_i\cdot\nabla\phi_j = \frac{4}{\Delta x^2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_1}\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_2}\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_2}\right)$$

$$E^m_{ij} = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J_m \nabla\phi_i\nabla\phi_j$$

wszystkie elementy mają ten sam kształt i rozmiar

odpowiada im ten sam Jakobian

wszystkie lokalne macierze sztywności są identyczne

$$E_{ij} = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_1}\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_1}+\frac{\partial\phi_i}{\partial\xi_2}\frac{\partial\phi_j}{\partial\xi_2}\right)$$

Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a

$$E_{ij} = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial \phi_j}{\partial \xi_2} \right)$$

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1+\xi_1)(1+\xi_2)$$

1/3

$$E_{11} = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 \left(\frac{1}{16}(1+\xi_2)^2 + \frac{1}{16}(1+\xi_1)^2 \right) = \frac{2}{3}$$

$$E_{22} = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 \left(\frac{1}{16}(1-\xi_2)^2 + \frac{1}{16}(1+\xi_1)^2 \right) = \frac{2}{3}$$

1/3

$$E_{33} = E_{44} = \frac{2}{3}$$

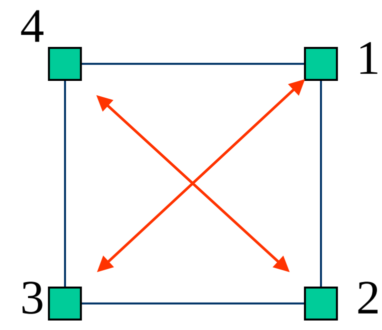
1/6

$$E_{12} = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 \left(\frac{1}{16}(1-\xi_2^2) - \frac{1}{16}(1+\xi_1)^2 \right) = -\frac{1}{6}$$

$$E_{13} = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 \left(-\frac{1}{16}(1-\xi_2^2) - \frac{1}{16}(1-\xi_1^2) \right) = -\frac{1}{3}$$

Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a

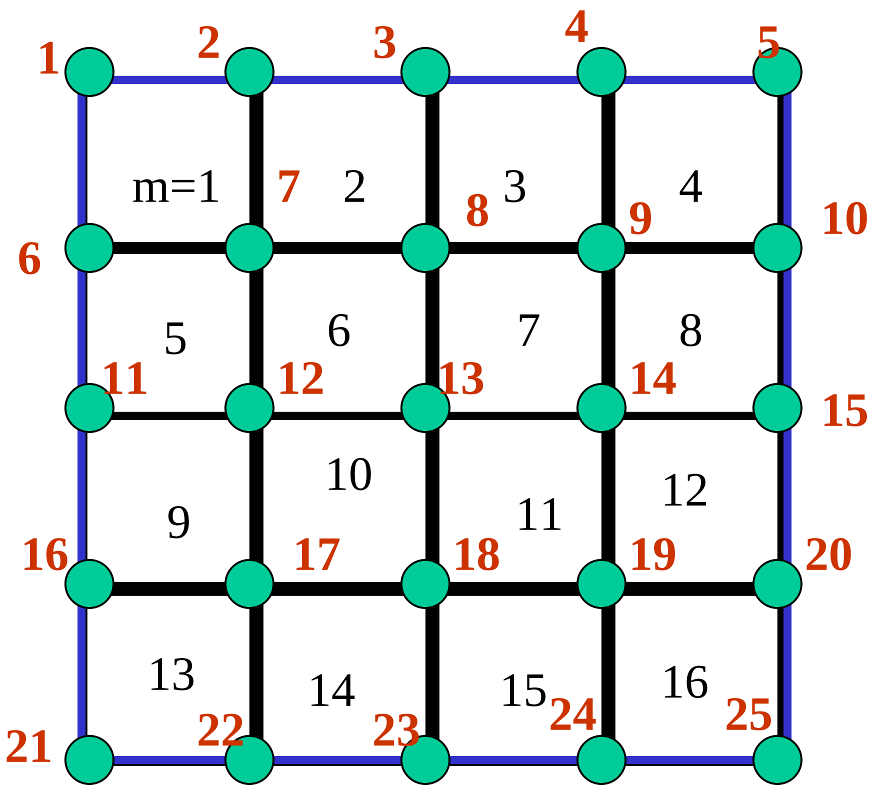
$$E = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$



sąsiednie: -1
naprzeciwległe -2

składanie globalnej macierzy sztywności

1) globalna **numeracja węzłów**



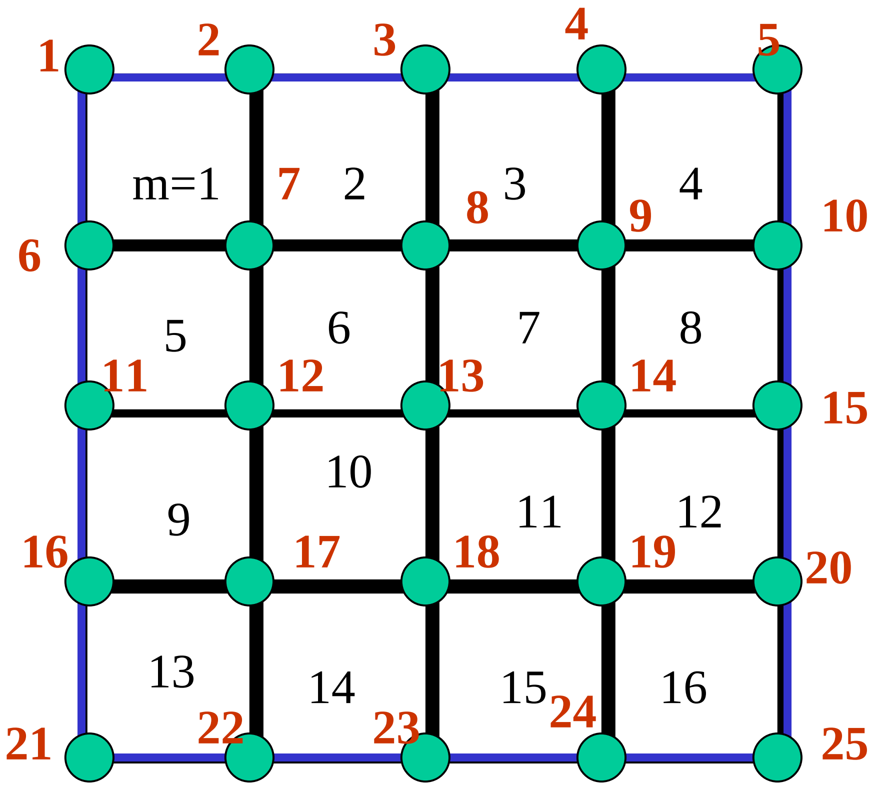
Potrzebne funkcja nadająca węzłowi lokalnemu *i* z elementu *m* numer globalny *nr(i,m)*

1=*nr(4,1)*
2=*nr(1,1)*=*nr(4,2)*
3=*nr(2,1)*=*nr(3,4)*
...
13=nr(2,6)=nr(3,7)=nr(1,10),nr(4,11)

składanie globalnej macierzy sztywności

Macierz sztywności 2D, kwadratowe elementy, biliniowe funkcje kształtu Lagrange'a

1) globalna **numeracja węzłów**



nr(i,m) funkcja
nadająca węzłowi lokalnemu *i*
z elementu *m* numer globalny

1=*nr(4,1)*
2=*nr(1,1)=nr(2,4)*
3=nr(2,1)=nr(3,4)
...
13=nr(6,2)=nr(7,3)=nr(10,1),nr(11,4)

pętla po elementach m=1,16
pętla po węzłach lokalnych k=1,4
pętla po węzłach lokalnych l=1,4
identyfikacja numeru globalnego węzła
i=nr(k,m)
j=nr(l,m)
S(i,j)=S(i,j)+E(k,l)

$$
S = 1/6 \times \begin{array}{|rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr|}
\hline
4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 8 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 8 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 16 & -2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 8 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 & -1 & 8 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\
\hline
\end{array}
$$

MES produkuje macierze rzadkie: liczba elementów niezerowych w macierzy $N \times N$: rzędu N. (przekrywanie tylko funkcji kształtu sąsiednich elementów)

macierz gęsta przy węzłach $N=100\,000 \rightarrow N^2 \times 8$ bajtów (double) = 80GB

Prawa strona=całkowanie po elemencie w przestrzeni referencyjnej

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w + \cancel{a_0 uw})\, d\Omega = \int_\Omega f w d\Omega + \cancel{\int_\Gamma w \nabla u d\Gamma}$$

$$P_i^m = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J_m \rho(x(\xi_1,\xi_2), y(\xi_1,\xi_2)) \phi_i(\xi_1,\xi_2)$$

tu zależność od elementu m-ukryta

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i^m \\ y_i^m \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1,\xi_2)$$

2) Całkowanie numeryczne po kwadracie

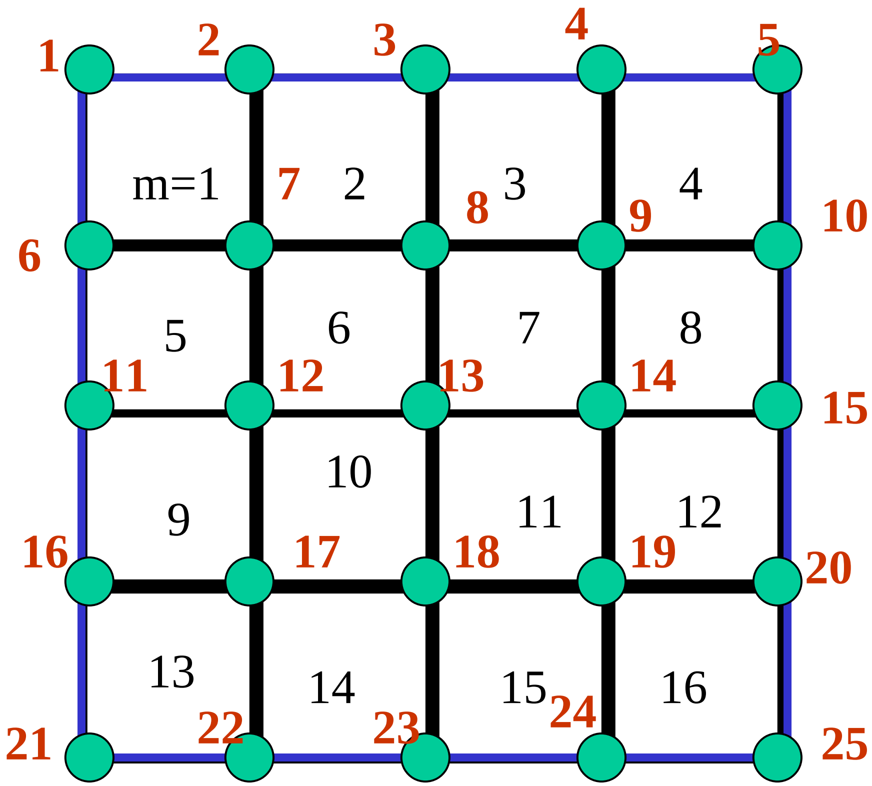
$$I = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 f(\xi_1,\xi_2) = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \sum_{k=1}^{N_2} w_k f(\xi_1,\xi_k) = \sum_{l=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_2} w_l w_k f(\xi_l,\xi_k)$$

Gaussa N_2 punktowa   Gaussa N_1 punktowa

3) Składanie prawych stron w globalną F

pętla po elementach m=1,16
pętla po węzłach lokalnych k=1,4
identyfikacja numeru globalnego węzła
i=nr(k,m)
F(i)=F(i)+P(k,m)

4) warunki brzegowe

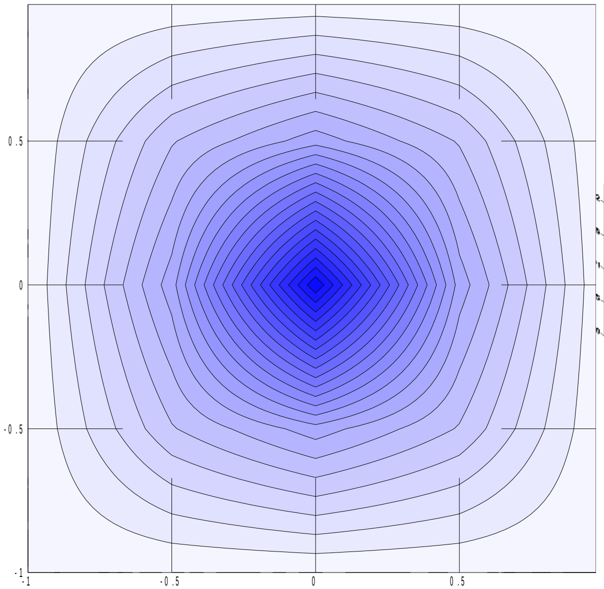


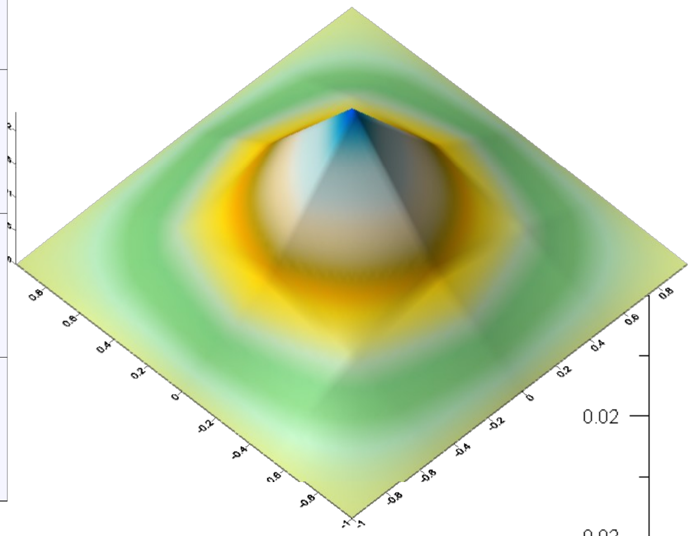
$$Su=F$$

S-macierz 25x25
F-wektor 25

szukamy wierszy macierzy **S** odpowiadających węzłom brzegowym 1-6, 10-11, 15-16, 20-25 *[wiersze te mają 4/6 i 8/6 na diagonali, wspólne dla nie więcej niż 2 elementów]* wpisujemy 1 na diagonali, zero – wpisujemy do macierzy F

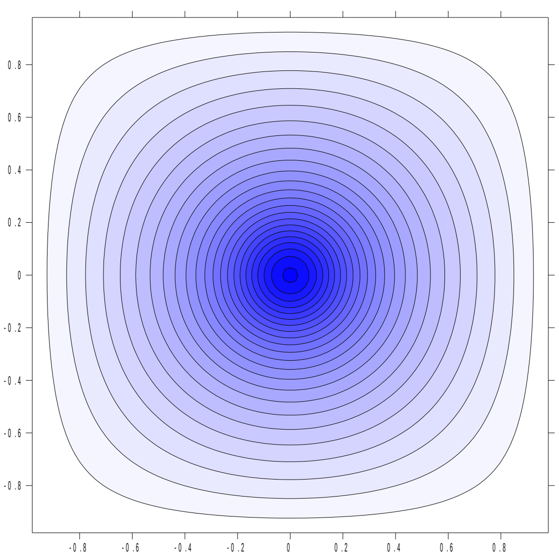
Wynik:

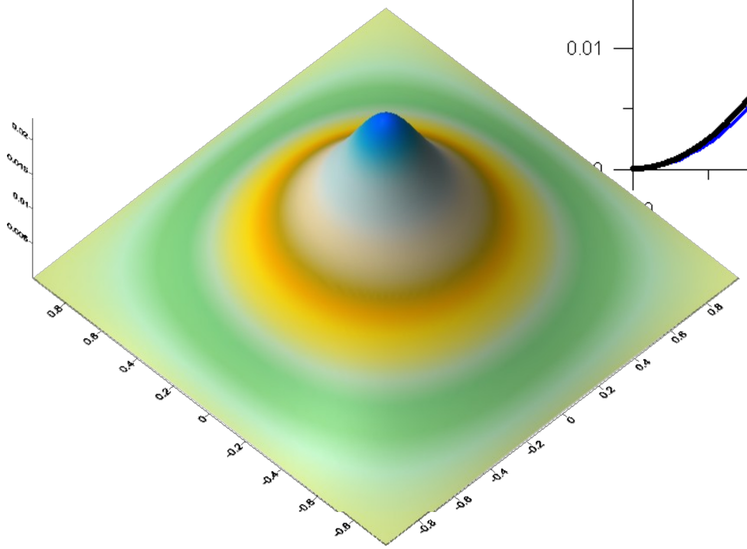




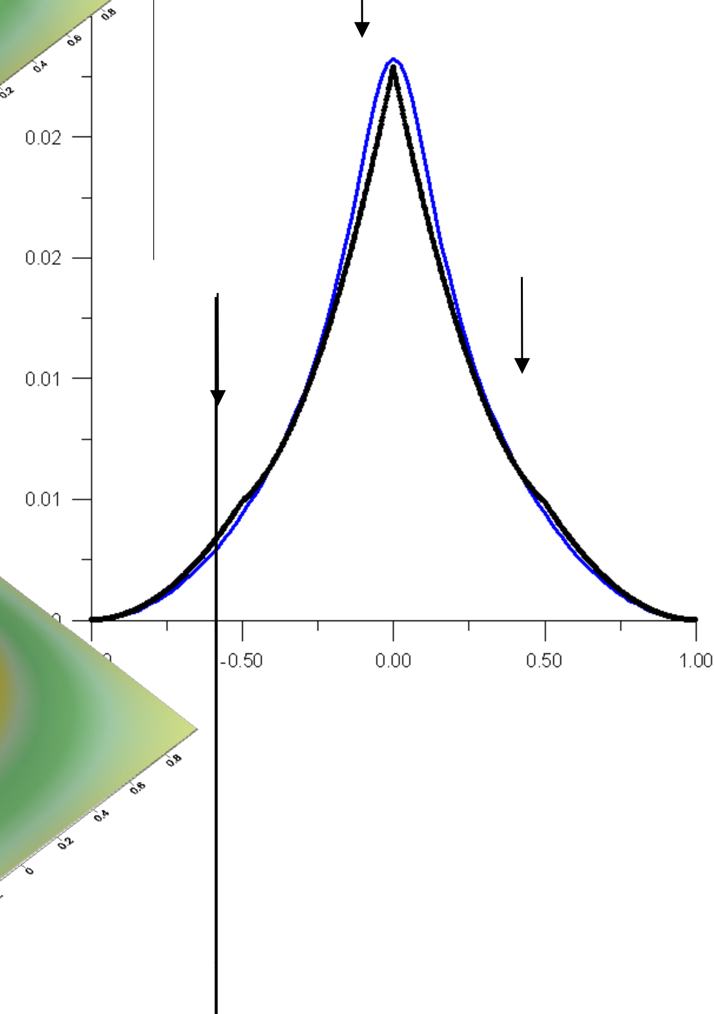
MES

dokladny





wydruk po diagonali
(**dokładny** i MES
z biliniowymi f. kształtu)

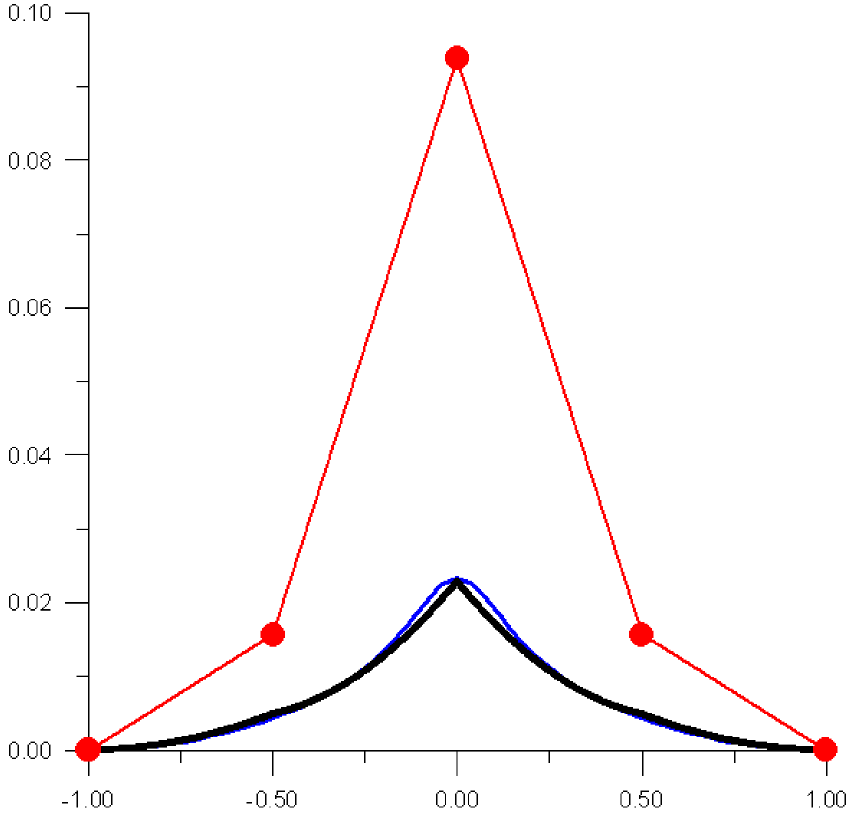


MES (16 kwadratowych elementów z biliniowymi funkcjami kształtu) a MRS

Dokładny

MES – funkcje biliniowe 25 węzłów

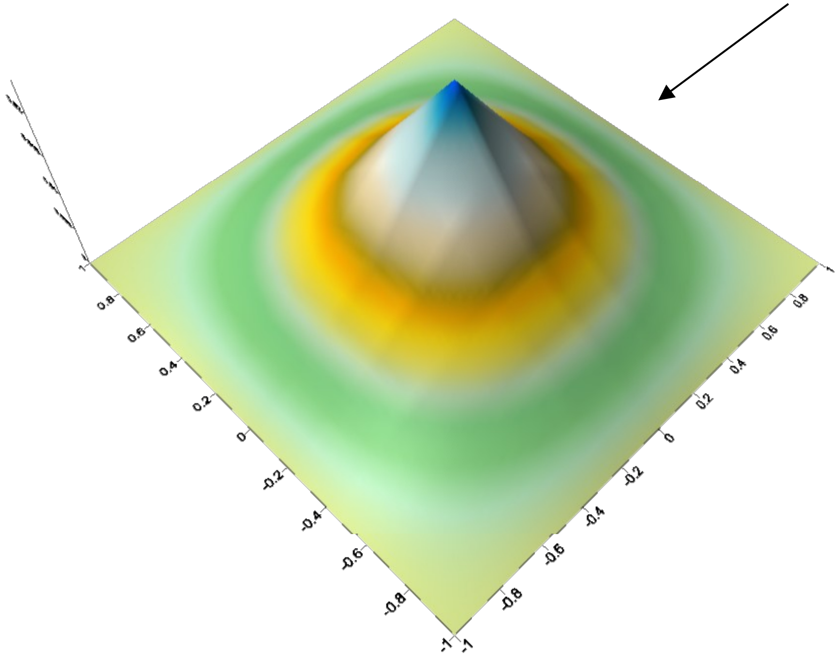
MRS – 25 węzłów (dramat)

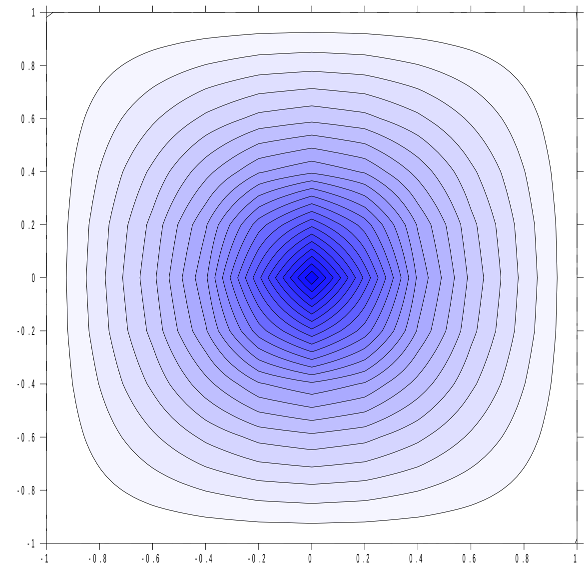


przekrój po diagonali

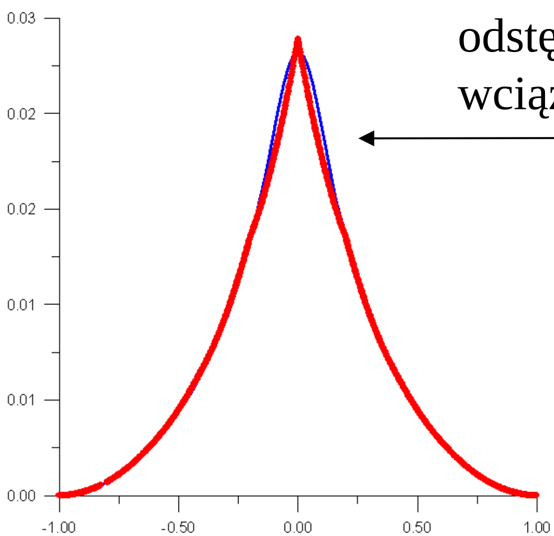
100 identycznych elementów:

nadal widoczne ścianki

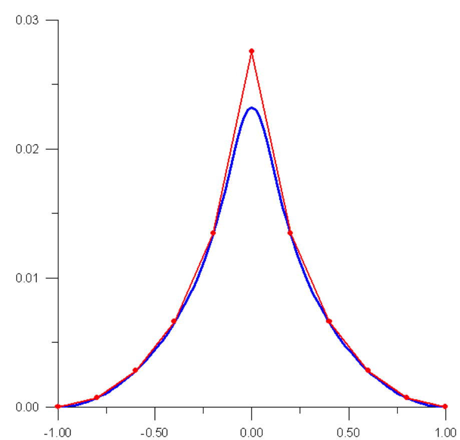




odstępstwa dokładny/MES
wciąż widoczne



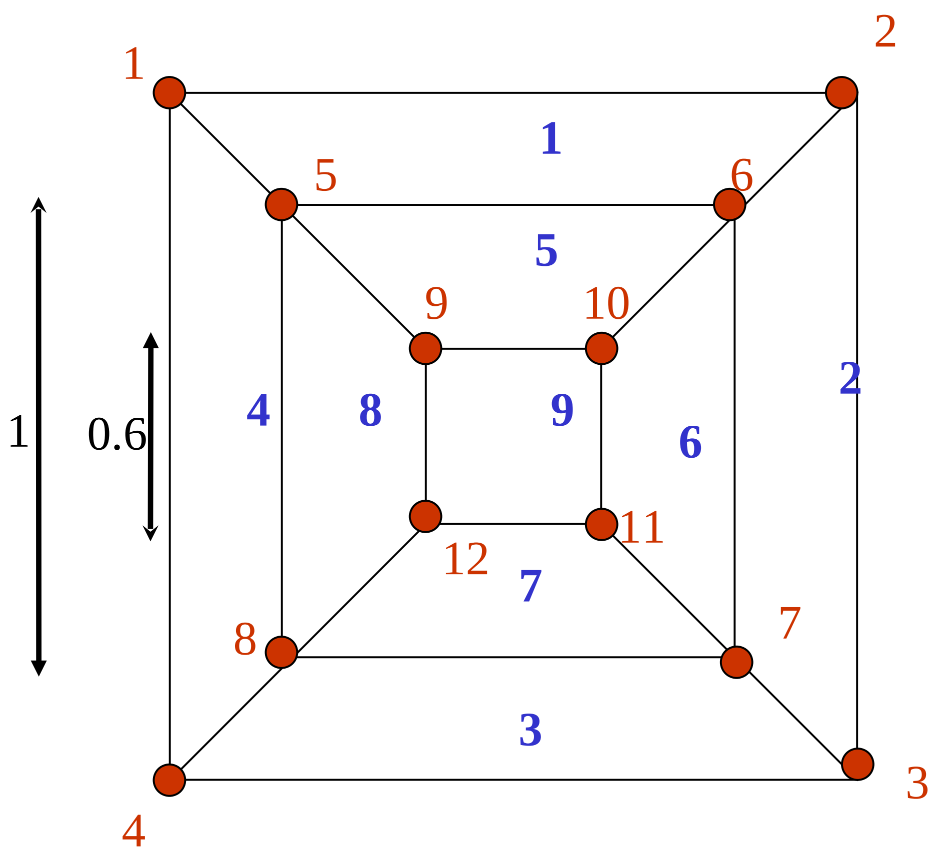
wyjście: zagęścić
elementy w środku pudła
lub zmienić funkcje kształtu
na ciągłe z pochodną

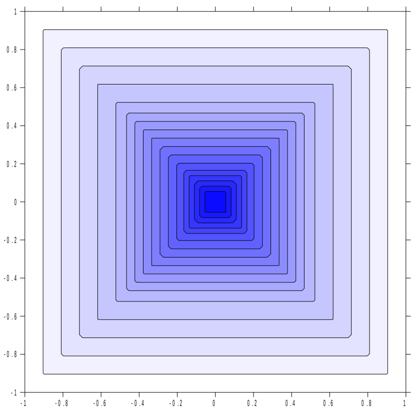


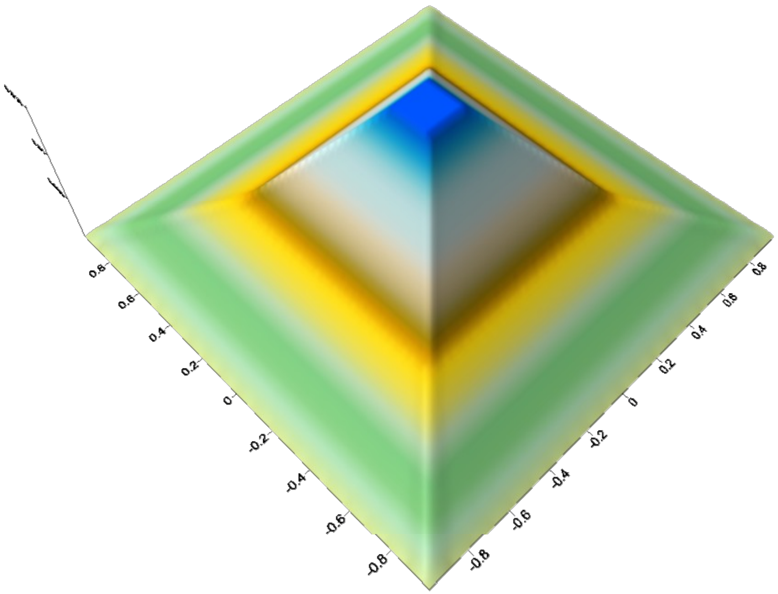
MRS przy tej samej liczbie
węzłów

podział przestrzeni na nierówne elementy: domek z kart (płaskie ściany)

globalna numeracja węzłów:
numeracja elementów







z góry wiadomo, że w rezultacie dostaniemy płaskie ściany

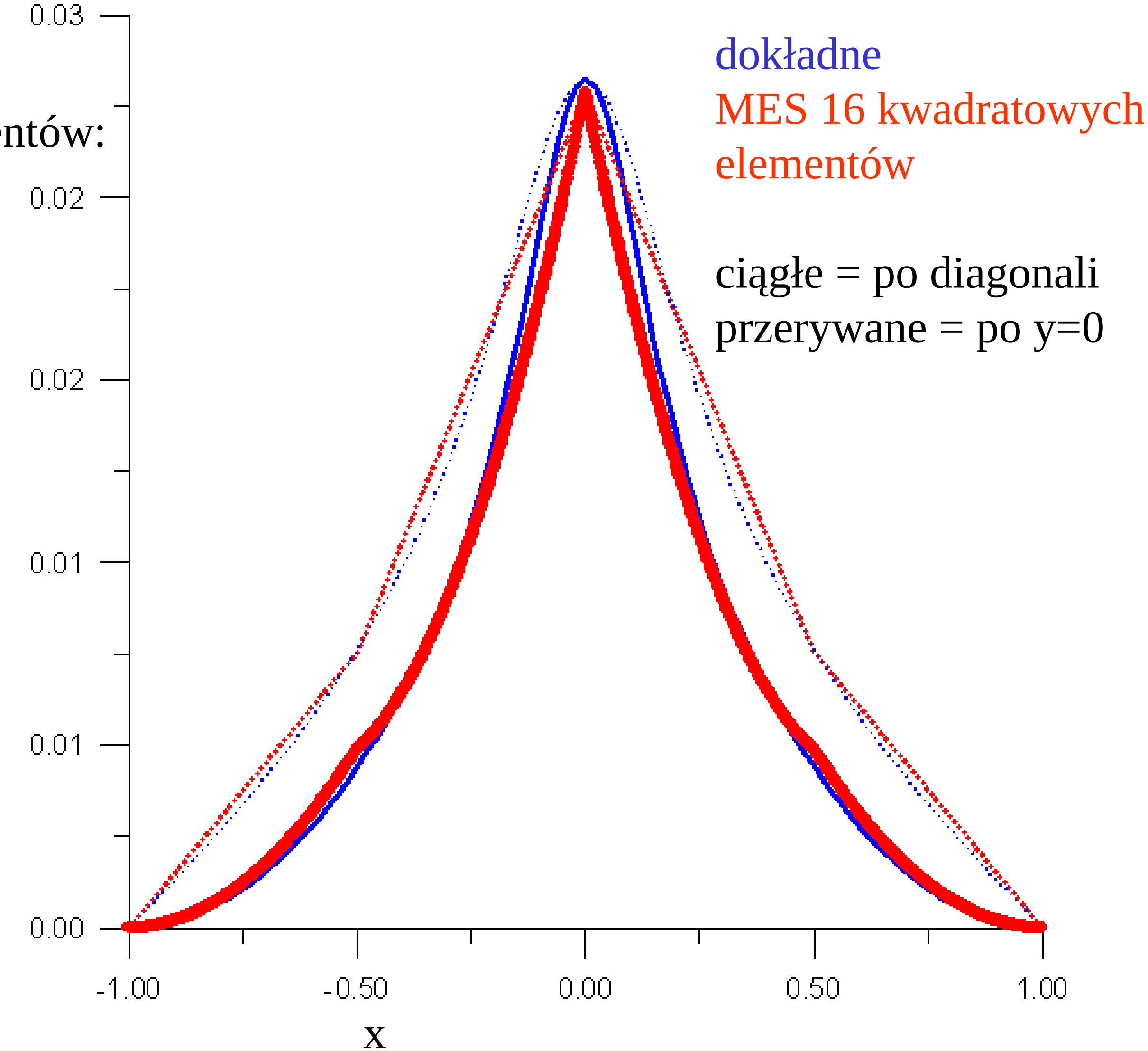
problem z odwróceniem równania

Dla biliniowych funkcji kształtu, w każdym z elementów:

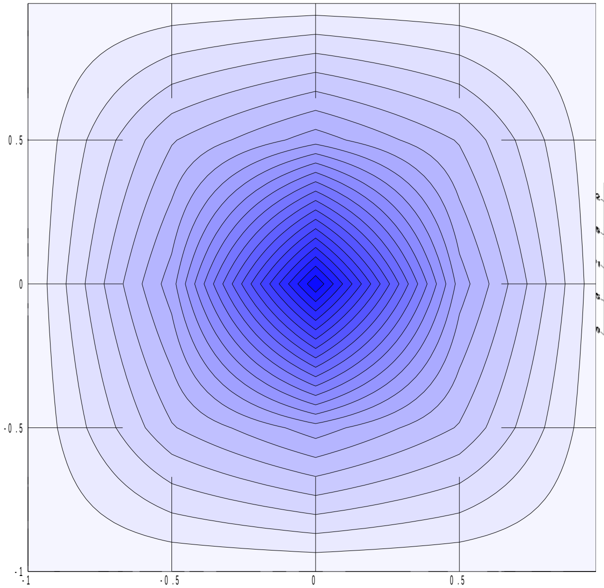
$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} = 0$$

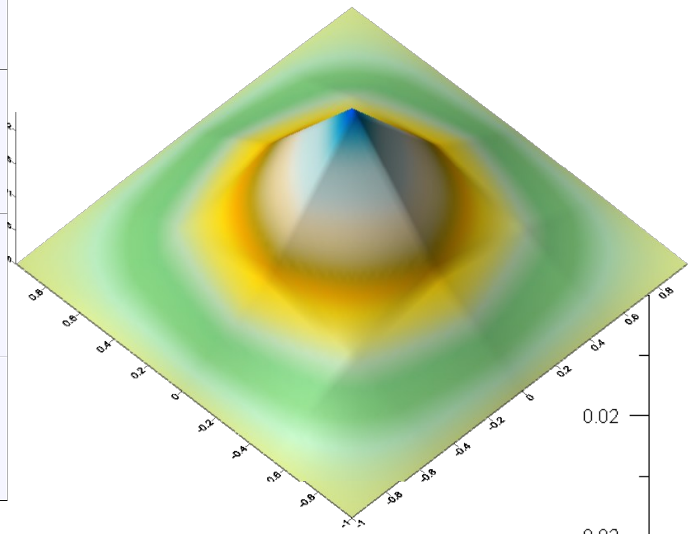
zamiast

$$\nabla^2 u = -\rho(x, y)$$



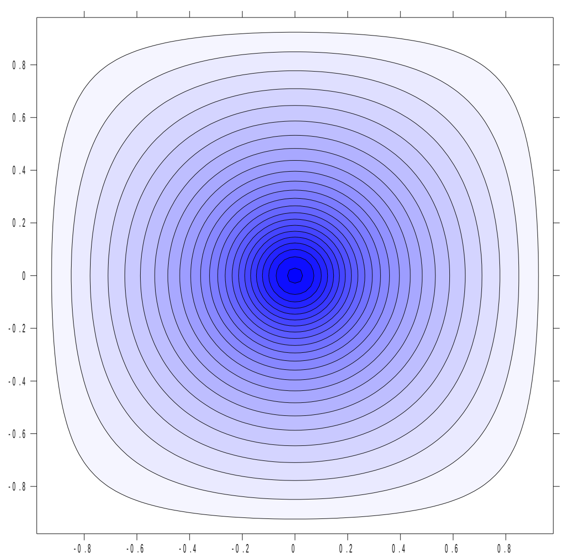
Wynik:

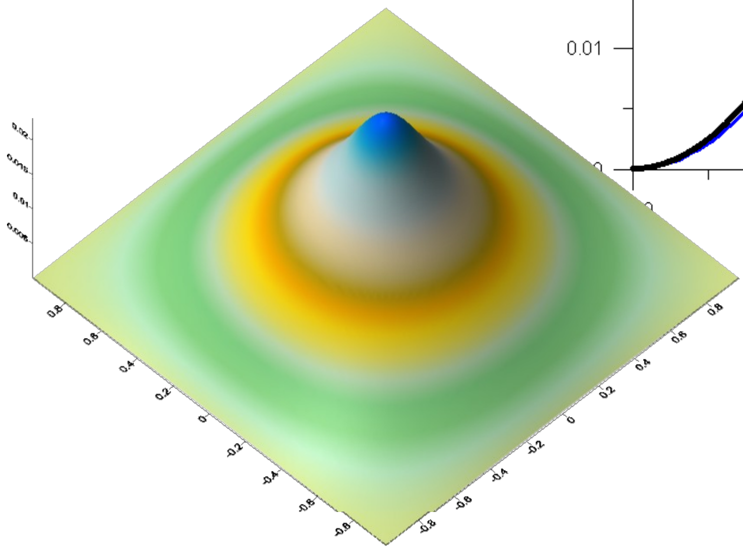




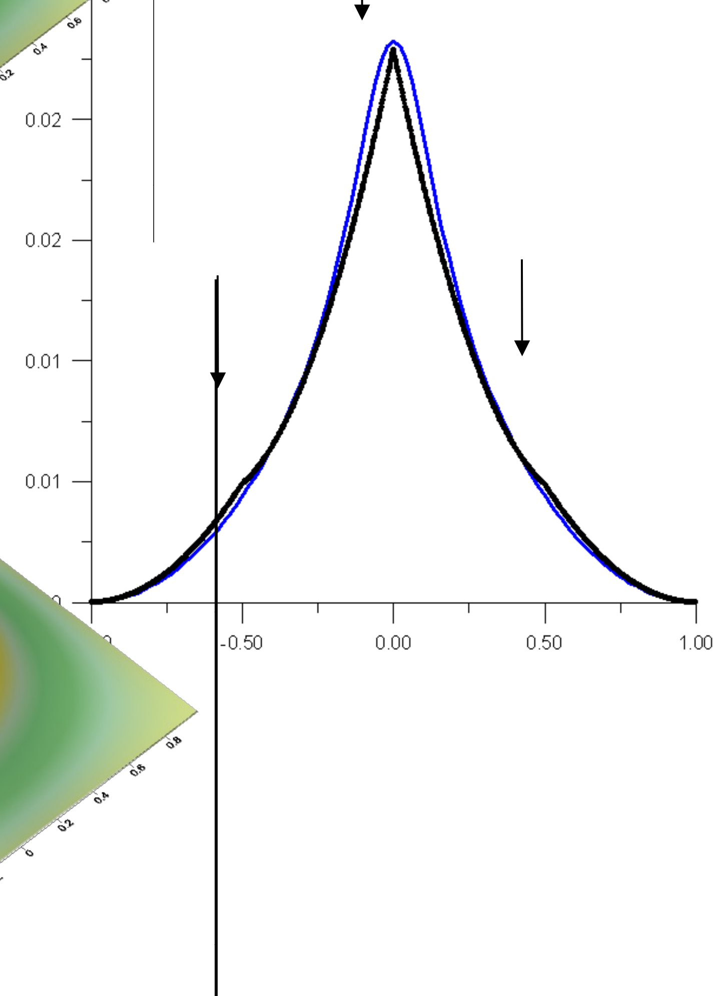
MES

dokladny



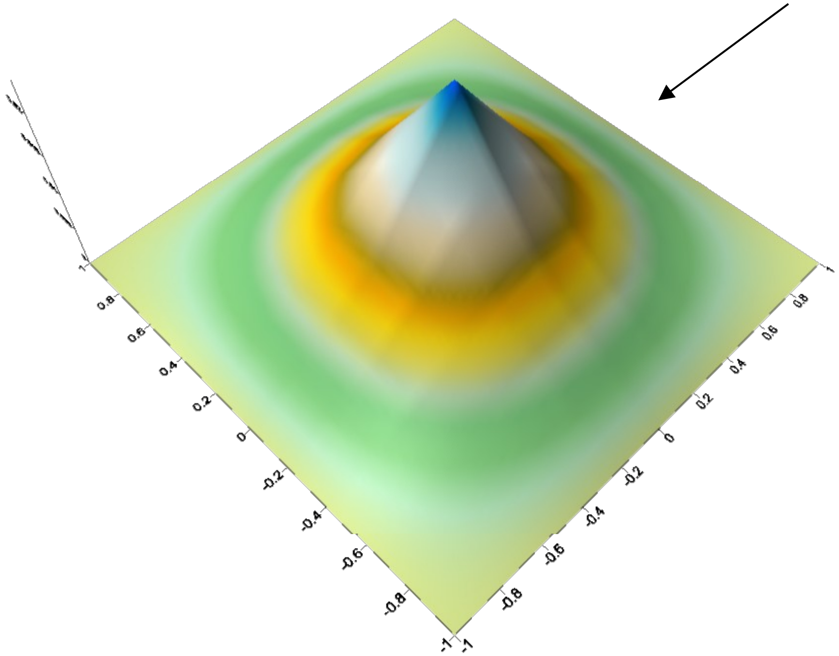


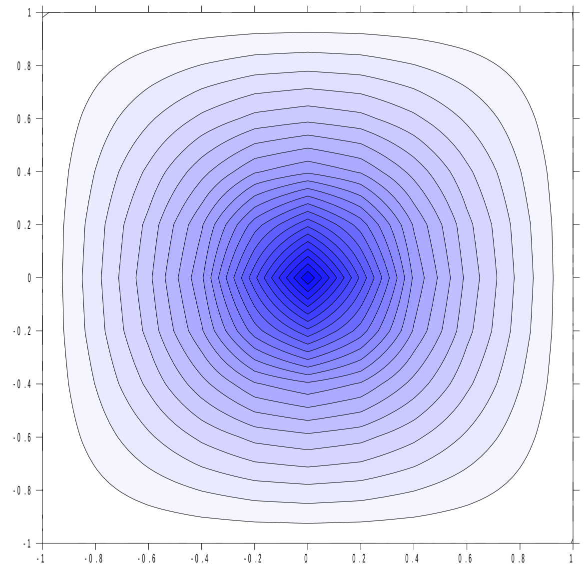
wydruk po diagonali
(**dokładny** i MES
z biliniowymi f. kształtu)

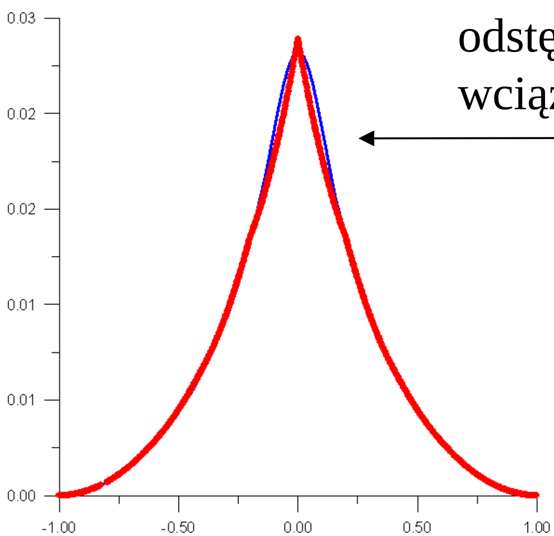


100 identycznych elementów:

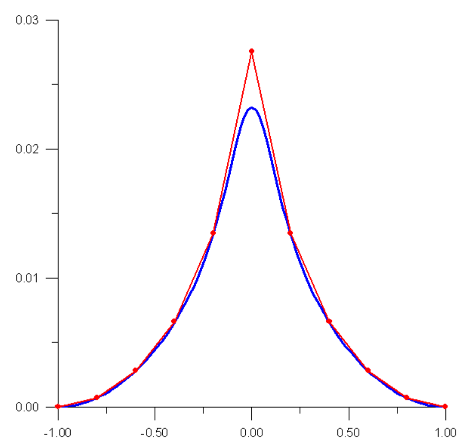
nadal widoczne ścianki







odstępstwa dokładny/MES
wciąż widoczne

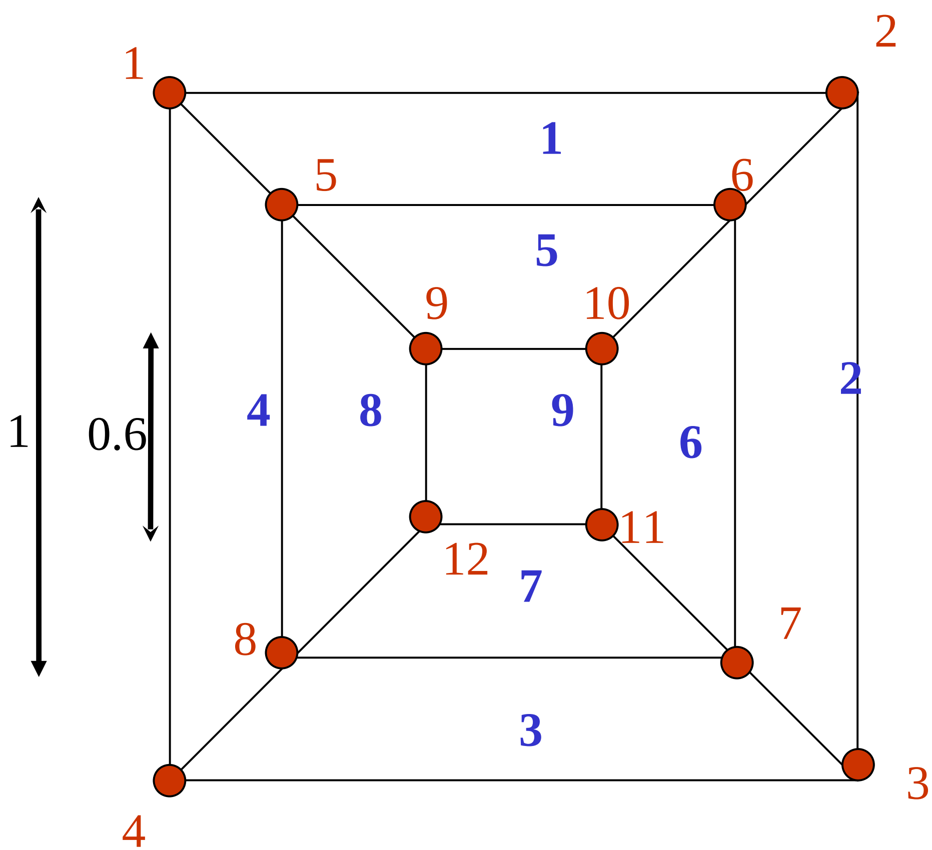


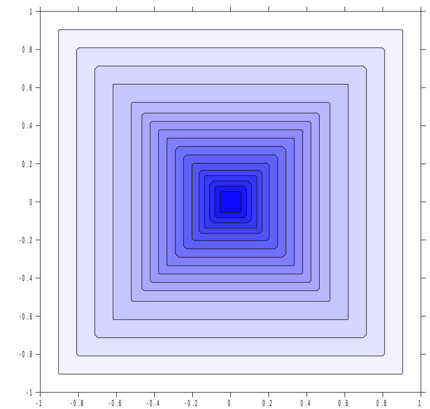
wyjście: zagęścić
elementy w środku pudła
lub zmienić funkcje kształtu
na ciągłe z pochodną

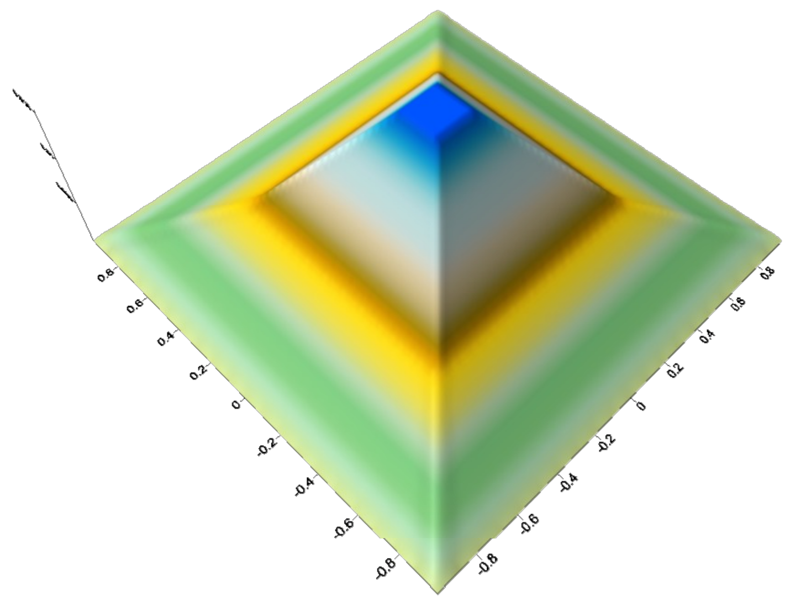
MRS przy tej samej liczbie
węzłów

podział przestrzeni na nierówne elementy
+ biliniowe funkcje kształtu - domek z kart (płaskie ściany)

globalna numeracja węzłów:
numeracja elementów

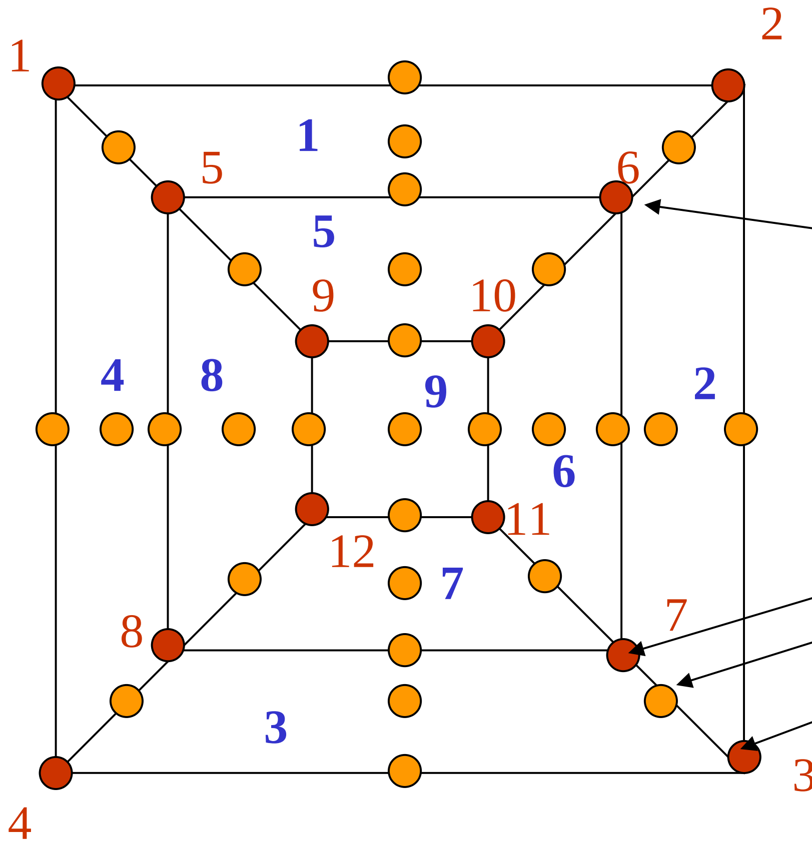


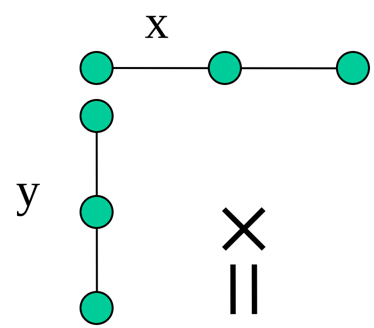


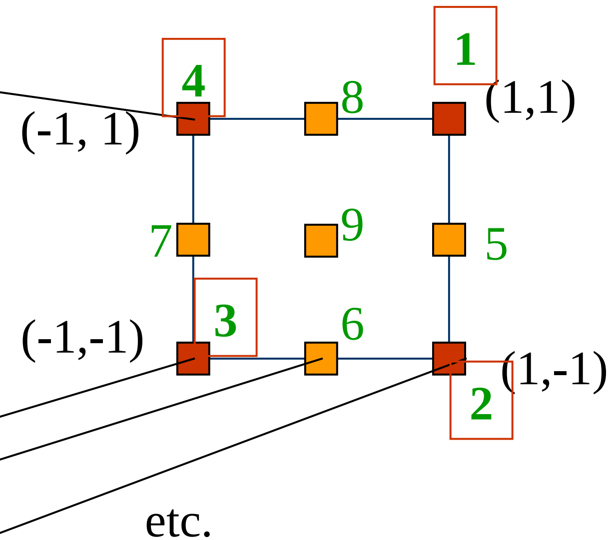


Baza bikwadratowa: dodatkowe węzły

globalna numeracja węzłów narożnych`:
numeracja elementów







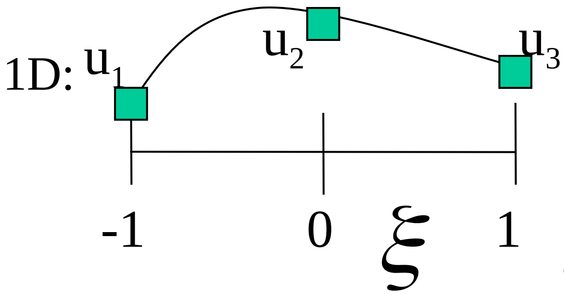
Węzły wierzchołkowe numerujemy jak poprzednio. Mapowanie wtedy bez zmian.

41 węzłów

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \phi_i(\xi_1, \xi_2)$$

mapowanie wciąż używa funkcji biliniowych

bikwadratowe funkcje kształtu

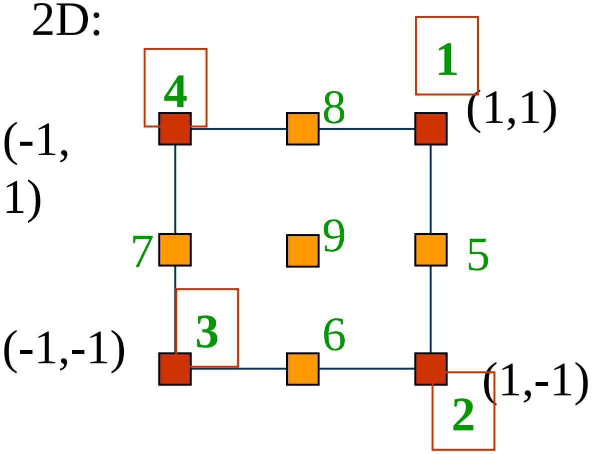


$$u(\xi) = u_1\Phi_1(\xi) + u_2\Phi_2(\xi) + u_3\Phi_3(\xi)$$

$\Phi_1 = \xi(\xi - 1)/2$

$\Phi_2 = -(\xi - 1)(\xi + 1)$

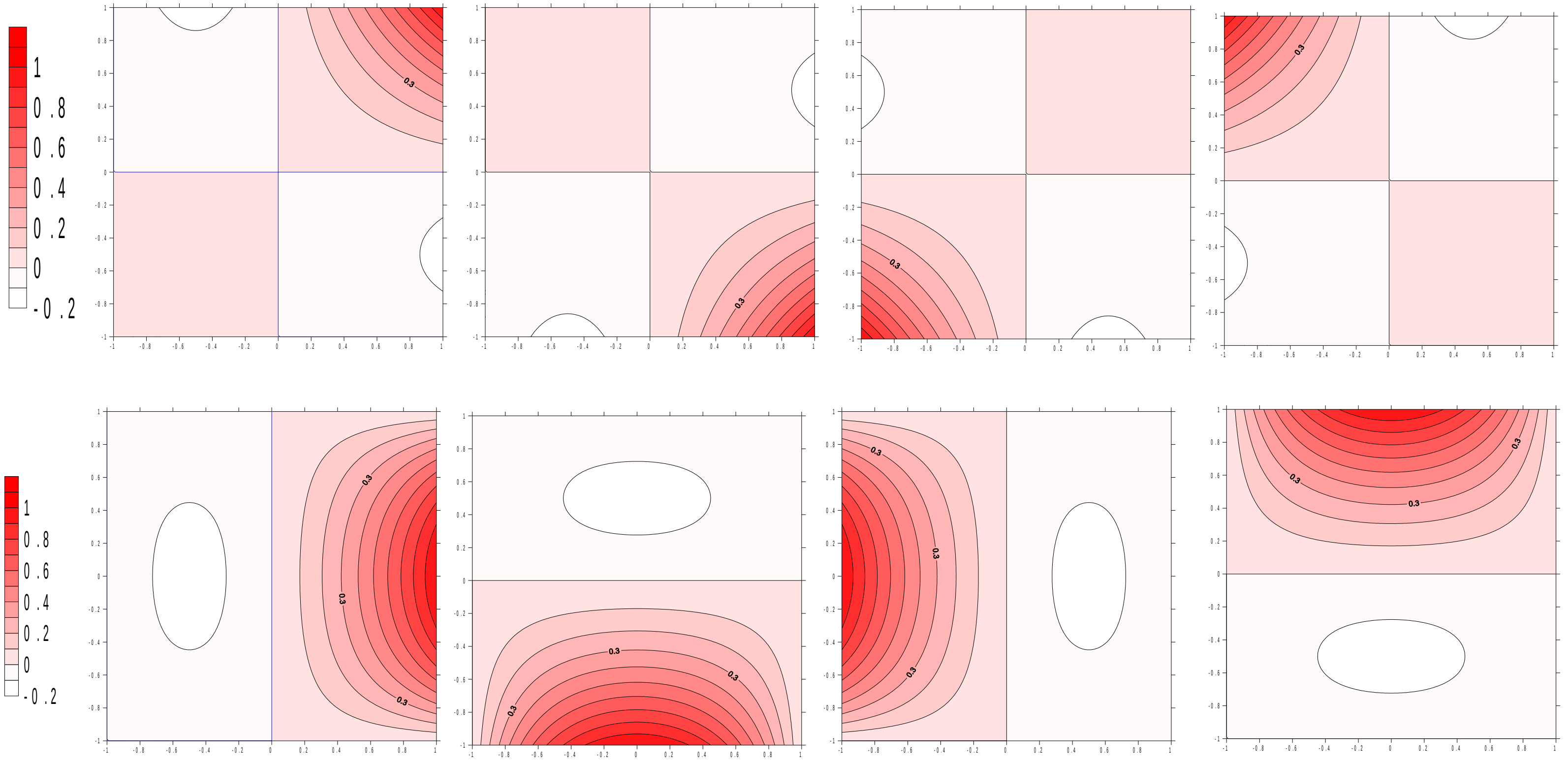
$\Phi_3 = \xi(\xi + 1)/2$

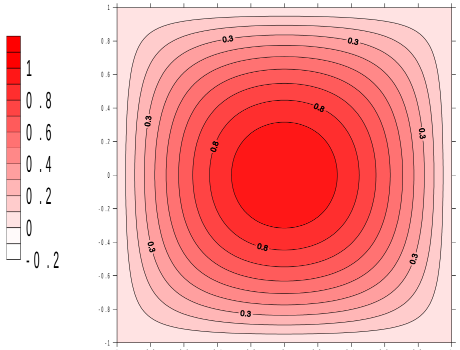


lista funkcji kształtu

$$g_1(\xi_1,\xi_2) = \Phi_3(\xi_1)\Phi_3(\xi_2)$$
$$g_2(\xi_1,\xi_2) = \Phi_3(\xi_1)\Phi_1(\xi_2)$$
$$g_3(\xi_1,\xi_2) = \Phi_1(\xi_1)\Phi_1(\xi_2)$$
$$g_4(\xi_1,\xi_2) = \Phi_1(\xi_1)\Phi_3(\xi_2)$$
$$g_5(\xi_1,\xi_2) = \Phi_3(\xi_1)\Phi_2(\xi_2)$$
$$g_6(\xi_1,\xi_2) = \Phi_2(\xi_1)\Phi_1(\xi_2)$$
$$g_7(\xi_1,\xi_2) = \Phi_1(\xi_1)\Phi_2(\xi_2)$$
$$g_8(\xi_1,\xi_2) = \Phi_2(\xi_1)\Phi_3(\xi_2)$$
$$g_9(\xi_1,\xi_2) = \Phi_2(\xi_1)\Phi_2(\xi_2)$$

Bikwadratowe funkcje kształtu w elemencie odniesienia



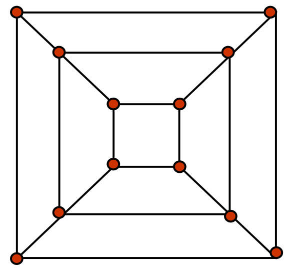


jakobian i transformacje pochodnych/całek bez zmian (mapowanie bez zmian)

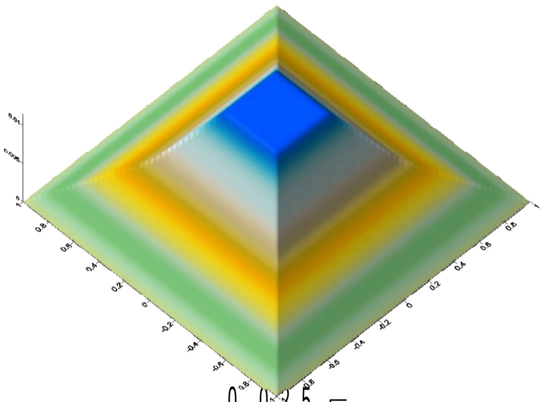
$$E^m_{ij} = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J^{(m)}(\xi_1, \xi_2) \nabla g_i \cdot \nabla g_j$$

$$\nabla g_i \cdot \nabla g_j = \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial g_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) \times \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial g_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x} \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial g_i}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right) \times \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial g_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial y} \right)$$

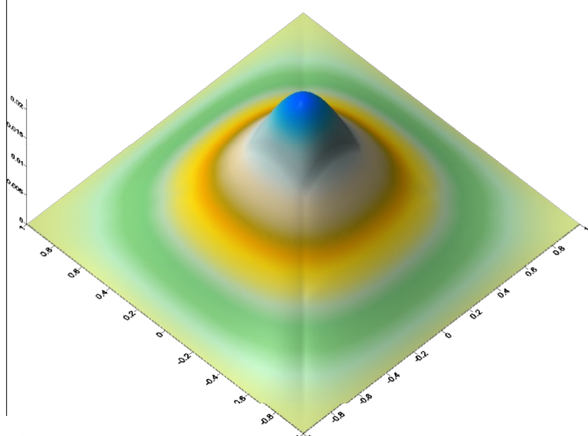
Wyniki:



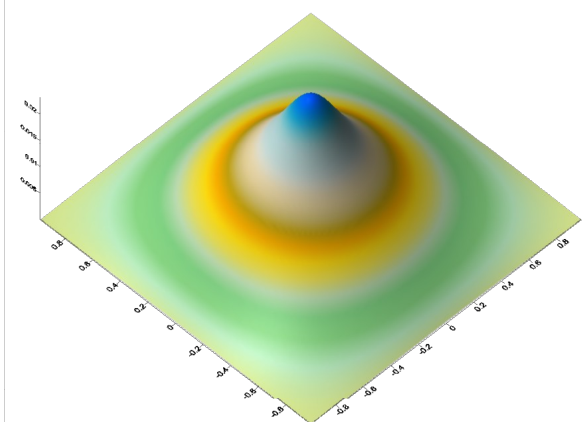
funkcje biliniowe

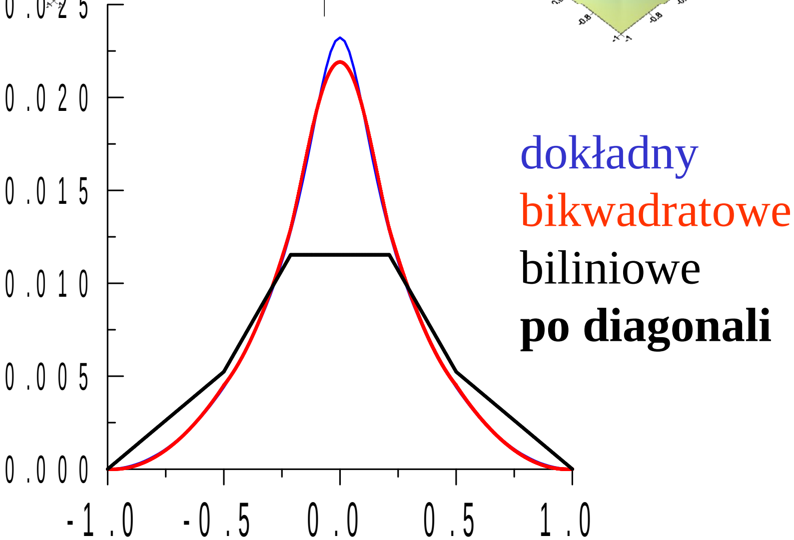


bikwadratowe



r. dokładne





Rozwiązanie ciągłe z pochodną:
(bikubiczne) funkcje Hermita w dwóch wymiarach

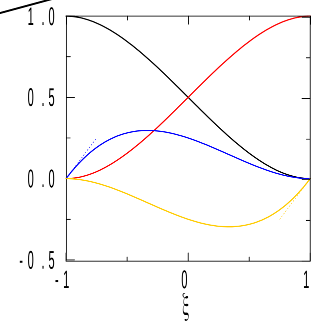
2 parametry węzłowe na węzeł

1D:

$u_1=u(x_1)$ $\qquad\qquad$ $u_2=u(x_2)$

$u_1'=u'(x_1)$ $\qquad \xi \qquad$ $u_2'=u'(x_2)$

-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ 1



$$\phi_1^0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3$$

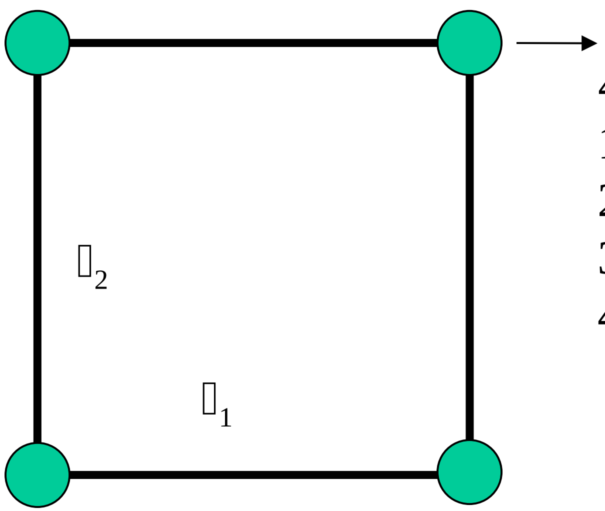
$$\phi_2^0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3$$

$$u(\xi) = u_1^0\phi_1^0(\xi) + u_1^1\phi_1^1(\xi) + u_2^0\phi_2^0(\xi) + u_2^1\phi_2^1(\xi)$$

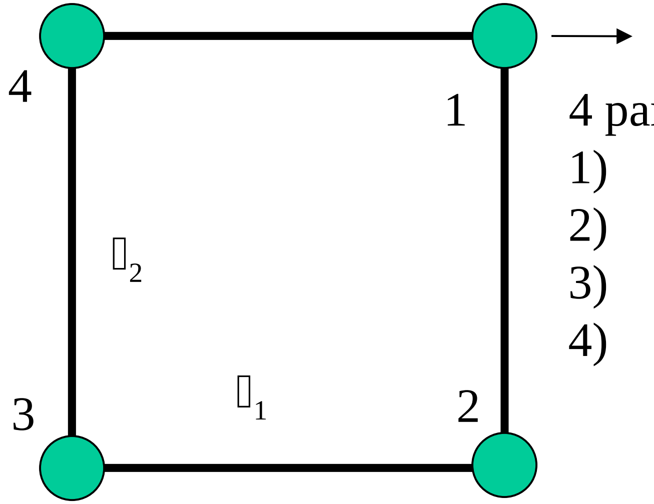
$$\phi_1^1 = \frac{J_m}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)$$

$$\phi_2^1 = \frac{J_m}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)$$

$J_m=dx/d\xi$



4 parametry węzłowe na węzeł:
1) wartość funkcji
2) pierwsza pochodna w kierunku x
3) pierwsza pochodna w kierunku y
4) druga pochodna mieszana



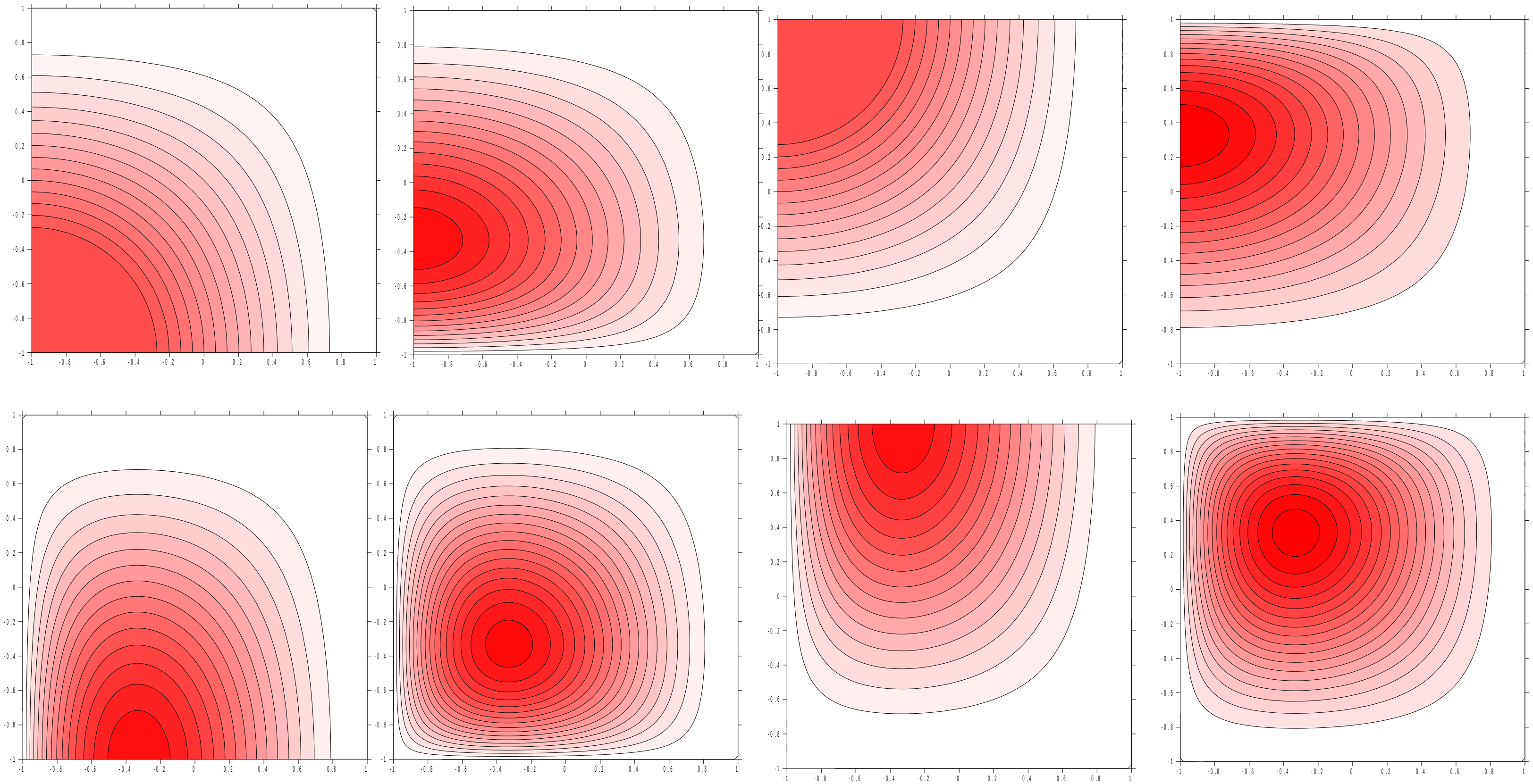
4 parametry węzłowe na węzeł: $u_1^{00}, u_2^{00}, u_3^{00}, u_4^{00}$

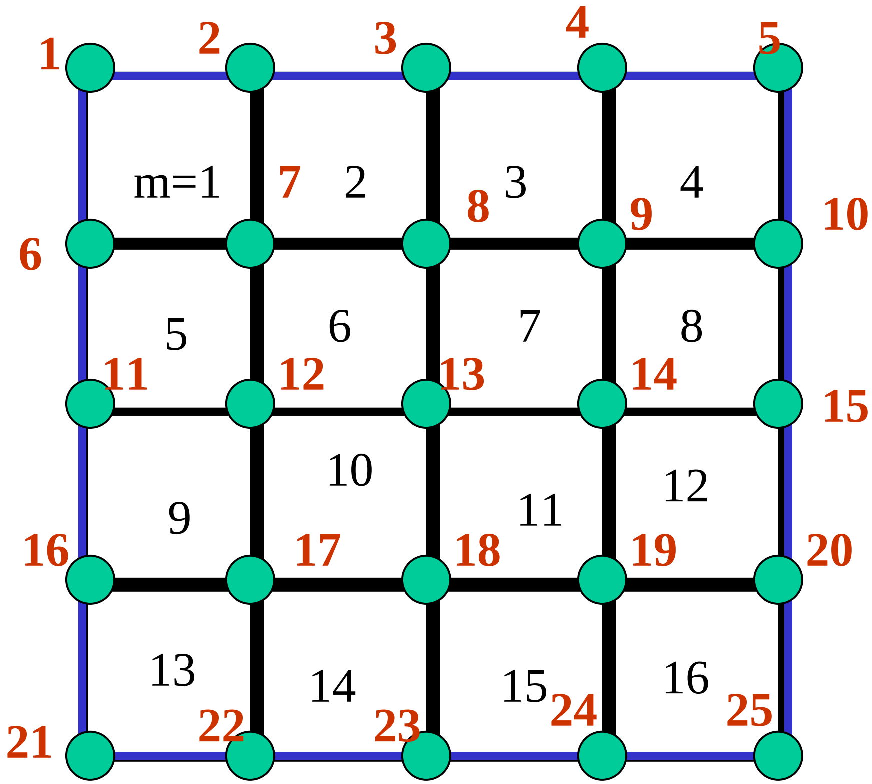
1) wartość funkcji $u_1^{10}, u_2^{10}, u_3^{10}, u_4^{10}$
2) pierwsza pochodna w kierunku x $u_1^{01}, u_2^{01}, u_3^{01}, u_4^{01}$
3) pierwsza pochodna w kierunku y
4) druga pochodna mieszana $u_1^{11}, u_2^{11}, u_3^{11}, u_4^{11}$

1D: $$u(\xi) = u_1^0\phi_1^0(\xi) + u_1^1\phi_1^1(\xi) + u_2^0\phi_2^0(\xi) + u_2^1\phi_2^1(\xi)$$

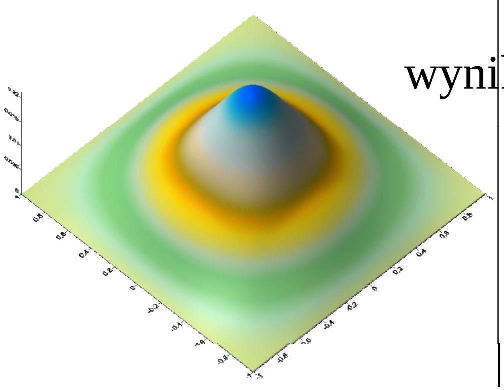
2D $$u(\xi_1, \xi_2) = u_1^{00}\phi_2^0(\xi_1)\phi_2^0(\xi_2) + u_1^{10}\phi_2^1(\xi_1)\phi_2^0(\xi_2)\dots$$

8 z szesnastu funkcji Hermite'a

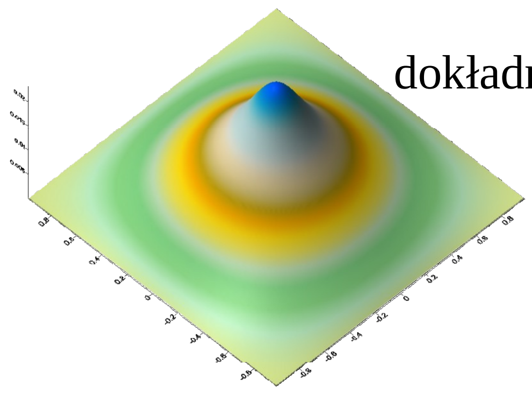




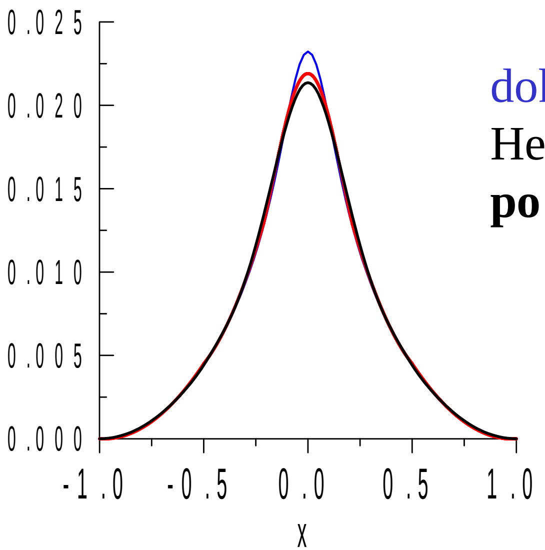
25 węzłów, 100 parametrów węzłowych



wynik



dokładny

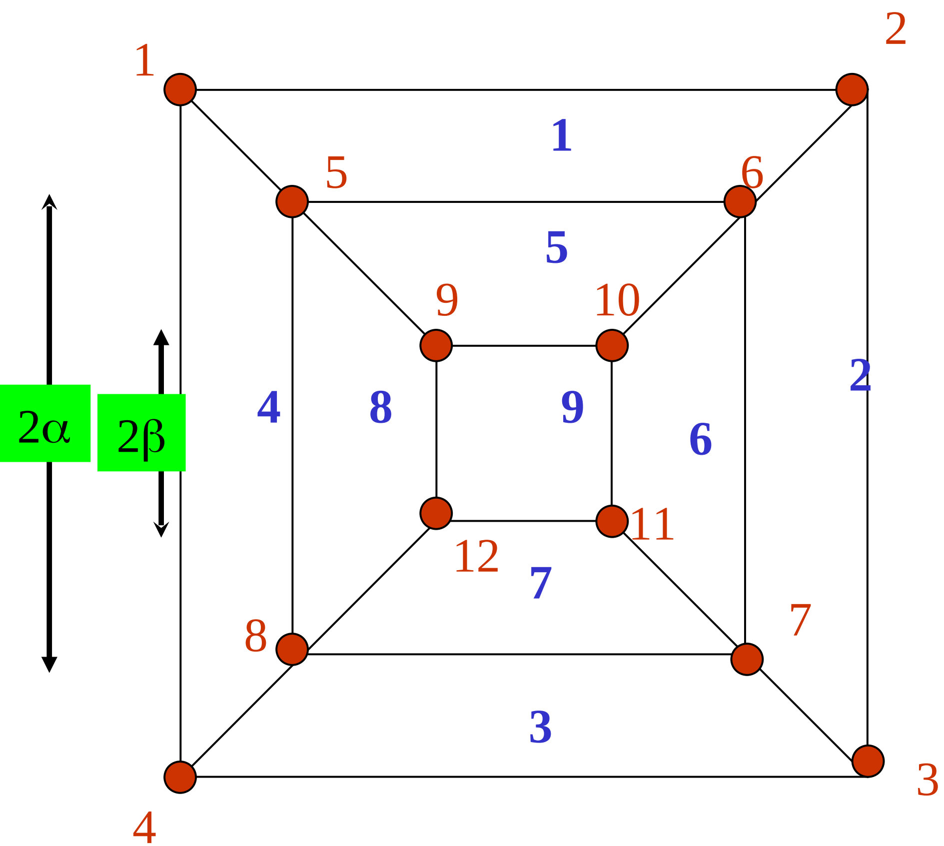


dokładny

Hermite'a - 100 p.w.

po diagonali

Optymalizacja kształtu elementów: przykład dla bazy bikwadratowej



jak dobrać optymalne rozmiary α/β?

metoda elementów skończonych, jak każda Galerkina, ma charakter wariacyjny

$$\nabla^2 u = -\rho(x,y)$$

$$a = \int \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \rho(x,y)u(x,y) \right] dxdy$$

warunek na optymalne α/β: a=min

$$a = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \rho(x,y) u(x,y) \right] dxdy$$

$$a = \sum_m \int_{\Omega_m} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \rho(x,y) u(x,y) \right] dxdy$$

w elemencie m:

$$u(x(\xi_1,\xi_2), y(\xi_1,\xi_2)) = \sum_k c_k^m \phi_k(x(\xi_1,\xi_2), y(\xi_1,\xi_2))$$

przy czym zależność x i y od xi zależy od m

$$\int_{\Omega_m} [] = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J_m \{$$
$$\frac{1}{2} \left(\sum_k \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_k \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \right)^2$$
$$-\rho(x(\xi_1,\xi_2), y(\xi_1,\xi_2)) \sum_k c_k \phi_k \}$$

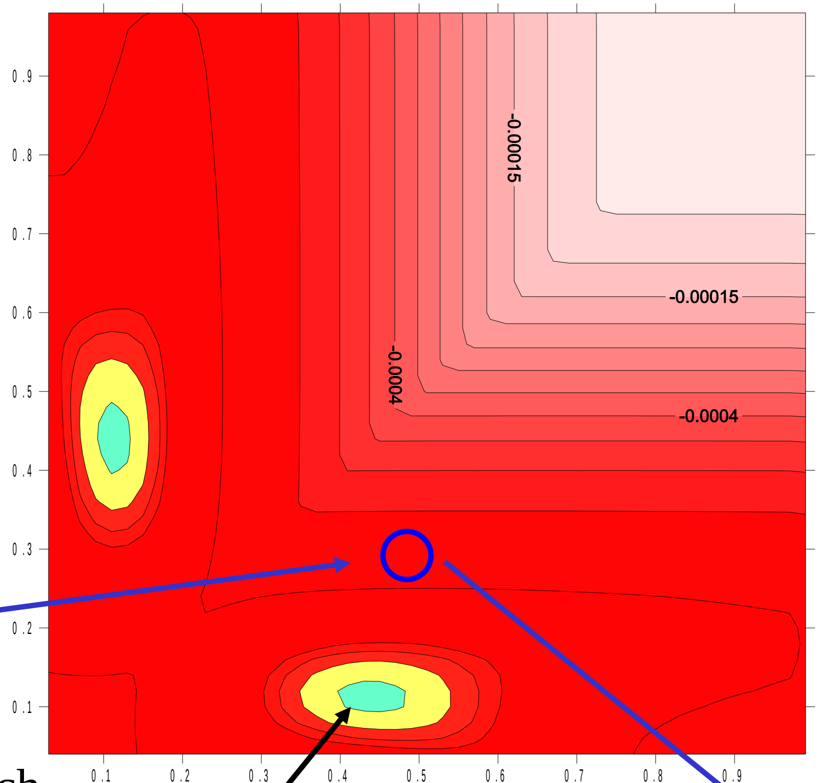
Sc=F

$$a = \frac{1}{2} \sum_{k,l} c_k c_l S_{kl} - \sum_k c_k F_k$$

Optymalizacja kształtu elementów: wyniki dla bazy bikwadratowej

$a(\alpha,\beta)$

β



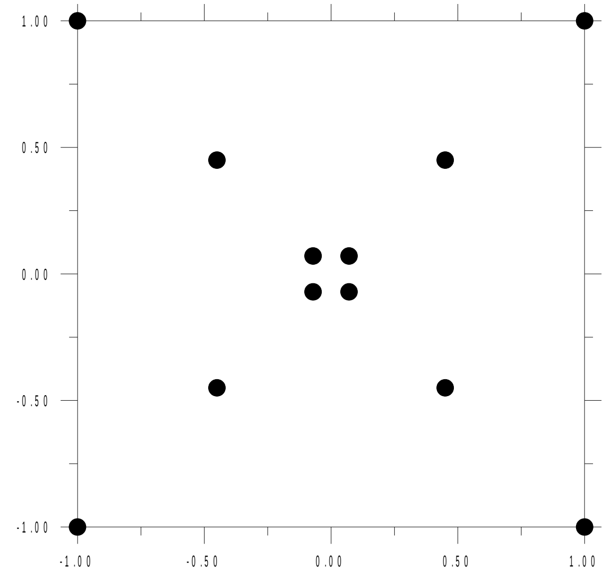
α

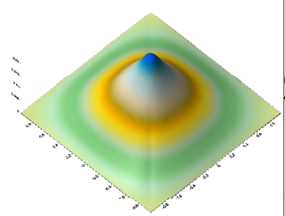
taki kształt został wybrany do poprzednich rysunków

S= -6.15e-4

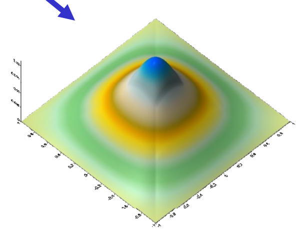
dokładne minimum funkcjonału -6.274e-4

Optymalne elementy (narożniki)

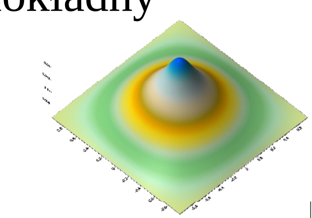




zoptymalizowany



dokładny



Metoda elementów skończonych dla dwuwymiarowego równania własnego

$$H\Psi_n = E_n\Psi_n$$

podejdziemy dla problemu, w którym znane jest rozwiązanie analityczne

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

2D oscylator harmoniczny

separacja zmiennych

$$\Psi_n(x,y) = \psi_i(x)\psi_j(y)$$

$$H = H_x + H_y$$

$$\frac{H_x\psi_i(x)}{\psi_x(x)} + \frac{H_y\psi_j(y)}{\psi_j(y)} = E_n$$

$E_n=E_i+E_j$

1D oscylator: $E_i=1/2+i$

$$\psi_i(x) = \exp(-x^2/2)h_i(x)$$

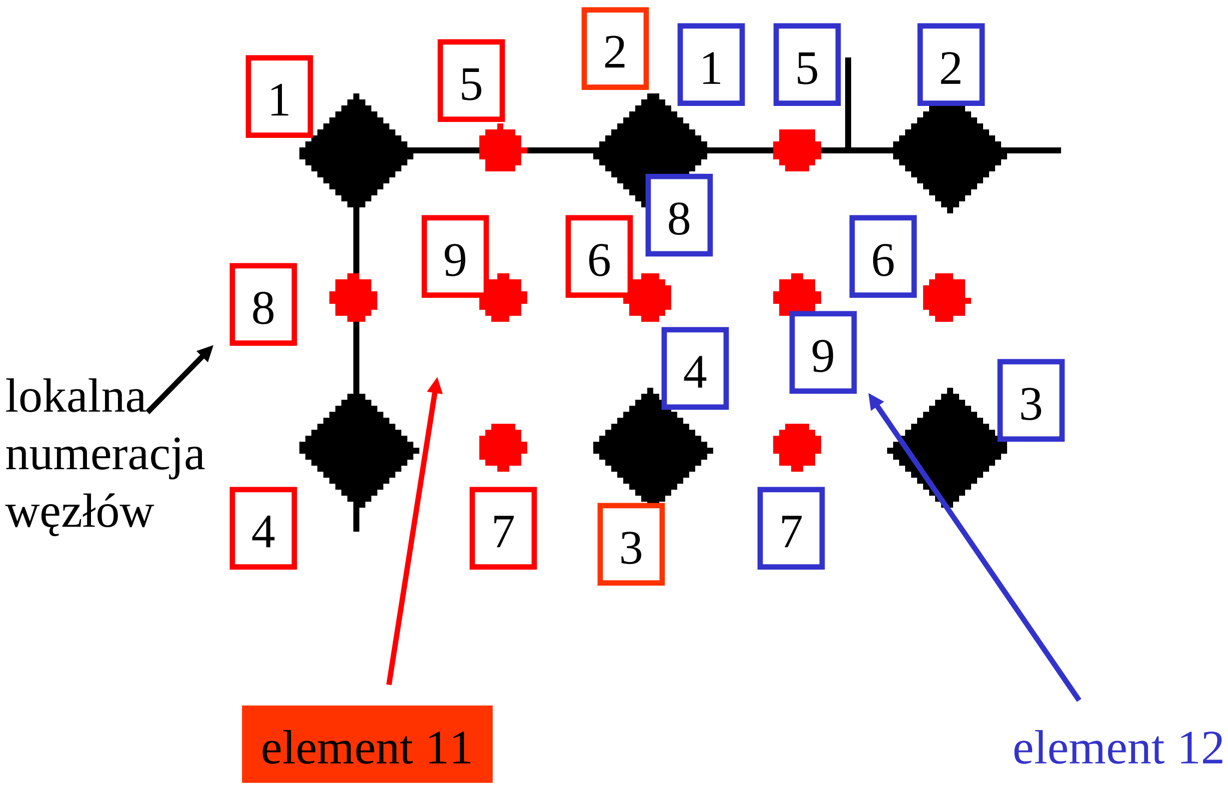
$$h_i(x) = \exp(x^2)\frac{d^i}{dx^i}\exp(-x^2)$$

bikwadratowe funkcje kształtu:

$$\Psi(x,y)=\sum_m \sum_n c_n^m \phi_n^m(x,y)$$

po elementach

po węzłach w ramach jednego elementu

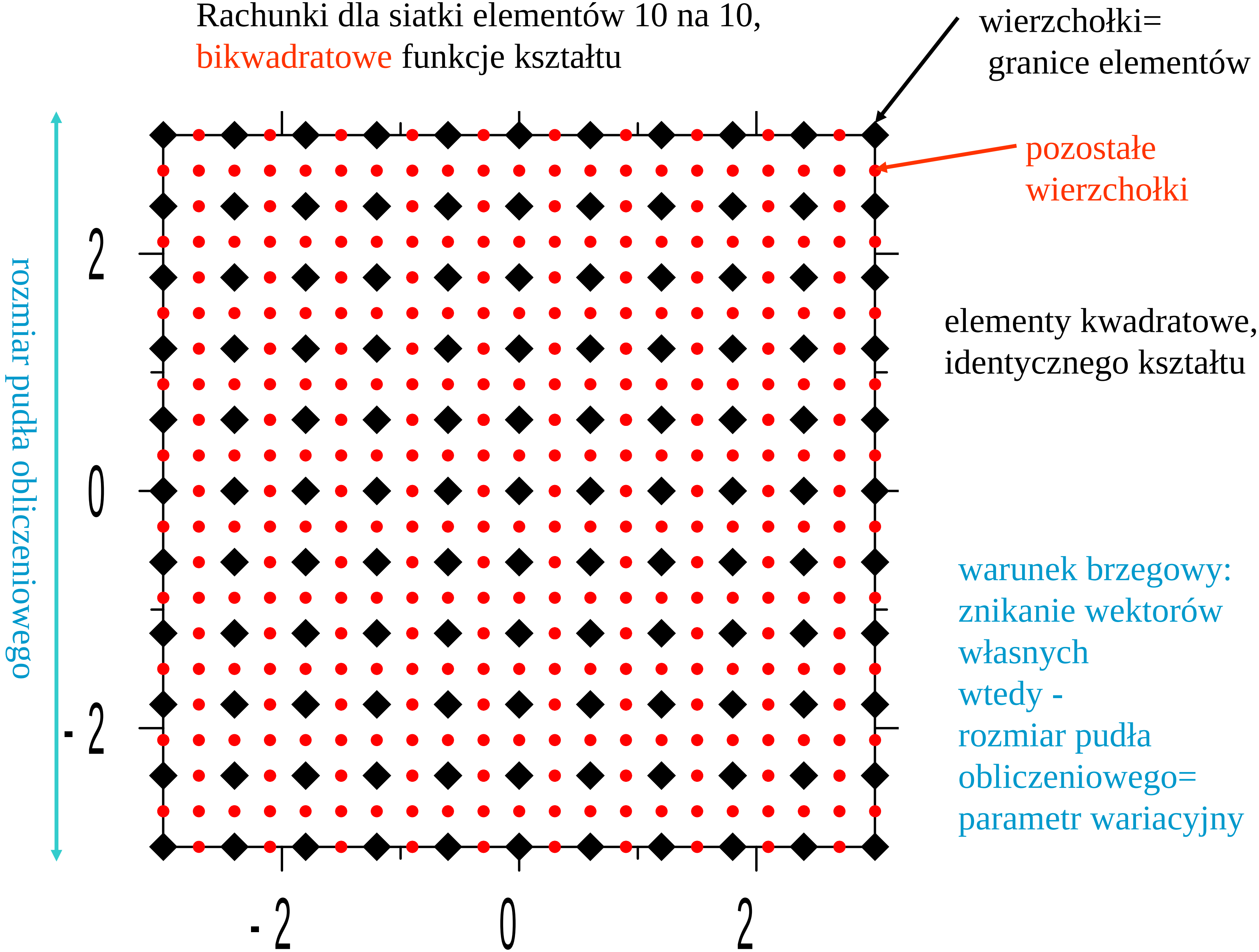


ciągłość:

$$c_2^{11}=c_1^{12}$$
$$c_6^{11}=c_8^{12}$$
$$c_3^{11}=c_{12}^{4}$$

zapewnimy ją globalną numeracją węzłów i odpowiednią konstrukcją macierzy

Rachunki dla siatki elementów 10 na 10,
bikwadratowe funkcje kształtu



elementy kwadratowe,
identycznego kształtu

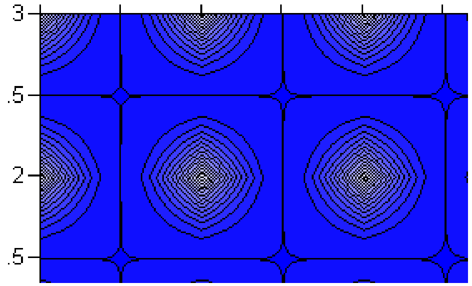
warunek brzegowy:
znikanie wektorów
własnych
wtedy -
rozmiar pudła
obliczeniowego=
parametr wariacyjny

$$\Psi(x,y) = \sum_m \sum_n c_n^m \phi_n^m(x,y)$$

$$\Psi(x,y) = \sum_i c_i \phi_i(x,y)$$

przenumerowanie
jest tyle funkcji ile węzłów globalnych

narysowane
tylko funkcje narożne
jedna ϕ_i składa się z
w istocie z czterech ϕ_n^m



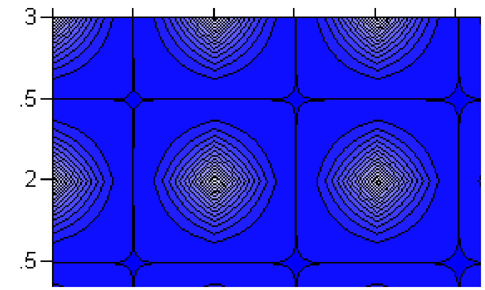
Hc=ESc

uogólnione równanie własne do rozwiązania

macierz Hamiltonianu
(odpowiednik macierzy sztywności)

macierz przekrywania
[E**Sc** – odpowiednik wektora obciążeń]

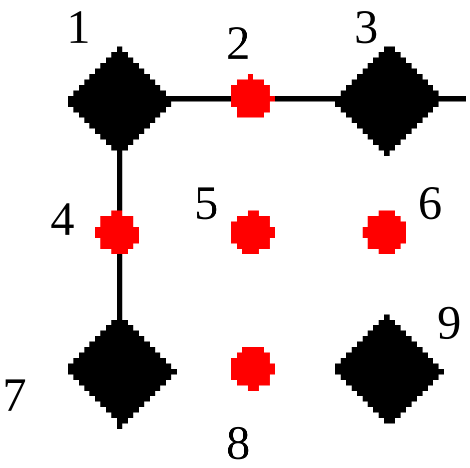
Hc=ESc



$$H_{ij} = (\phi_i, H\phi_j) = \left(\phi_i, \left(\underbrace{-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)}_{T_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)}_{V_{ij}}\right)\phi_j\right)$$

$$S_{ij} = (\phi_i, \phi_j)$$

Lokalne macierze sztywności (Hamiltonianu) + lokalne macierze przekrywania

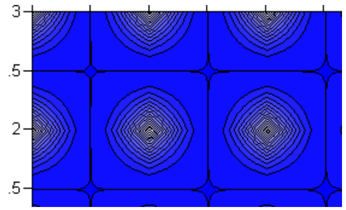


lokalna macierz energii kinetycznej

$$T_{ij}^{m} = \frac{1}{2}\int_{S_m} \nabla\phi_i(x,y)\cdot\nabla\phi_j(x,y)\,dx\,dy$$

kwadratowe, identyczne elementy
identyczne macierze, niezależne od elementu

Macierz potencjału:



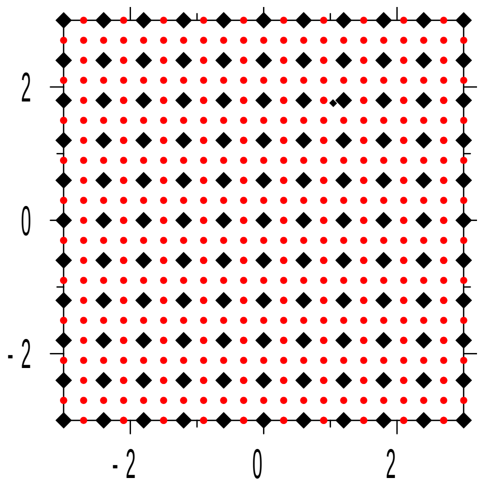
$$V_{ij}^m = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J_m \phi_i(\xi_1,\xi_2)\phi_j(\xi_1,\xi_2)\left(x(\xi_1,\xi_2)^2 + y(\xi_1,\xi_2)^2\right)$$

zależy od elementu,
bo mapowania x/y(ξ_1,ξ_2)
od m zależą

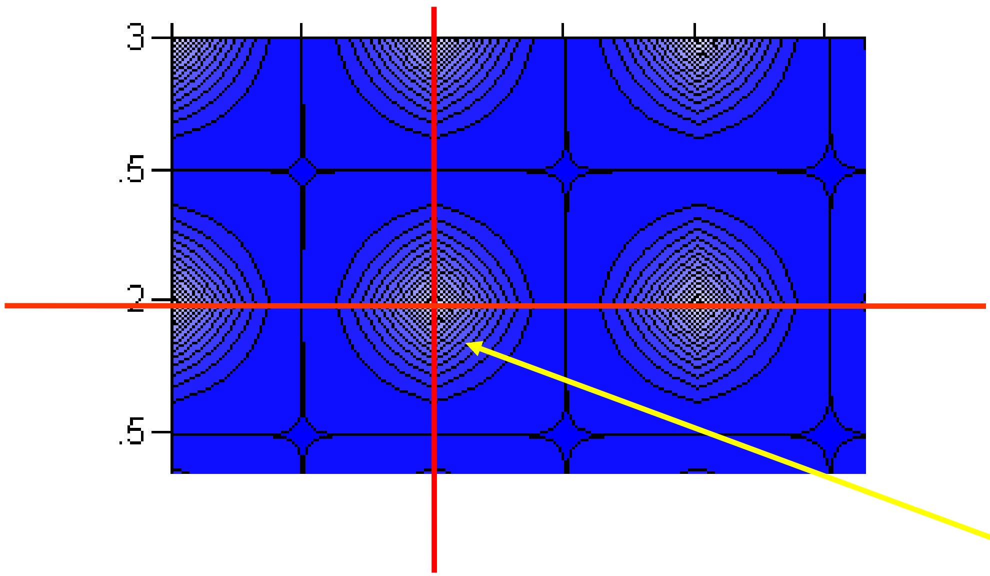
$$S_{ij}^m = \int_{-1}^{1} d\xi_1 \int_{-1}^{1} d\xi_2 J_m \phi_i(\xi_1,\xi_2)\phi_j(\xi_1,\xi_2)$$

od elementu już nie zależy

Składanie macierzy:



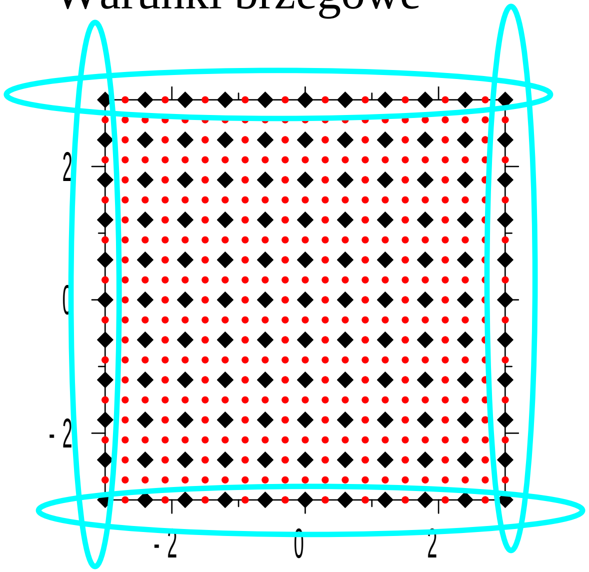
wszystkie 21^2 węzłów ponumerowane
w sposób jednoznaczny
dodatkowo
lg(i,m) = numer globalny węzła i w elemencie m



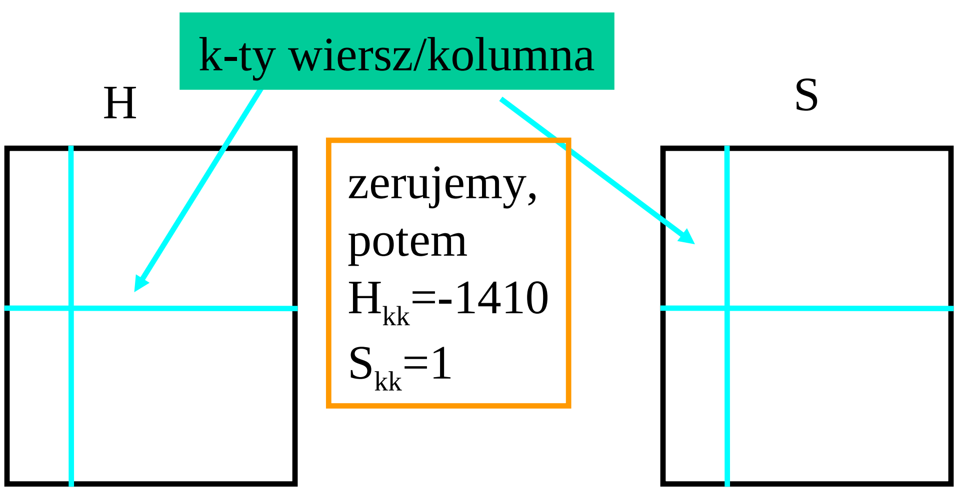

```
do 1 m=1,100
        do 2 i=1,9
        do 2 j=1,9
        H(lg(i,m),lg(j,m))+=H(i,j,m)
        S(lg(i,m),lg(j,m))+=S(i,j,m)
        2 continue
1 continue
```

np. dla tego węzła zsumujemy przyczynki od funkcji w 4 różnych elementach

Warunki brzegowe



chcemy, żeby funkcje własne znikały na brzegu
jak?
wyrzucić wszystkie funkcje kształtu z bazy
z brzegu [pozostałe funkcje kształtu = 0 na węzłach brzegowych]
albo
(wersja dla leniwych)

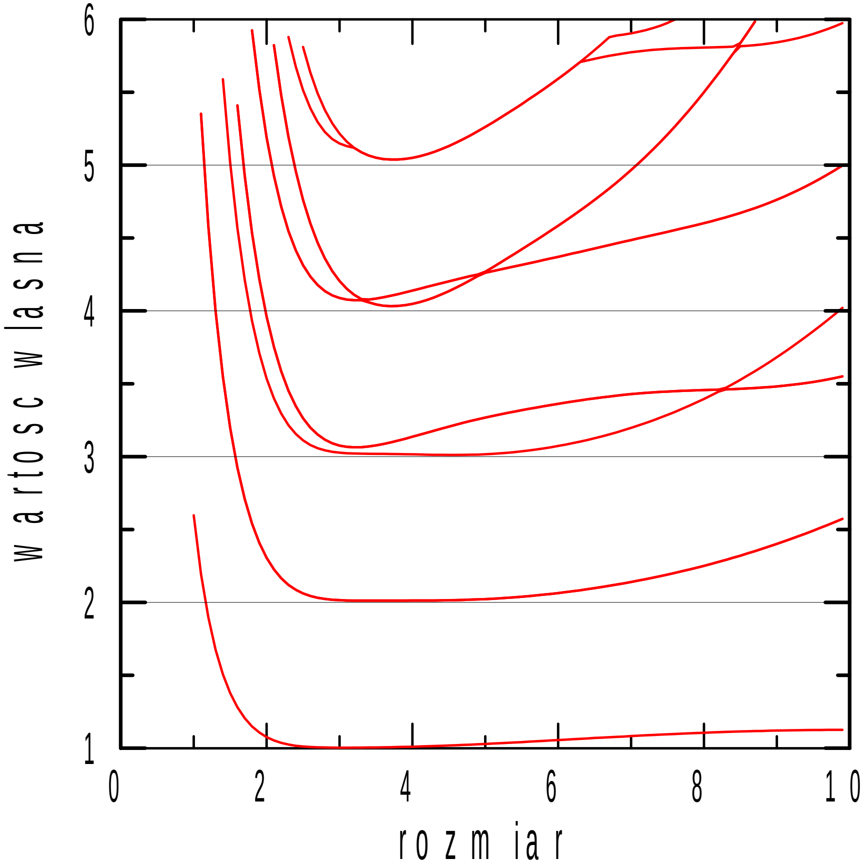


Zerowanie: odsprzęgnie węzły brzegowe od całej reszty.

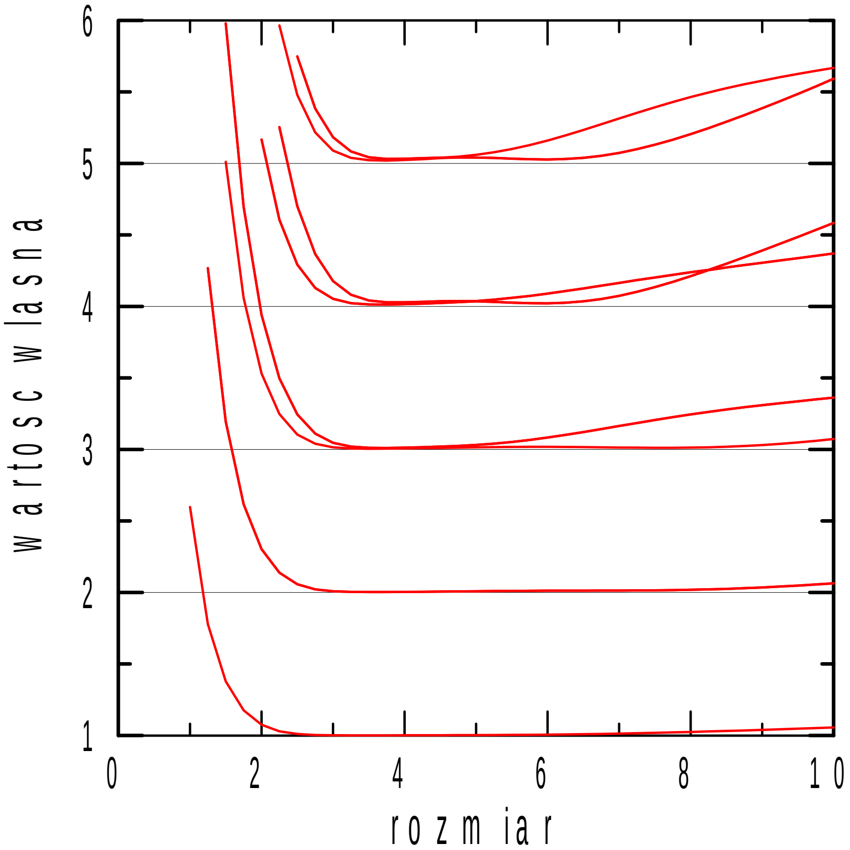
dostaniemy wartość własną –1410 zdegenerowaną tylu krotnie ile jest węzłów brzegowych

również: można po prostu skreślić te kolumny/wiersze z macierzy

6 na 6 elementów



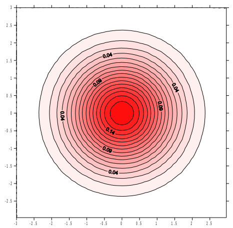
10 na 10 elementów



bikwadratowe funkcje kształtu, 9 na element.
elementy identyczne, kwadratowe

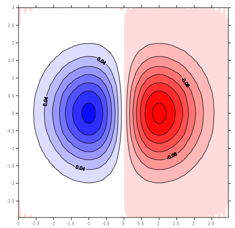
pudło obliczeniowe 3 na 3, 10 na 10 elementów:

λ=1.0011

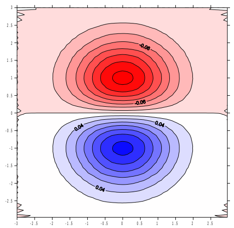


(i,j)=(0,0)

λ=2.0077

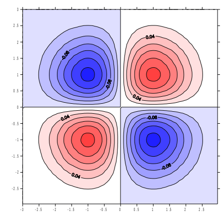


(1,0)



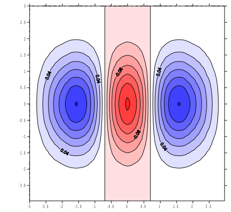
(0,1)

λ=3.014

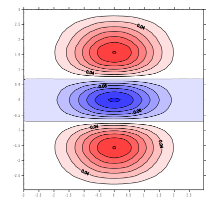


(1,1)

λ=3.0459



(2,0)



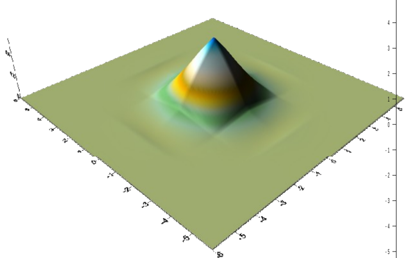
(0,2)

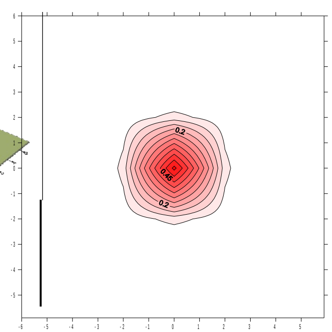
$$E_n = E_i + E_j = i + j + 1$$

$$\Psi_n(x,y) = \psi_i(x)\psi_j(y)$$

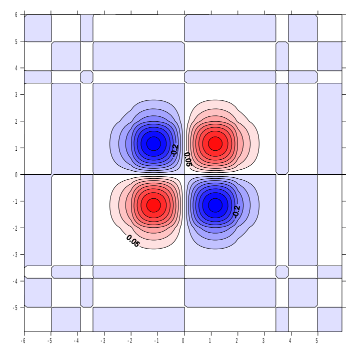
---

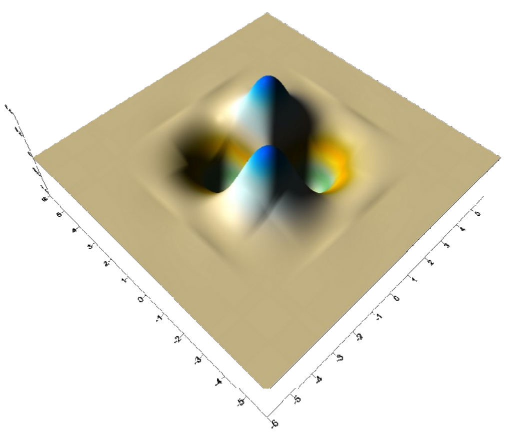
gdy 6 na 6 elementów i pudło za duże





(0,0)





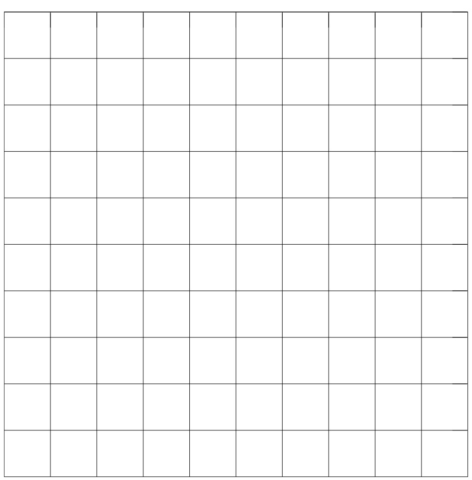
granice elementów widać,
gdy elementy **źle** dobrane

czy warto się trudzić,
czyli, czy FEM skuteczna w porównaniu z FDM?

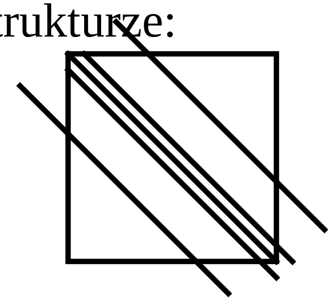
$$H\Psi_n = E_n \Psi_n$$

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

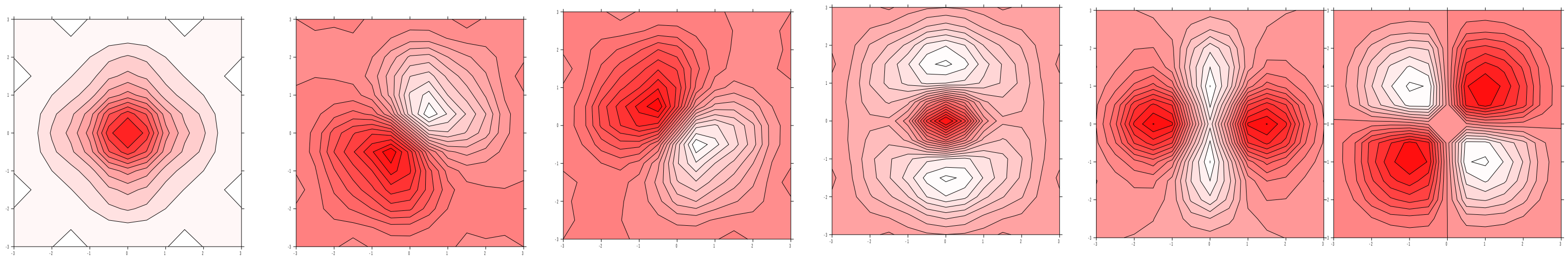
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\Psi_n(x+dx,y) + \Psi_n(x-dx,y) - 2\Psi_n(x,y)}{dx^2} + \frac{\Psi_n(x,y+dy) + \Psi_n(x,y-dy) - 2\Psi_n(x,y)}{dy^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\Psi_n(x,y) = E_n \Psi_n(x,y)$$



ponumerować węzły,
(np. tak jak w równaniu przewodnictwa cieplnego),
równanie różnicowe zapisać w postaci równania wlasnego
macierzy o strukturze:



Dla porównania metod: MES i MRS liczba węzłów identyczna: 13 na 13, pudło 3 na 3



MRS widmo	MRS błąd	MES widmo	MRS błąd
0.976	-0.024	1.003	0.003
1.929	-0.071	2.015	0.015
1.929	-0.071	2.015	0.015
2.833	-0.167	3.026	0.026
2.882	-0.118	3.075	0.075
2.883	-0.117	3.075	0.075

przykład szczęśliwie się
zakończył dla MRS, ale to przypadkiem