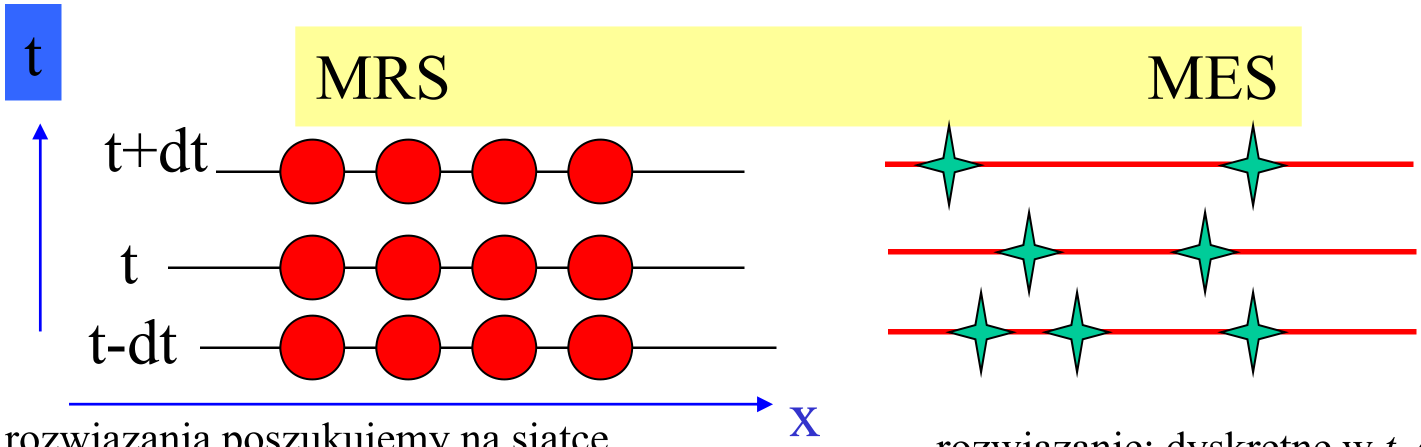
Problemy zależne od czasu w metodzie elementów skończonych

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} \longrightarrow$$ np. równanie adwekcji

$$u(x,t) = \sum_j u_j(t)\phi_j(x) \longleftarrow$$ cała zależność czasowa włożona do współczynników rozwinięcia w bazie funkcyjnej

$u_j(t)$ – wartość rozwiązania w węźle j w chwili t

interesuje nas rozwiązanie w *dyskretnych* chwilach czasowych
opis zmiennej położeniowej natomiast: ciągły



rozwiązania poszukujemy na siatce punktów dyskretnych w czasie i przestrzeni

rozwiązanie: dyskretne w *t*, ciągłe w *x*
węzły funkcji kształtu mogą się przesuwać w *t*

czas = będzie traktowany jak w metodzie różnic skończonych

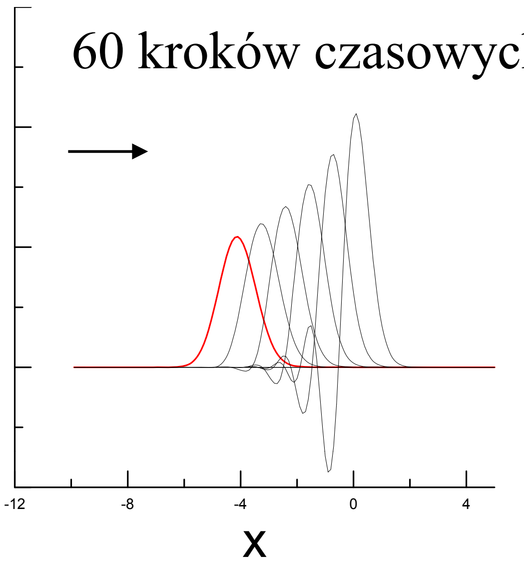
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$$ równanie adwekcji

Jawny schemat Eulera w metodzie różnic skończonych (niestabilny bezwzględnie)

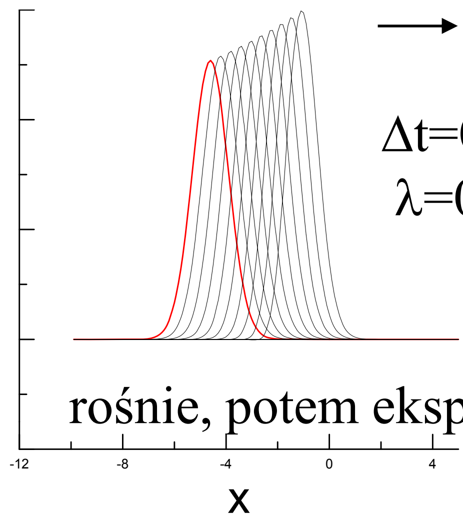
$$\frac{u(j,n+1)-u(j,n)}{\Delta t} = -v\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$u(j,n+1) = -v\Delta t\frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2\Delta x} + u(j,n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

60 kroków czasowych:

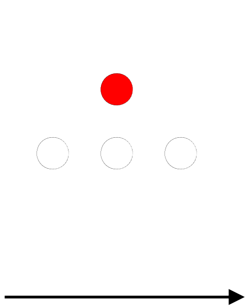


Δt=0.09
λ=0.9



Δt=0.04
λ=0.4

rośnie, potem eksploduje



MES: z czasem

$$u(x,t) = \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(x,t+dt) = \sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x)$$

MES: z czasem

$$u(x,t) = \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(x,t+dt) = \sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x)$$

w MRS: stabilny był schemat z jednostronnie liczoną pochodną przestrzenną (upwind)
pochodna czasowa liczona była jak w jawnej metodzie Eulera
O stabilności schematu decydował sposób liczenia pochodnych przestrzennych.
teraz pochodne przestrzenne policzymy dokładnie (w wybranej bazie)
czy pomoże to ustabilizować schemat?

$$\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt} = -v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$u(x,t+dt) = -vdt\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + u(x,t)$$

$$\sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x) = -vdt\sum_j u_j(t)\phi_j'(x) + \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

MES: z czasem

$$\sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x) = -vdt \sum_j u_j(t)\phi_j'(x) + \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

układ równań na zależność od czasu wartości w węzłach
wyprowadzamy jak w metodzie Galerkina przez rzutowanie na elementy bazowe

$$\times \phi_k(x) \int dx$$

$$\sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x) = -vdt \sum_j u_j(t)\phi_j'(x) + \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

$$\times \phi_k(x) \int dx$$

dostajemy równanie macierzowe:

$$\sum_j O_{kj} u_j(t+dt) = -vdt \sum_j F_{kj} u_j(t) + \sum_j O_{kj} u_j(t)$$

$$\sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x) = -vdt\sum_j u_j(t)\phi'_j(x) + \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

$$\times\phi_k(x)\int dx$$

dostajemy równanie macierzowe:

$$\sum_j O_{kj}u_j(t+dt) = -vdt\sum_j F_{kj}u_j(t) + \sum_j O_{kj}u_j(t)$$

$$O_{kj} =< \phi_k|\phi_j >$$

(macierz przekrywania,
zwana również macierzą masy)

$$F_{kj} =< \phi_k|\phi'_j >$$

$$\sum_j O_{kj}u_j(t+dt) = \sum_j P_{kj}u_j(t)$$

$$P_{kj}=-vdtF_{kj}+O_{kj}$$

równanie adwekcji MES z dyskretyzacją czasową typu Eulera

$$\sum_j O_{kj} u_j(t+dt) = \sum_j P_{kj} u_j(t)$$

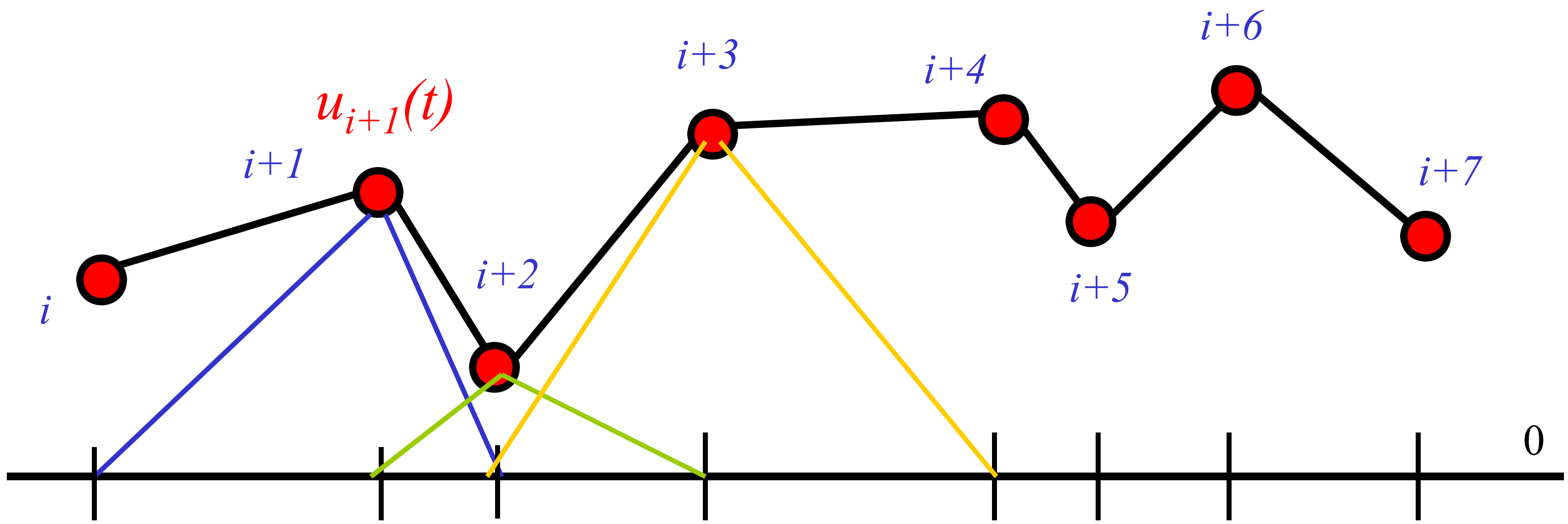
$$P_{kj} = -v\,dt\,F_{kj} + O_{kj}$$

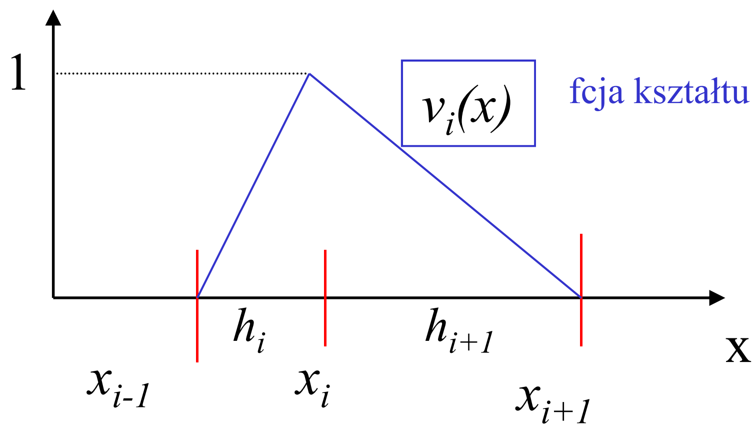
jeden krok wymaga rozwiązania układu równań:

$\mathbf{O}\mathbf{u}(t+dt)=\mathbf{P}\mathbf{u}(t)$

konkretna forma macierzowa problemu – zależy od wyboru funkcji kształtu

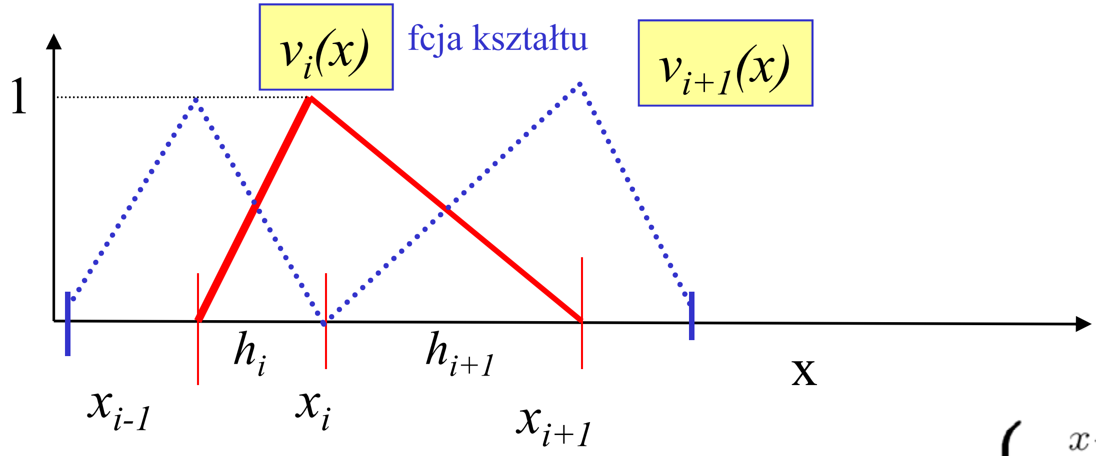
$\longrightarrow$ do aplikacji numerycznej musimy jakąś bazę wybrać weźmy MES z funkcjami odcinkami liniowymi *liniowe funkcje kształtu*





$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \bigcup K_{i+1} \end{cases}$$

$$O_{kj} = < v_k | v_j > = \frac{1}{3} \left(\delta_{kj}(h_j + h_{j+1}) + \frac{1}{2} \delta_{(k+1,j)} h_j + \frac{1}{2} \delta_{(k-1,j)} h_{j+1} \right)$$



$$F_{kj} = < v_k | v_j' >$$

$$v_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in K_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i \bigcup K_{i+1} \end{cases}$$

$$v_i(x) v_i'(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} & x \in K_i \\ \frac{x - x_{i+1}}{(x_{i+1} - x_i)^2} & x \in K_{i+1} \\ 0 & x \notin K_i + K_{i+1} \end{cases}$$

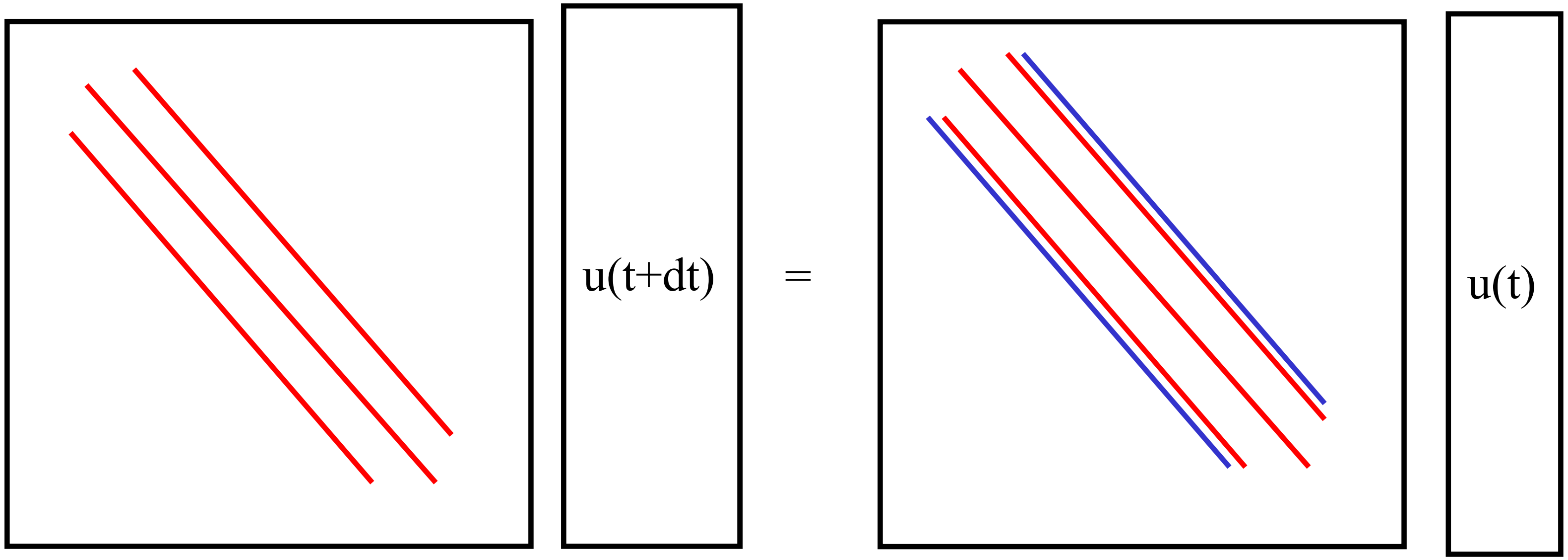
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} v_i(x) v_i'(x) dx = \frac{1}{2} \qquad \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i(x) v_i'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

$$F_{ii} = 0, \; F_{i,i+1} = +1/2 \; , \; F_{i,i-1} = -1/2$$

$$\sum_j O_{kj} u_j(t+dt) = \sum_j P_{kj} u_j(t)$$

$$P_{kj} = -vdtF_{kj} + O_{kj}$$

forma macierzowa: $\mathbf{O}\mathbf{u}(t+dt)=\mathbf{P}\mathbf{u}(t)$



dla siatki równomiernej
2/3 dx na diagonali
1/6 nad i pod

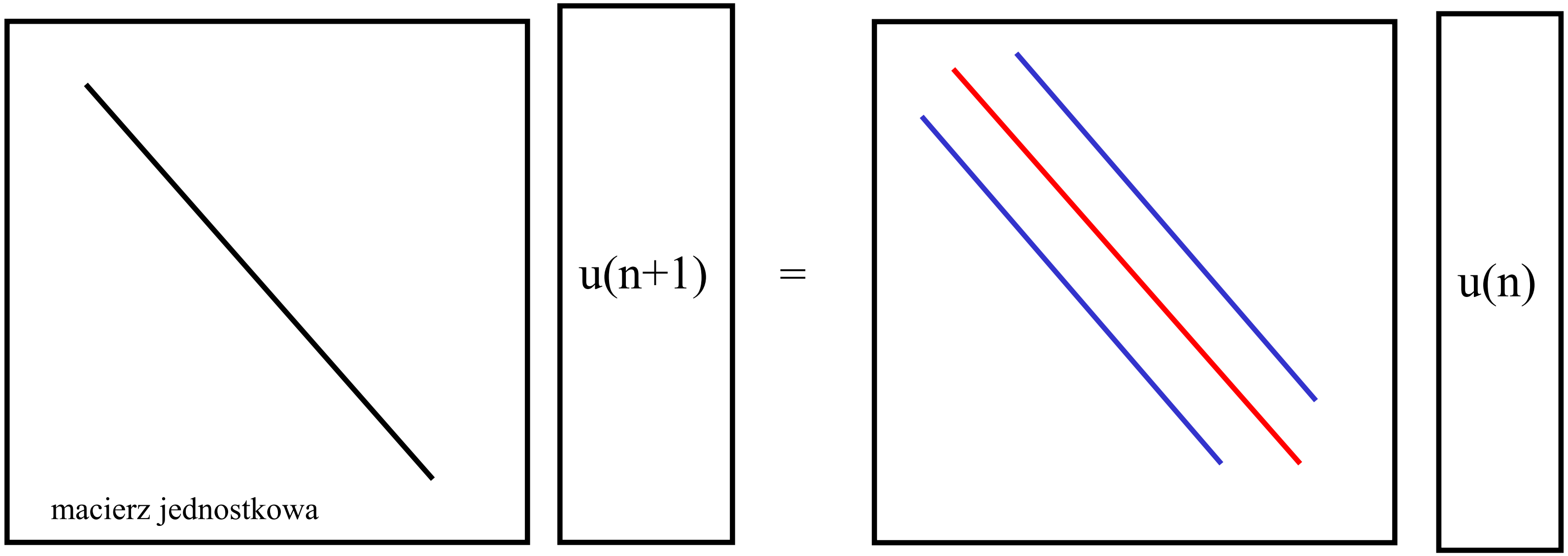
nad diagonalą +1/2 (-vdt)
pod diagonalą –1/2 (-vdt)

Euler dla MRS funkcjonował jak podstawienie. Teraz mamy rozwiązać układ równań.

Jak wygląda w MRS wygląda równanie schematu jawnego?

$$u(j, n+1) = u(j, n) - v\Delta t \frac{u(j+1, n) - u(j-1, n)}{2\Delta x}$$

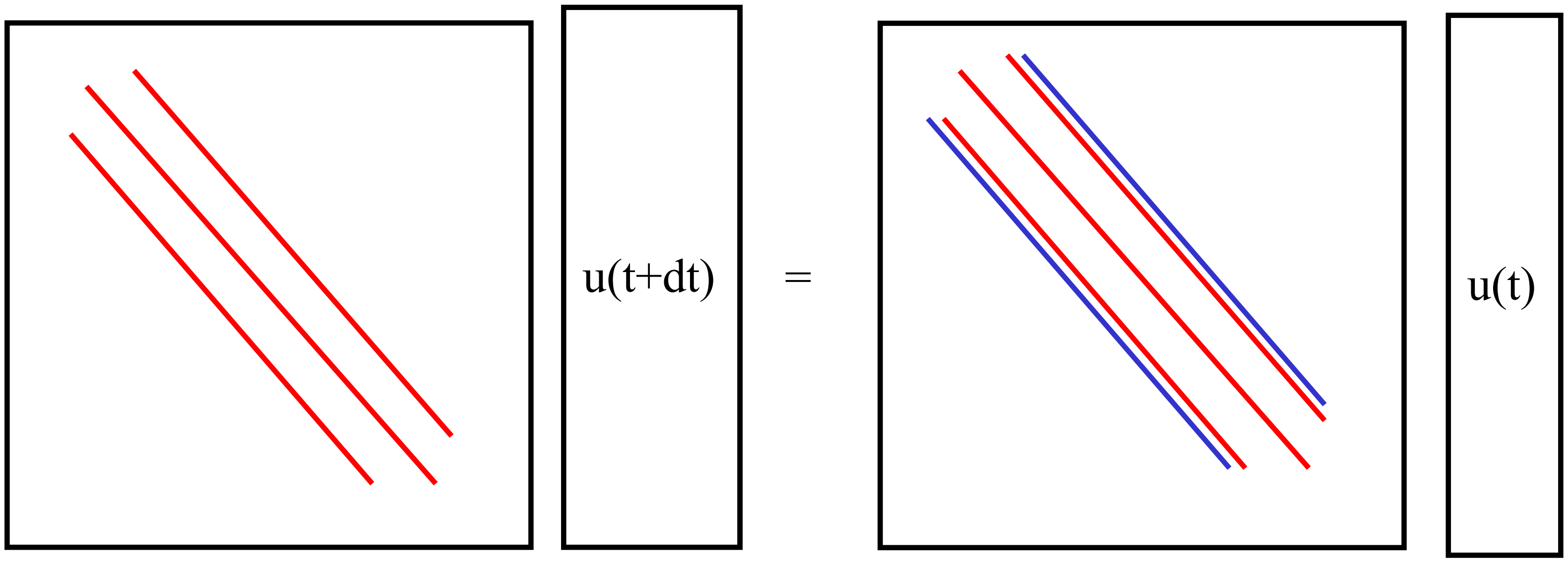
!



$$\sum_j O_{kj} u_j(t+dt) = \sum_j P_{kj} u_j(t)$$

$$P_{kj} = -\nu dt F_{kj} + O_{kj}$$

forma macierzowa:



MES zbudowana na podstawie jawnego schematu Eulera:
nie działa jak podstawienie!

musimy a) odwrócić macierz O [będzie gęsta]
b) albo rozwiązać układ równań
metodą iteracyjną

odwrócić O:

```
A:=matrix(4,4,[2/3,1/6,0,0, 1/6,2/3,1/6,0 ,0,1/6,2/3,1/6, 0,0,1/6,2/3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{336}{209} & \frac{-90}{209} & \frac{24}{209} & \frac{-6}{209} \\ \frac{-90}{209} & \frac{360}{209} & \frac{-96}{209} & \frac{24}{209} \\ \frac{24}{209} & \frac{-96}{209} & \frac{360}{209} & \frac{-90}{209} \\ \frac{-6}{209} & \frac{24}{209} & \frac{-90}{209} & \frac{336}{209} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{u}(t+dt) := \mathbf{O}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{u}(t)$

wartość w węźle *j* w chwili *t+dt* zależy od wartości <u>we wszystkich węzłach</u> w chwili *t*

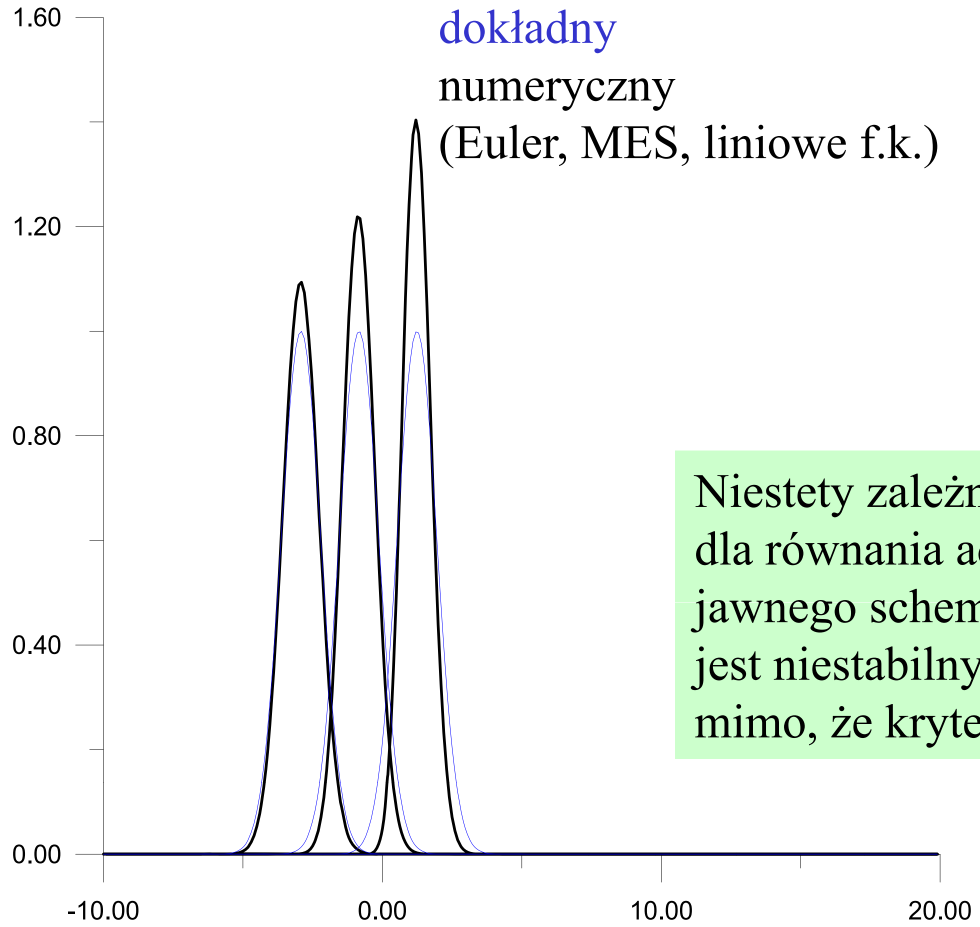
- jak dla schematu niejawnego w MRS

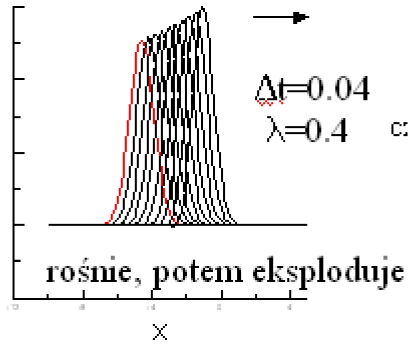
2) Przeszłość numeryczna dla $u_j(t)$: wszystkie punkty dla $t_p \leq t$, kryterium CFL spełnione zawsze (w przeciwieństwie do Eulera jawnego)

2) Przeszłość numeryczna dla $u_j(t)$: wszystkie punkty dla $t_p \leq t$, kryterium CFL spełnione zawsze (w przeciwieństwie do Eulera jawnego)

pomimo tego:

Wyniki MES: dx=0.1
dt=0.04
v=1





wynik MRS

Niestety zależny schemat MES zbudowany dla równania adwekcji na podstawie jawnego schematu Eulera, jest niestabilny (jak jawny Euler dla MRS) mimo, że kryterium CFL jest zawsze spełnione

W takim razie:
jeśli jawny Euler w MES nie daje metody podstawieniowej
a zachowuje dokładność podobną dla MRS,
spróbujmy skonstruować zależny od czasu schemat MES
 na podstawie niejawnego schematu Eulera
(który jest stabilny bezwzględnie dla MRS)

MES na podstawie niejawnego (wstecznego Eulera)

$$\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt} = -v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}$$

$$u(x,t+dt) + vdt\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x} = u(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

$$u(x,t+dt) = \sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x)$$

MES na podstawie niejawnego (wstecznego Eulera)

$$\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt} = -v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}$$

$$u(x,t+dt) + vdt\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x} = u(x,t)$$

$$u(x,t) = \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

$$u(x,t+dt) = \sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x)$$

$$\sum_j (O_{kj} + vdtF_{kj})u_j(t+dt) = \sum_j O_{kj}u_j(t)$$

MES na podstawie niejawnego (wstecznego Eulera)

$$\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt} = -v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}$$

$$u(x,t+dt) + vdt\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x} = u(x,t)$$

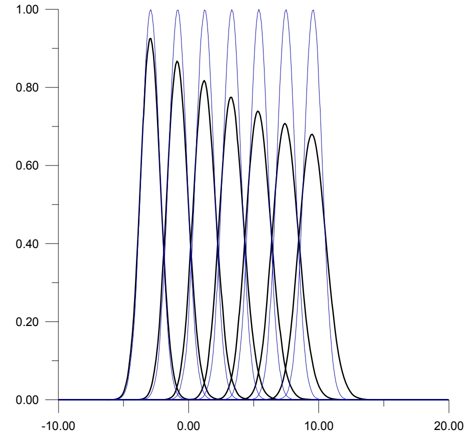
$$u(x,t) = \sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

$$u(x,t+dt) = \sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x)$$

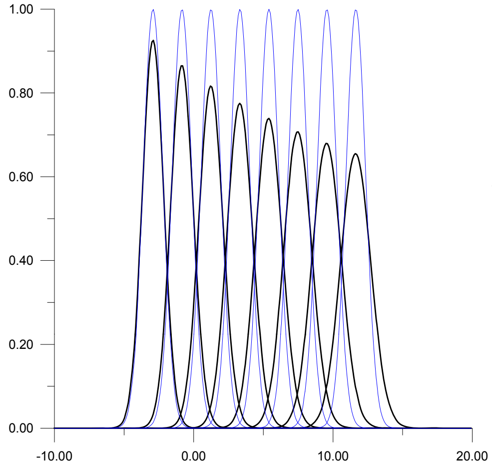
$$\sum_j (O_{kj} + vdtF_{kj})u_j(t+dt) = \sum_j O_{kj}u_j(t)$$

Δt=0.04

wsteczny Euler w MRS



dx=0.1



MES: stabilny, lecz podobnie jak w MRS obarczony dyspersją (można ją stłumić małymi krokami przestrzennym i czasowym)

Wyniki są prawie nierozróżnialne MES/MRS
MES z wstecznym Eulerem równie dobry/zły jak MRS

weźmy przyzwoity schemat: Cranka - Nicolsona

$$\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt}=\frac{1}{2}\left(-v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}\right)$$

$$u(x,t+dt)=u(x,t)+\frac{dt}{2}\left(-v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}\right)$$

wzór trapezów

weźmy przyzwoity schemat: Cranka - Nicolsona

$$\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt}=\frac{1}{2}\left(-v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}\right)$$

$$u(x,t+dt)=u(x,t)+\frac{dt}{2}\left(-v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}\right)$$

wzór trapezów

$$u(x,t+dt)+\frac{vdt}{2}\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}=u(x,t)-\frac{vdt}{2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

weźmy przyzwoity schemat: Cranka - Nicolsona

$$\frac{u(x,t+dt)-u(x,t)}{dt}=\frac{1}{2}\left(-v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}\right)$$

$$u(x,t+dt)=u(x,t)+\frac{dt}{2}\left(-v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}-v\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}\right)$$

wzór trapezów

$$u(x,t+dt)+\frac{vdt}{2}\frac{\partial u(x,t+dt)}{\partial x}=u(x,t)-\frac{vdt}{2}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

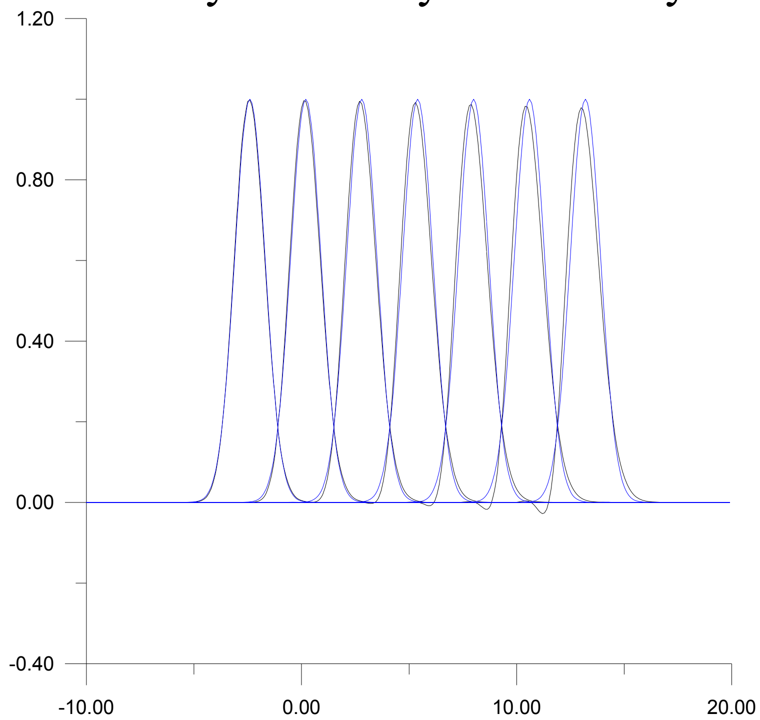
$$u(x,t+dt)=\sum_j u_j(t+dt)\phi_j(x) \qquad u(x,t)=\sum_j u_j(t)\phi_j(x)$$

$$\sum_j\left(O_{kj}+\frac{vdt}{2}F_{kj}\right)u_j(t+dt)=\sum_j\left(O_{kj}-\frac{vdt}{2}F_{kj}\right)u_j(t)$$

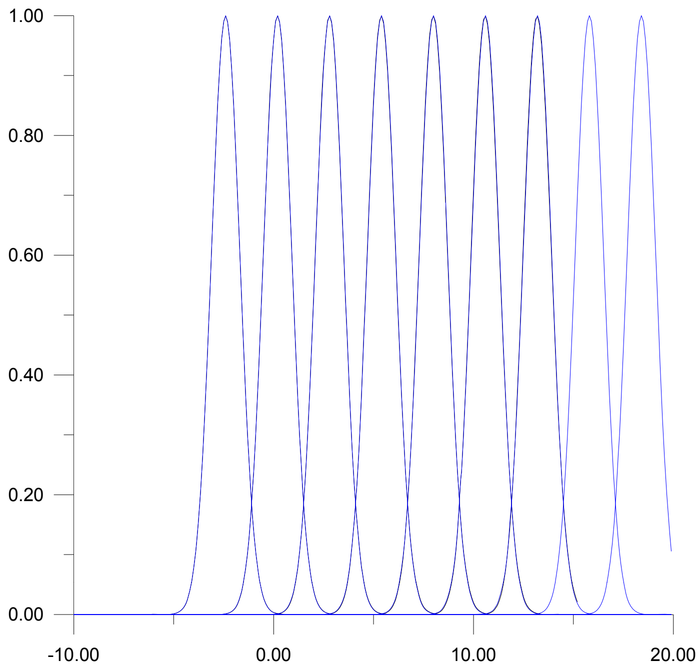
$$F_{kj}=<\phi_k|\phi_j'> \qquad O_{kj}=<\phi_k|\phi_j>$$

Metoda CN: MES (liniowe funkcje kształtu) a MRS

MRS CN, dx=0.1, dt=0.05
2 krzywe: analityczna/numeryczna



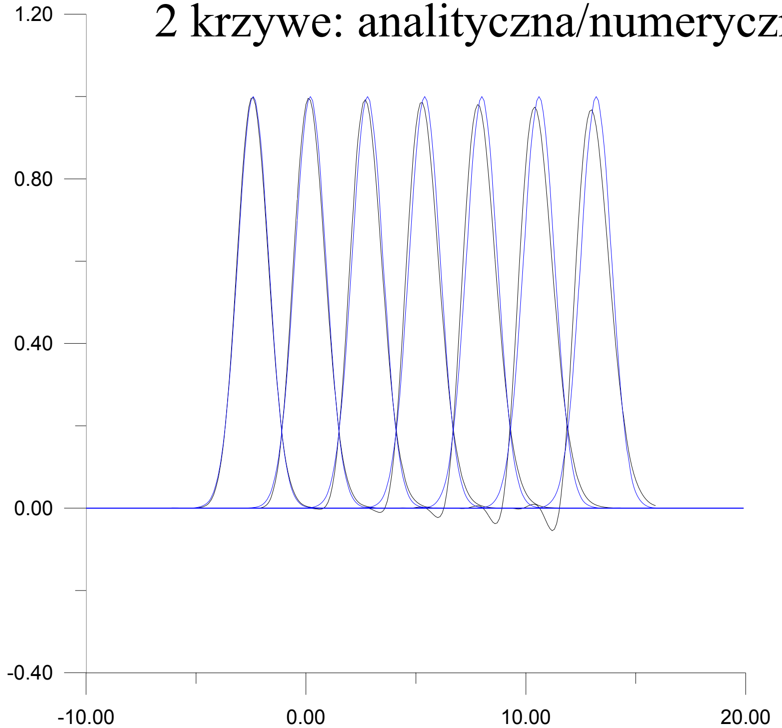
MES CN, dx=0.1, dt=0.05
2 krzywe: analityczna/numeryczna



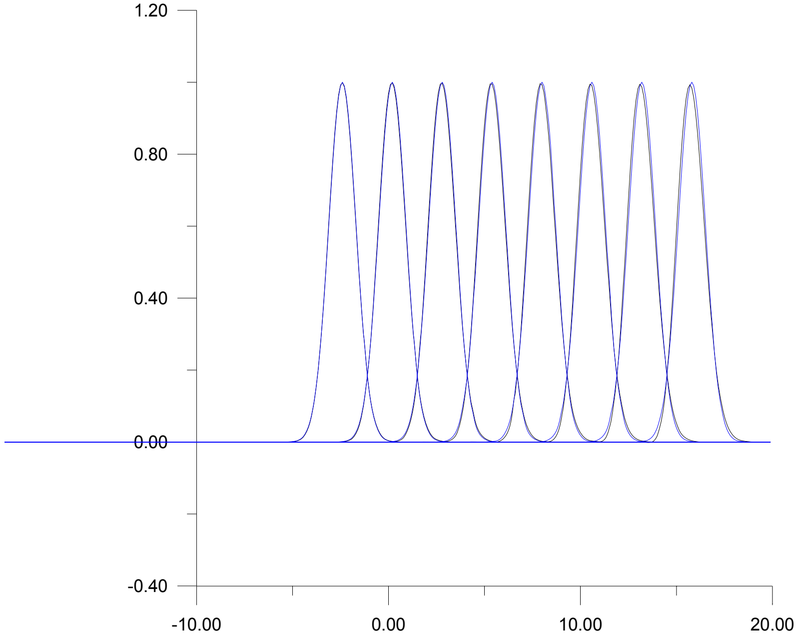
Metoda CN: MES (liniowe funkcje kształtu) a MRS

krok krytyczny CFL
v dt = dx

MRS CN, dx=0.1, dt=0.1
2 krzywe: analityczna/numeryczna



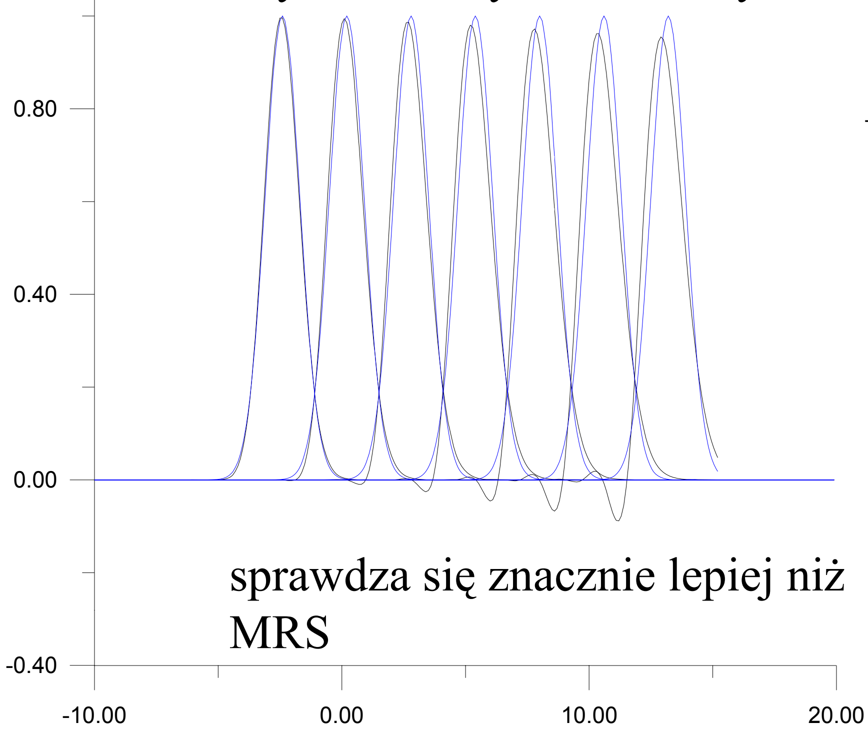
MES CN, dx=0.1, dt=0.1
2 krzywe: analityczna/numeryczna



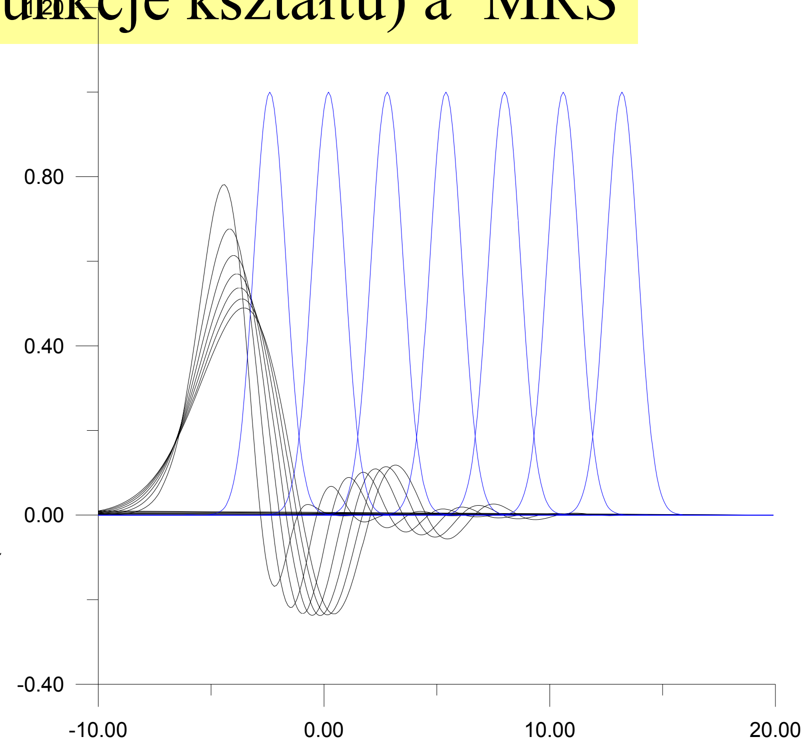
Metoda CN: MES (liniowe funkcje kształtu) a MRS

> CFL

MES CN, dx=0.1, dt=0.2
2 krzywe: analityczna/numeryczna



sprawdza się znacznie lepiej niż MRS



MRS CN, dx=0.1, dt=0.2
2 krzywe: analityczna/numeryczna

MES już z liniowymi f.k. pozwala zwiększyć krok czasowy kilkukrotnie względem MRS

Metoda CN: MES (liniowe funkcje kształtu) a MRS

Wniosek: dla schematów Eulera dominuje błąd
z dyskretyzacji czasowej [lokalny $O(\Delta t^2)$] a nie przestrzennej.
Stąd jakość MRS i MES podobna.

Schemat CN – czasowy błąd lokalny $O(\Delta t^3)$
MES zaczyna górować nad MRS ze względu na dokładniejszy
opis współrzędnej przestrzennej
(dokładne pochodne przestrzenne dla wybranych funkcji kształtu)

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej

w jednokrokowych schematach– każdy krok czasowy można zapisać jako:

$$\mathbf{u:=Au}$$

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej

w jednokrokowych schematach– każdy krok czasowy można zapisać jako:

$$\mathbf{u:=Au}$$

analiza stabilności: jeśli macierz iteracji **A** ma wartości własne $|\lambda|>1$
– metoda będzie niestabilna [rozwiązanie numeryczne eksploduje do nieskończoności]

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej

w jednokrokowych schematach– każdy krok czasowy można zapisać jako:

$$\mathbf{u}:=\mathbf{A}\mathbf{u}$$

analiza stabilności: jeśli macierz iteracji **A** ma wartości własne $|\lambda|>1$
– metoda będzie niestabilna [rozwiązanie numeryczne eksploduje do nieskończoności]

Problem: formę **A** w dla MES w 2D trudno przewidzieć, bo zależy od generacji siatki

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej

w jednokrokowych schematach– każdy krok czasowy można zapisać jako:

$$\mathbf{u}:=\mathbf{A}\mathbf{u}$$

analiza stabilności: jeśli macierz iteracji **A** ma wartości własne $|\lambda|>1$
– metoda będzie niestabilna [rozwiązanie numeryczne eksploduje do nieskończoności]

Problem: formę **A** w dla MES w 2D trudno przewidzieć, bo zależy od generacji siatki

Analiza wykonalna dzięki twierdzeniu **Ironsa/Treharne'a**
wartości własne macierzy iteracji **A** są ograniczone wartościami
własnymi odpowiednika ***A*** *dla pojedynczych elementów* ***(A1)***

(zamiast analizować macierz globalną – analizować będziemy lokalne)

Analiza stabilności MES zależnych od czasu

w MRS analiza stabilności: prosta – von Neumanna, dla MES nieco trudniej

w jednokrokowych schematach– każdy krok czasowy można zapisać jako:

u:=Au

analiza stabilności: jeśli macierz iteracji **A** ma wartości własne $|\lambda|>1$
– metoda będzie niestabilna [rozwiązanie numeryczne eksploduje do nieskończoności]
(przypomnienie: *dla zbieżności iteracyjnych metod rozwiązywania układów równań liniowych:* $|\lambda|<1$)

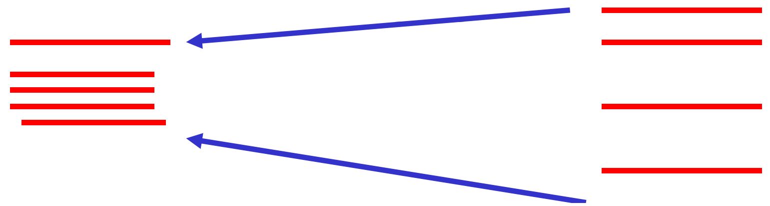
Problem: formę **A** w dla MES w 2D trudno przewidzieć, bo zależy od generacji siatki

Analiza wykonalna dzięki twierdzeniu **Ironsa/Treharne'a**
wartości własne macierzy iteracji **A** są ograniczone wartościami
własnymi odpowiednika ***A dla pojedynczych elementów (A1)***

(zamiast analizować macierz globalną – analizować będziemy lokalne)

λ_min (A1) $\leq$ λ_min (A)
λ_max (A1) $\geq$ λ_max (A)

widmo **A** widmo **A1**



jeśli widmo A1 zmieści się co do modułu poniżej jedynki metoda jest na pewno stabilna.

tw. Ironsa: przydatne w udowadnianiu stabilności, zobaczymy,
że oszacowania Ironsa bardzo bliskie dokładnym granicom stabilności

Przykład zastosowania tw. Ironsa:
analiza stabilności dla równania adwekcji MES: CN + liniowe funkcje kształtu

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{vdt}{2} F_{kj} \right) u_j(t+dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{vdt}{2} F_{kj} \right) u_j(t)$$

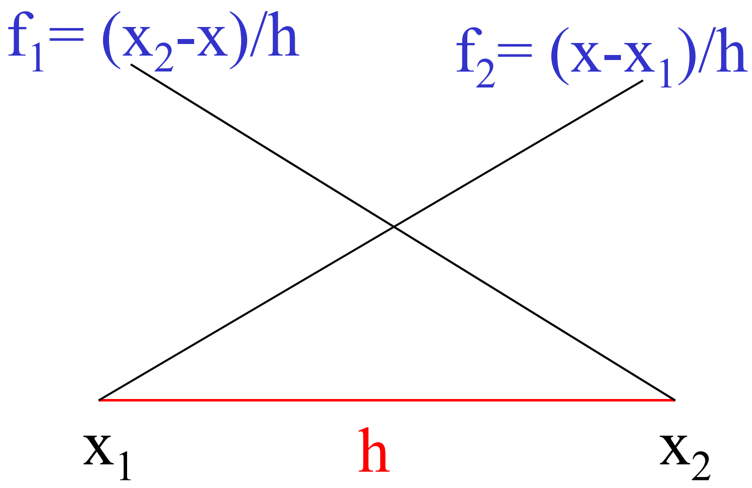
$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix}$$

lokalne macierze O i F liczymy wg:

$$O_{kl} = < f_k | f_l >$$

$$F_{kl} = < f_k | f_l' >$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



do tw. Ironsa stosujemy
macierze lokalne **bez składania** globalnej

złożyć musimy za to macierz jednego kroku
czasowego aby uzyskać przepis w formie **u:=Au**

Przykład zastosowania tw. Ironsa:
analiza stabilności dla równania adwekcji MES: CN + liniowe funkcje kształtu

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{vdt}{2} F_{kj}\right) u_j(t+dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{vdt}{2} F_{kj}\right) u_j(t)$$

Przykład zastosowania tw. Ironsa:
analiza stabilności dla równania adwekcji MES: CN + liniowe funkcje kształtu

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{vdt}{2} F_{kj}\right) u_j(t+dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{vdt}{2} F_{kj}\right) u_j(t)$$

$\alpha = vdt$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] \mathbf{u}$$

potrzebna forma w postaci:

u:=Au

[znaczy u(t+dt)=Au(t)]

Przykład zastosowania tw. Ironsa:
analiza stabilności dla równania adwekcji MES: CN + liniowe funkcje kształtu

$$\sum_j \left(O_{kj} + \frac{vdt}{2} F_{kj}\right) u_j(t+dt) = \sum_j \left(O_{kj} - \frac{vdt}{2} F_{kj}\right) u_j(t)$$

$\alpha = vdt$

$$\left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right] \mathbf{u}$$

mnożymy prawą stronę z lewej strony przez odwrotność lewej strony

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{h} & -\frac{\alpha}{h} \\ \frac{\alpha}{h} & 1 - \frac{\alpha}{h} \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

macierz ma niezależnie od wartości kroku czasowego (α)
podwójną wartość własną: 1

||u|| pozostanie skończone dla dowolnej liczby iteracji, <u>przy dowolnym kroku czasowym</u>

Analiza stabilności dla równania dyfuzji MES: jawny Euler+ liniowe funkcje kształtu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Dla równania adwekcji schematy były stabilne lub nie niezależnie od kroku czasowego, dla dyfuzji jest inaczej: jawny s. Eulera można ustabilizować małym krokiem czasowym

Euler $$u(t+dt) = u(t) + dtDu(t)''$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) u_j(t+dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + Ddt\ (\phi_k, \phi_j'')\right) u_j(t)$$

dla analizy stabilności:

w macierzy **globalnej**
-1/(h_j*+*h_{j+1}*)* na diagonali
1/h_{i+1} na prawo od diagonali

iteracja dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + Ddt \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

znana forma

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + Ddt \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{Ddt}{h} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} + Ddt \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{Ddt}{h} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & -\frac{1}{h} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$\beta = Ddt/h^2$

$$\begin{vmatrix} 1 - 6\beta - \lambda & 6\beta \\ 6\beta & 1 - 6\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad 1 - 6\beta - \lambda = \pm 6\beta$$

$$\lambda = 1 - 12\beta \quad \text{lub} \quad \lambda = 1$$

$1 \geq 1 - 12\beta \geq -1$ → $1/6 \geq \beta$ → $dt \leq h^2/6D$

dostaliśmy gwarancje, że jeśli

$$\boxed{\Delta t \leq \Delta x^2/6D}$$

to MES z liniowymi funkcjami kształtu stabilne dostaliśmy gwarancje, że jeśli

$$\Delta t \leq \Delta x^2/6D$$

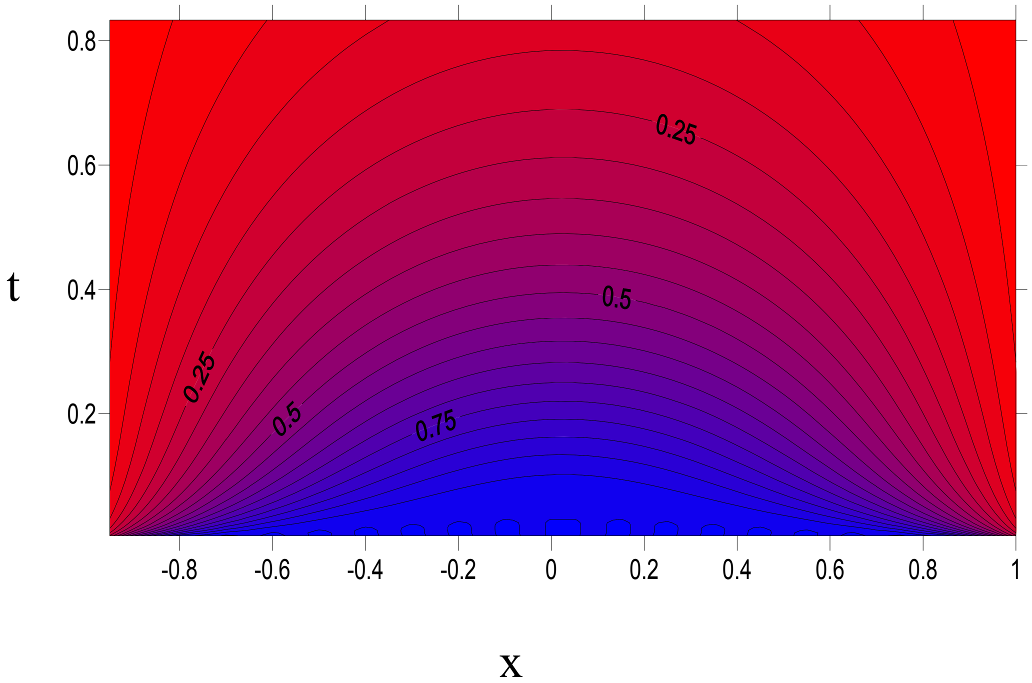
to MES z liniowymi funkcjami kształtu stabilne

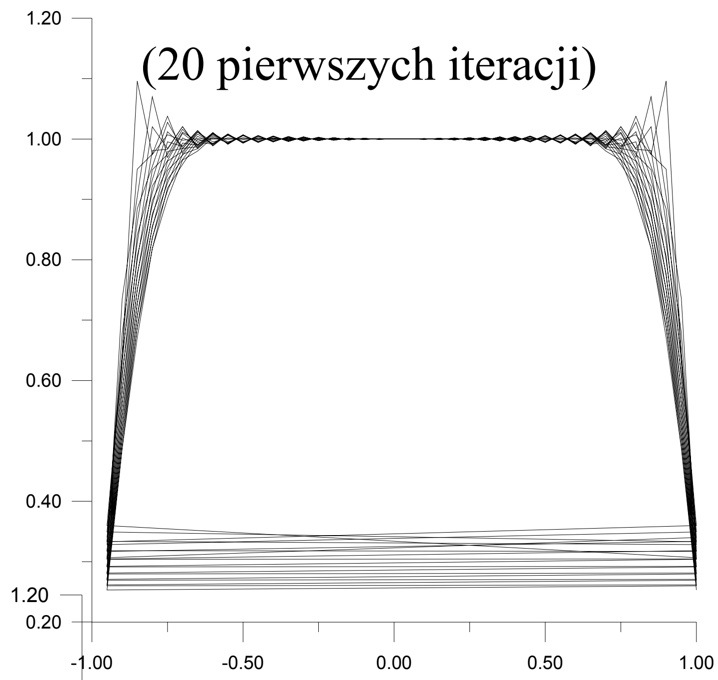
a dla MRS mieliśmy: $$\boxed{\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2D}}$$

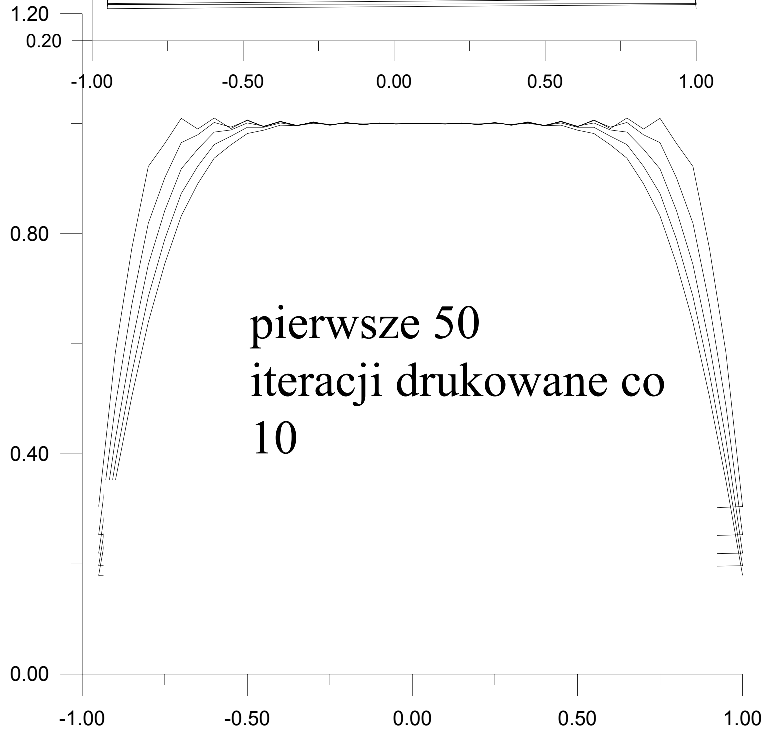
Czyżby krok czasowy w MES miałby być naprawdę mniejszy niż w MRS?
(oszacowanie dostalismy z tw. Ironsa-Treharna – moze jego wynik jest zbyt pesymistyczny)
Sprawdźmy numerycznie:

40 węzłów, D=1

$$\Delta t=\Delta x^2/6D$$





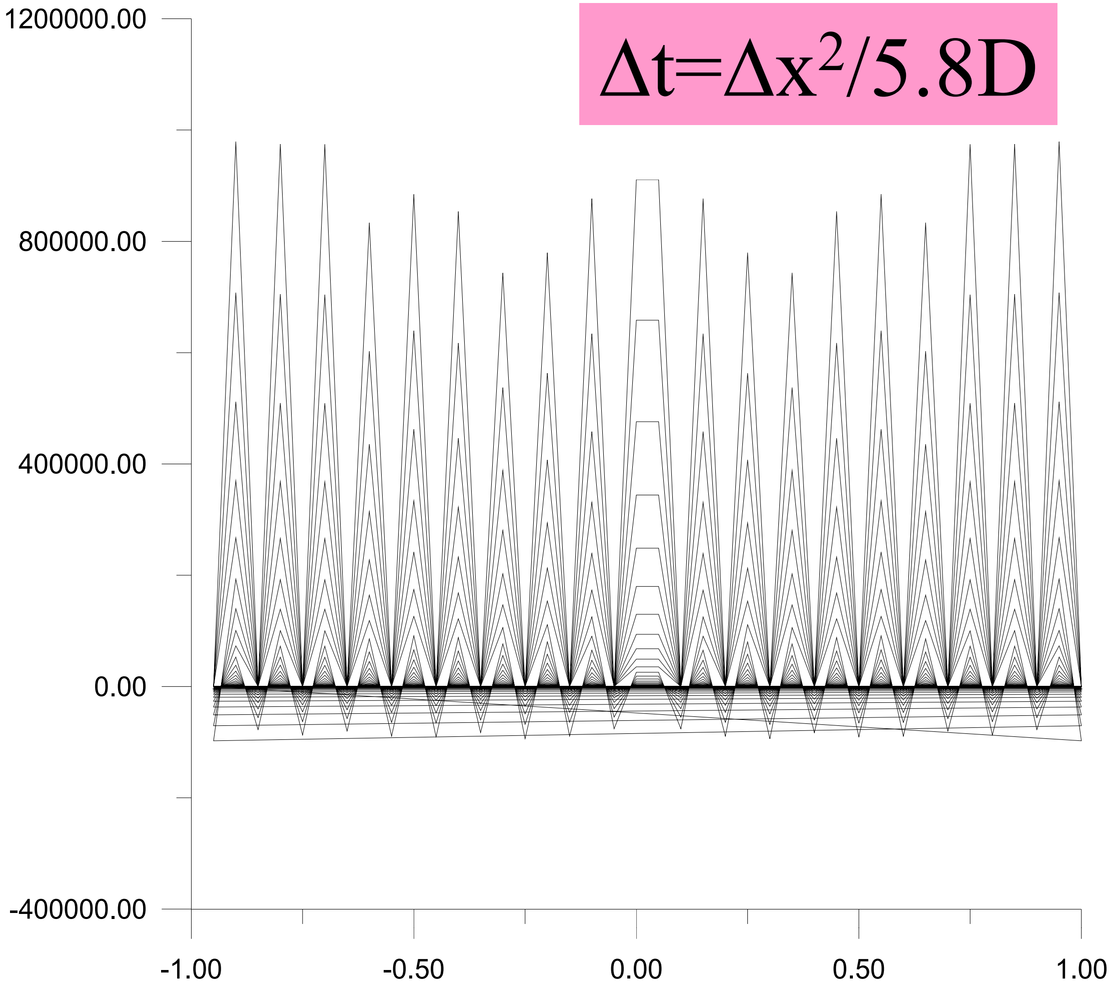


oszacowanie stabilnego kroku czasowego wg tw. Ironsa

$$\Delta t \leq \Delta x^2/6D$$

wyniki numeryczne dla:

$$\Delta t = \Delta x^2/5.8D$$



niestety
Irons nie kłamie

W tym przypadku (dyfuzji i dyskretyzacji przestrzennej wg. metody Eulera):
MES z liniowymi funkcjami kształtu wymaga mniejszego kroku czasowego niż MRS!

Ograniczenie na krok czasowy związane z krokiem przestrzennym takie jak:

$$\Delta t \leq \Delta x^2/6D$$

to katastrofa dla MES.
Siła MES – swoboda w wyborze siatki
można ją dopasować do problemu, zagęścić tam gdzie trzeba

jeśli o kroku czasowym zdecyduje
rozmiar najmniejszego elementu (minimalne Δx)
niczego nie policzymy w rozsądnym czasie.

Potrzebny inny schemat (lub może inne funkcje kształtu?)

Euler z MES wymaga większego kroku czasowego niż dla MRS !
czy winna „kanciastość” rozwiązania rozwiniętego w bazie liniowych funkcji kształtu?

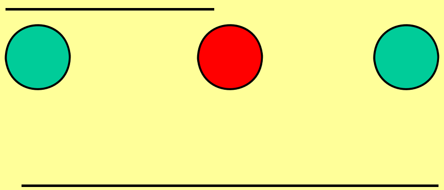
Sprawdźmy kwadratowe funkcje kształtu.

Euler

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) u_j(t+dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + Ddt \ (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

kwadratowe
funkcje kształtu

Δx (odległość między sąsiednimi węzłami)

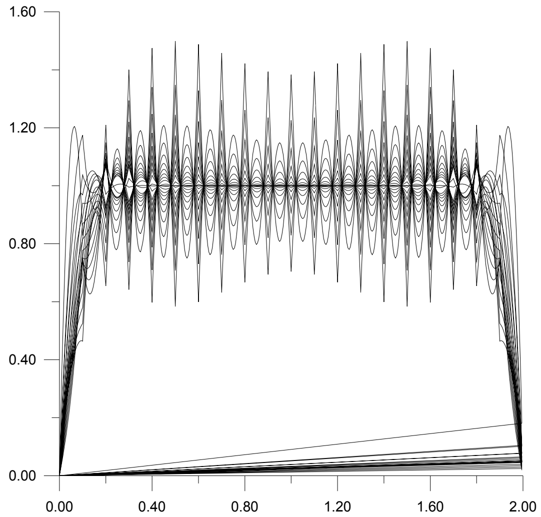


element o długości $h = 2\Delta x$

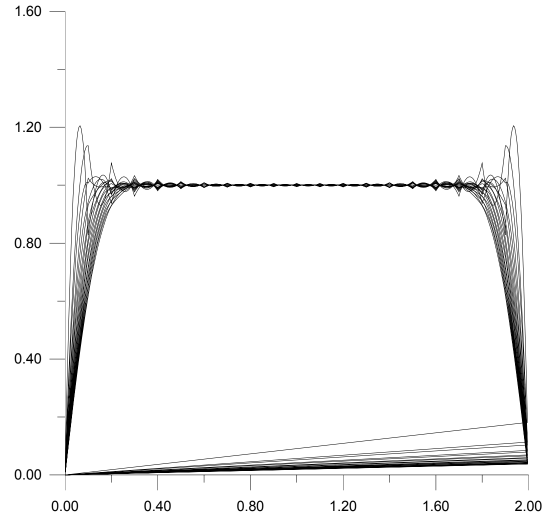
Euler z kwadratowymi funkcjami kształtu 20 elementów

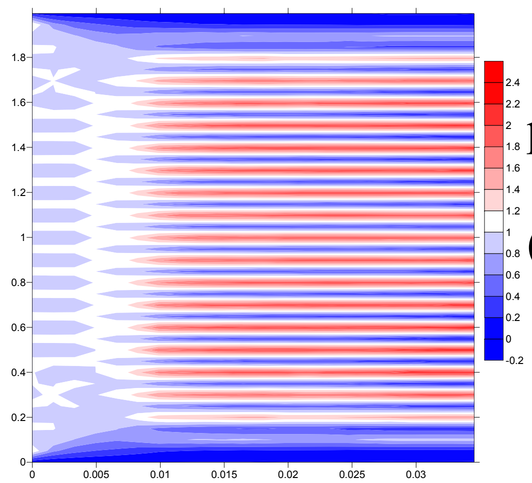
1/6=.1666

dt=dx^2*.15

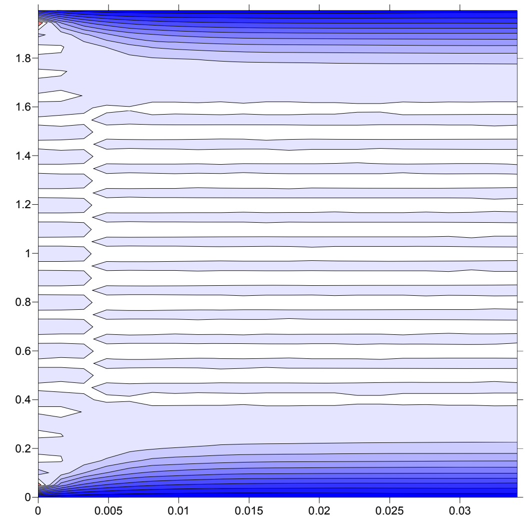


dt=dx^2*.1333=dx^2 2 /15





powyżej T>1:
czerwony kolor
(generuje niestabilność)



dla liniowych funkcji kształtu Euler stabilny dla dt=dx^2*.1666

Euler MES z funkcjami kwadratowymi nie tylko nie pozwala
na mniejszy krok czasowy, ale wręcz wymaga nieco mniejszego!

przeanalizujmy stabilność metody:

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) u_j(t+dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + Ddt \ (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

$$\frac{h}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{u} := \left[\frac{h}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{Ddt}{3h}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[\mathbf{1} + \frac{10Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} := \left[1 + \frac{10Ddt}{h^2}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}\right]\mathbf{u}$$

$\alpha=10Ddt/h^2$

```
> A:=matrix(3,3,[4,2,-1,2,16,2,-1,2,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{20} & \frac{3}{40} & \frac{-1}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{20} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix(3,3,[-7,8,-1,8,-16,8,-1,8,-7]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

```
> il:=multiply(inverse(A),alpha*B);
```

$$il := \begin{bmatrix} -\frac{13}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{7}{5}\alpha \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ -\frac{7}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{13}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

```
> w:=matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,0,0,1]);
```

$$w := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> wynik:=matadd(w,il);
```

$$wynik := \begin{bmatrix} 1-\frac{13}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{7}{5}\alpha \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha \\ -\frac{7}{5}\alpha & 4\alpha & 1-\frac{13}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(wynik);
```

$$1, -\frac{6}{5}\alpha + 1, -6\alpha + 1$$

$$\mathbf{u} := \left[1 + \frac{10Ddt}{h^2} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}$$

$\alpha = 10Ddt/h^2$

```
> A:=matrix(3,3,[4,2,-1,2,16,2,-1,2,4]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{-1}{20} & \frac{3}{40} & \frac{-1}{20} \\ \frac{1}{10} & \frac{-1}{20} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix(3,3,[-7,8,-1,8,-16,8,-1,8,-7]);
```

$$B := \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}$$

```
> il:=multiply(inverse(A),alpha*B);
```

$$il := \begin{bmatrix} -\frac{13}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{7}{5}\alpha \\ \alpha & -2\alpha & \alpha \\ -\frac{7}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{13}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

```
> w:=matrix(3,3,[1,0,0,0,1,0,0,0,1]);
```

$$w := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> wynik:=matadd(w,il);
```

$$wynik := \begin{bmatrix} 1-\frac{13}{5}\alpha & 4\alpha & -\frac{7}{5}\alpha \\ \alpha & 1-2\alpha & \alpha \\ -\frac{7}{5}\alpha & 4\alpha & 1-\frac{13}{5}\alpha \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(wynik);
```

$$1, -\frac{6}{5}\alpha + 1, -6\alpha + 1$$

$-1 \le 1-6/5\alpha \le 1$
$-1 \le 1-6\alpha \le 1$

$\alpha \le 5/3$
$\alpha \le \mathbf{1/3}$

$10Ddt/h^2 \le 1/3$

$dt \le h^2/30D$

$\boxed{dt \le 4dx^2/30D}$

mamy: $dt \le .1333\ dx^2/D$

CN: szansa na schemat bez ograniczenia na krok czasowy

Schemat Cranka Nicholsona dla równania dyfuzji z elementami kwadratowymi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{u(t+dt)-u(t)}{dt} = D\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t+dt)}{\partial x^2}\right)$$

$$u(t+dt) - D\frac{dt}{2}\frac{\partial^2 u(x,t+dt)}{\partial x^2} = u(t) + D\frac{dt}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\sum_j \left((\phi_k,\phi_j) - \frac{Ddt}{2}(\phi_k,\phi_j'')\right) u_j(t+dt) = \sum_j \left((\phi_k,\phi_j) + \frac{Ddt}{2}(\phi_k,\phi_j'')\right) u_j(t)$$

Analiza stabilności dla pojedynczego elementu:

CN:

$$\sum_j \left((\phi_k, \phi_j) - \frac{Ddt}{2}(\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t+dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + \frac{Ddt}{2}(\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

elementy macierzowe znamy z analizy jawnego Eulera:

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) u_j(t+dt) = \sum_j \left((\phi_k, \phi_j) + Ddt\ (\phi_k, \phi_j'') \right) u_j(t)$$

$$\underbrace{\frac{h}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{u} := \underbrace{\left[\frac{h}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{Ddt}{3h}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \right]}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}$$

$$\sum_j \left(\underset{\mathbf{A}}{(\phi_k,\phi_j)} - \frac{Ddt}{2}\underset{\mathbf{B}}{(\phi_k,\phi_j'')} \right) u_j(t+dt) = \sum_j \left((\phi_k,\phi_j) + \frac{Ddt}{2}(\phi_k,\phi_j'') \right) u_j(t)$$

Analiza Ironsa:

```
A:=h/30*matrix(3,3,[4,2,-1,2,16,2,-1,2,4]);
```

$$A := \frac{1}{30} h \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

```
B:=1/3/h*matrix(3,3,[-7,8,-1,8,-16,8,-1,8,-7]);
```

$$B := \frac{1}{3} \frac{\begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}}{h}$$

```
A1:=A-D*dt/2*B;
```

$$A1 := \frac{1}{30} h \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \frac{D\,dt \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}}{h}$$

```
A2:=A+D*dt/2*B;
```

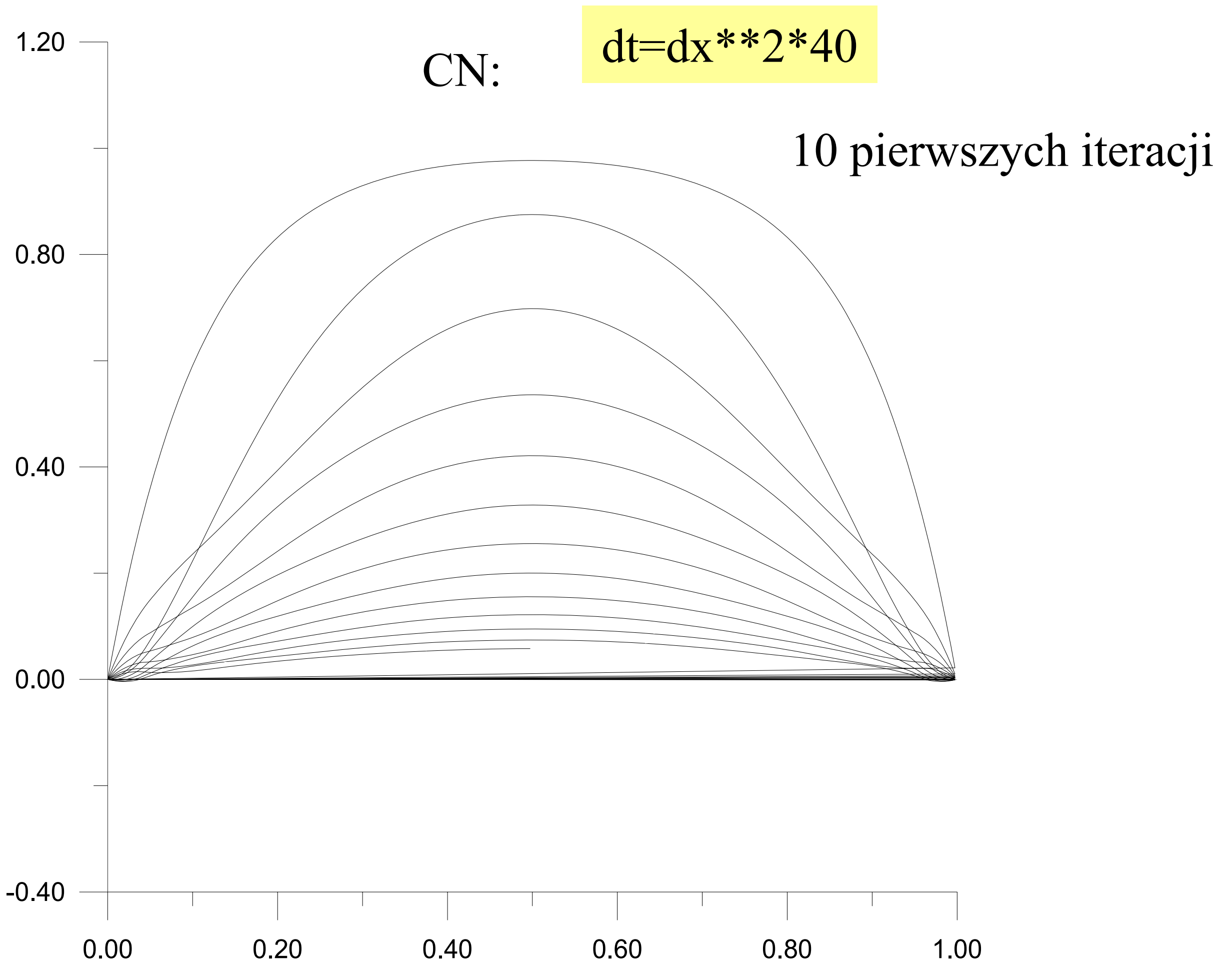
$$A2 := \frac{1}{30} h \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{6} \frac{D\,dt \begin{bmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{bmatrix}}{h}$$

```
C:=multiply(inverse(A1),A2);
```

```
eigenvalues(C);
```

$$1, -\frac{30\,D\,dt - h^2}{30\,D\,dt + h^2}, -\frac{6\,D\,dt - h^2}{h^2 + 6\,D\,dt}$$

wszystkie ww nie większe od 1: CN jest bezwarunkowo stabilny
nie ma ograniczenia na krok czasowy!



CN: pozwoli na rachunki również dla lokalnie drobnej siatki
bo rozmiar elementów nie nakłada ograniczenia
na stabilność metody ES

równanie dynamiczne (falowe)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(t+dt) + u(t-dt) - 2u(t)}{dt^2}$$

$$u(t+dt) = dt^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u(t) - u(t-dt)$$

schemat Verleta

równanie dynamiczne (falowe)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u(t+dt) + u(t-dt) - 2u(t)}{dt^2}$$

$$u(t+dt) = dt^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u(t) - u(t-dt)$$ schemat Verleta

$$u(t) = \sum_j c_j(t)\phi_j(x)$$

$$\sum_j c_j(t+dt)\phi_j(x) = \sum_j c_j(t)\left(dt^2\phi_j''(x) + 2\phi_j(x)\right) - \sum_j c_j(t-dt)\phi_j(x)$$

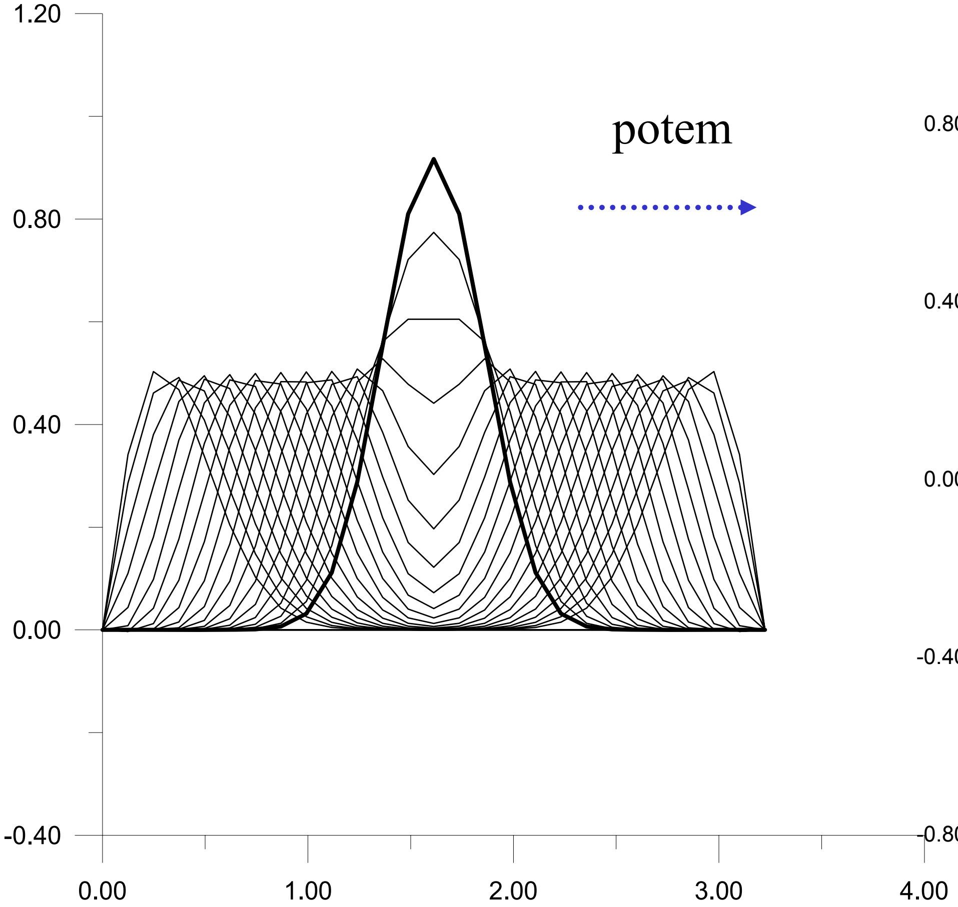
$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2(\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)\right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t-dt)$$

Schemat jest dwukrokowy jak w MRS

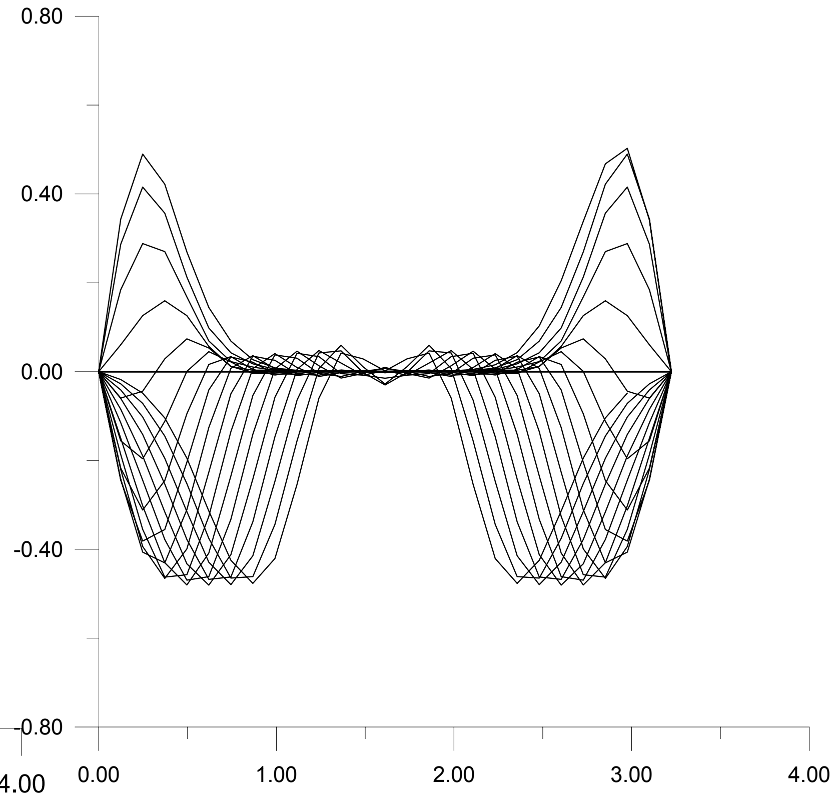
Aplikacja: struna z zamocowanymi na sztywno końcami
Liniowe funkcje kształtu

27 węzłów

prędkość początkowa 0



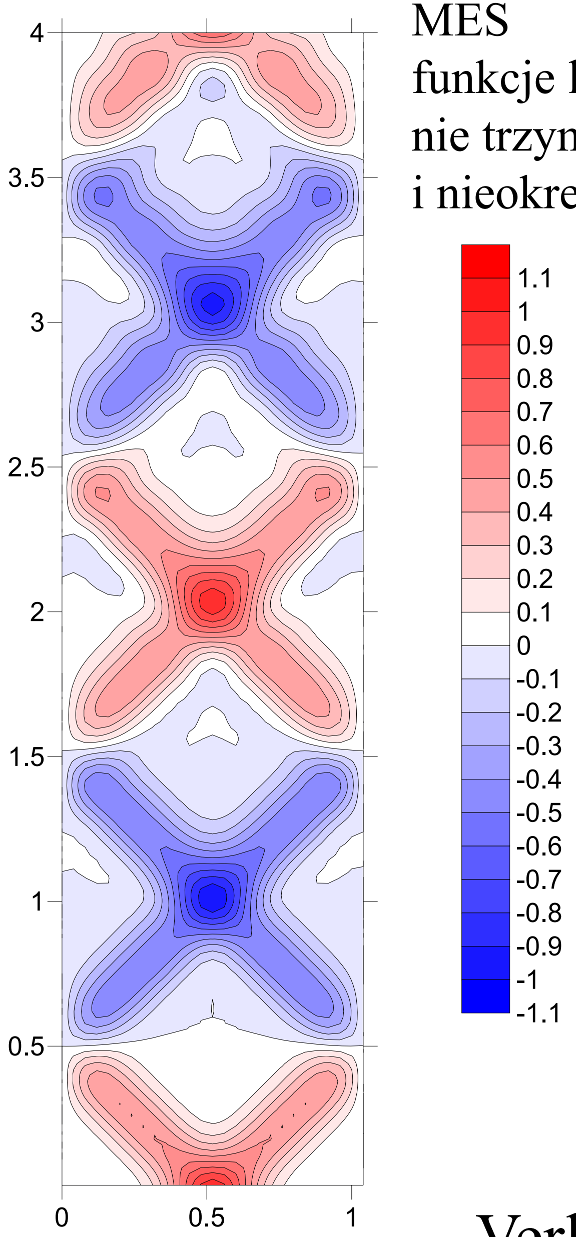
potem



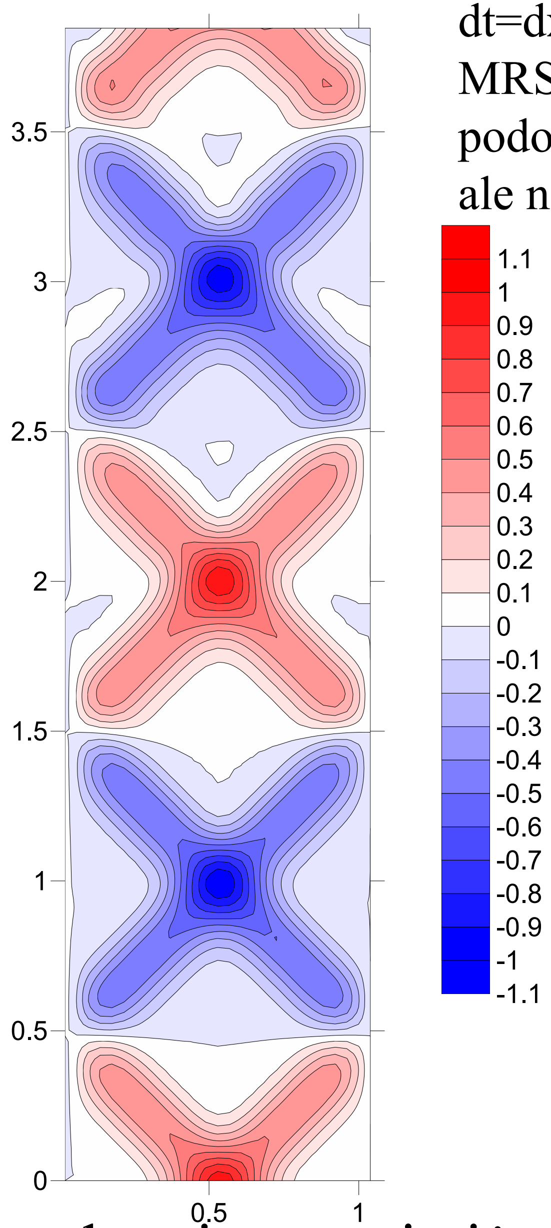
wyniki dla dt=dx/2 Uwaga dla dt=dx (krok CFL) niestabilność (a Verlet w MRS był stabilny !)
niestabilność nawet dla 300 elementów

27 węzłów

dt=dx/2
MES
funkcje liniowe
nie trzyma kształtu
i nieokresowy

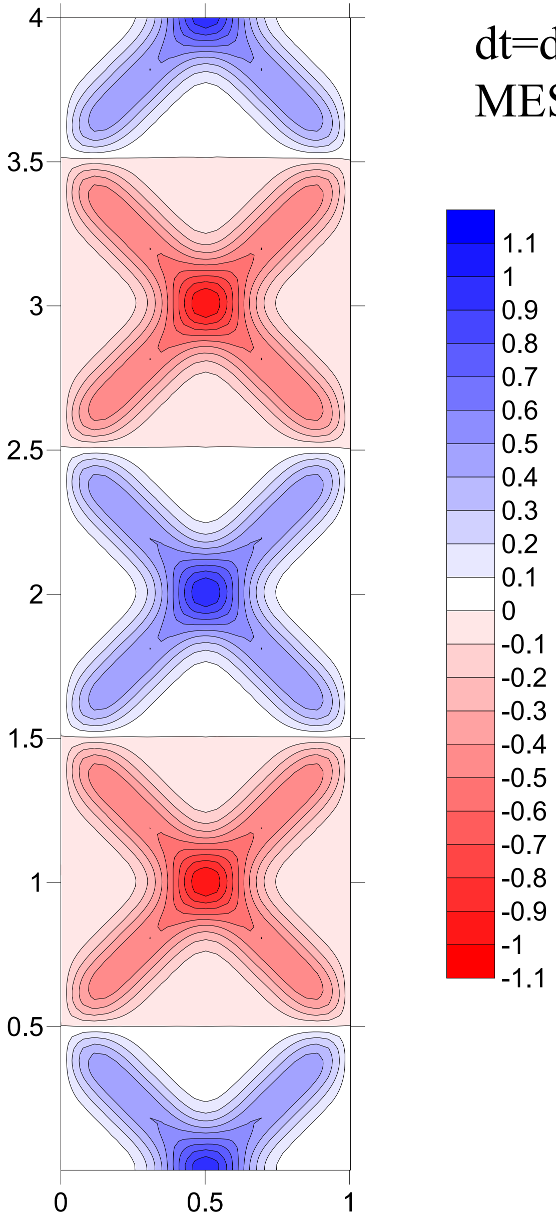


dt=dx/2
MRS
podobne błędy
ale nieco lepiej!



Verlet w MES sprawdza się gorzej niż w MRS ☹

dt=dx/2
MES, 250 węzłów



MES jest przynajmniej zbieżny

Czy musi być tak źle?
Analiza stabilności dla metod dwukrokowych, równanie falowe, liniowe funkcje kształtu.

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j) \right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t-dt)$$

równanie dla pojedynczego elementu (funkcje liniowe)

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

Czy musi być tak źle?
Analiza stabilności dla metod dwukrokowych, równanie falowe, liniowe funkcje kształtu.

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j) \right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t-dt)$$

równanie dla pojedynczego elementu (funkcje liniowe)

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

wg tego co wiemy, powinniśmy skonstruować macierz iteracji
u:=Au
dla metod jednokrokowych nie było problemu
jak skonstruować macierz **A** teraz?
nawet jeśli się da, łatwiej jest problem ominąć

wektory własne macierzy **A** = baza w przestrzeni wektorów 2D
Każdy z wektorów da się przedstawić jako kombinację liniową wektorów własnych
wynik działania A na u: $Au=\lambda u$

czyli:

wystarczy jeśli zbadamy $u(t)=\lambda u(t-dt)$

$u(t+dt)=\lambda^2 u(t-dt)$

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

czyli:

wystarczy jeśli zbadamy *u(t)=λu(t-dt)*

u(t+dt)=λ² u(t-dt)

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

dojdziemy do jednorodnego URL

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \lambda^2 \mathbf{u}(t-dt) = \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \lambda \mathbf{u}(t-dt) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \lambda^2 \mathbf{u}(t-dt) = \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \lambda \mathbf{u}(t-dt) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

jednorodny układ równań

B*u(t-dt)=0*

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \lambda^2 \frac{h}{3} + \frac{\lambda dt^2}{h} - \frac{2\lambda h}{3} + \frac{h}{3}$$

$$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{21} = \lambda^2 \frac{h}{6} - dt^2 \frac{\lambda}{h} - \frac{\lambda h}{3} + \frac{h}{6}$$

żeby UR miał rozwiązanie inne poza *u=0* trzeba aby det(**B**)=0.
warunek zerowania wyznacznika da nam wartości własne macierzy iteracji

det **B**=0

$B_{11}B_{22}-B_{12}B_{21}=0$

$$\mathbf{B}_{11}=\mathbf{B}_{22}=\lambda^2\frac{h}{3}+\frac{\lambda dt^2}{h}-\frac{2\lambda h}{3}+\frac{h}{3}$$

$$\mathbf{B}_{12}=\mathbf{B}_{21}=\lambda^2\frac{h}{6}-dt^2\frac{\lambda}{h}-\frac{\lambda h}{3}+\frac{h}{6}$$

$\mathbf{B}_{11}=\pm\,\mathbf{B}_{12}$

weźmy minus : wyraz z dt^2 ulegnie skróceniu, przemnożymy obustronnie przez 6 i

$$2\lambda^2h-4\lambda h+2h=-\lambda^2h+2\lambda h-h$$

$$3\lambda^2h-6\lambda h+3h=0$$

$$3h(\lambda^2-2\lambda+1)=0$$

$\lambda=1$

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{B}_{22} = \lambda^2 \frac{h}{3} + \frac{\lambda dt^2}{h} - \frac{2\lambda h}{3} + \frac{h}{3}$$

$$\mathbf{B}_{12} = \mathbf{B}_{21} = \lambda^2 \frac{h}{6} - dt^2 \frac{\lambda}{h} - \frac{\lambda h}{3} + \frac{h}{6}$$

$$\mathbf{B}_{11} = +\,\mathbf{B}_{12}$$

przemnożymy obustronnie przez $6h$

$$2\lambda^2 h^2 + 6\lambda dt^2 - 4\lambda h^2 + 2h^2 = \lambda^2 h^2 - dt^2 6\lambda - 2\lambda h^2 + h^2$$

$$\lambda^2 h^2 + 12\lambda dt^2 - 2\lambda h^2 + h^2 = 0$$

$$\Delta = (12dt^2 - 2h^2)^2 - 4h^4 = 12^2 dt^4 - 48h^2 dt^2 = 16(9dt^4 - 3h^2 dt^2)$$

$$\lambda = \frac{2h^2 - 12dt^2 \pm 4\sqrt{9dt^4 - 3h^2 dt^2}}{2h^2}$$

$$\lambda = \frac{2h^2 - 12dt^2 \pm 4\sqrt{9dt^4 - 3h^2dt^2}}{2h^2}$$

wartość pod pierwiastkiem: czy jesteśmy powyżej czy poniżej zera?

$$\lambda = \frac{2h^2 - 12dt^2 \pm 4\sqrt{9dt^4 - 3h^2dt^2}}{2h^2}$$

wartość pod pierwiastkiem: czy jesteśmy powyżej czy poniżej zera.

z rachunków numerycznych dostaliśmy stabilne wyniki dla $dt=h/2$

wtedy $9h^4/16-12\ h^4/16 < 0$,

gdy dt będzie niżej pod pierwiastkiem stać będzie wartość bardziej ujemna

$$\lambda = \frac{2h^2 - 12dt^2 \pm 4\sqrt{9dt^4 - 3h^2dt^2}}{2h^2}$$

wartość pod pierwiastkiem: czy jesteśmy powyżej czy poniżej zera.

z rachunków numerycznych dostaliśmy stabilne wyniki dla *dt=h/2*

wtedy $9h^4/16-12\ h^4/16 < 0$,

gdy dt będzie niżej pod pierwiastkiem stać będzie wartość bardziej ujemna

pierwiastek jest urojony, wtedy moduł $|\lambda|^2$

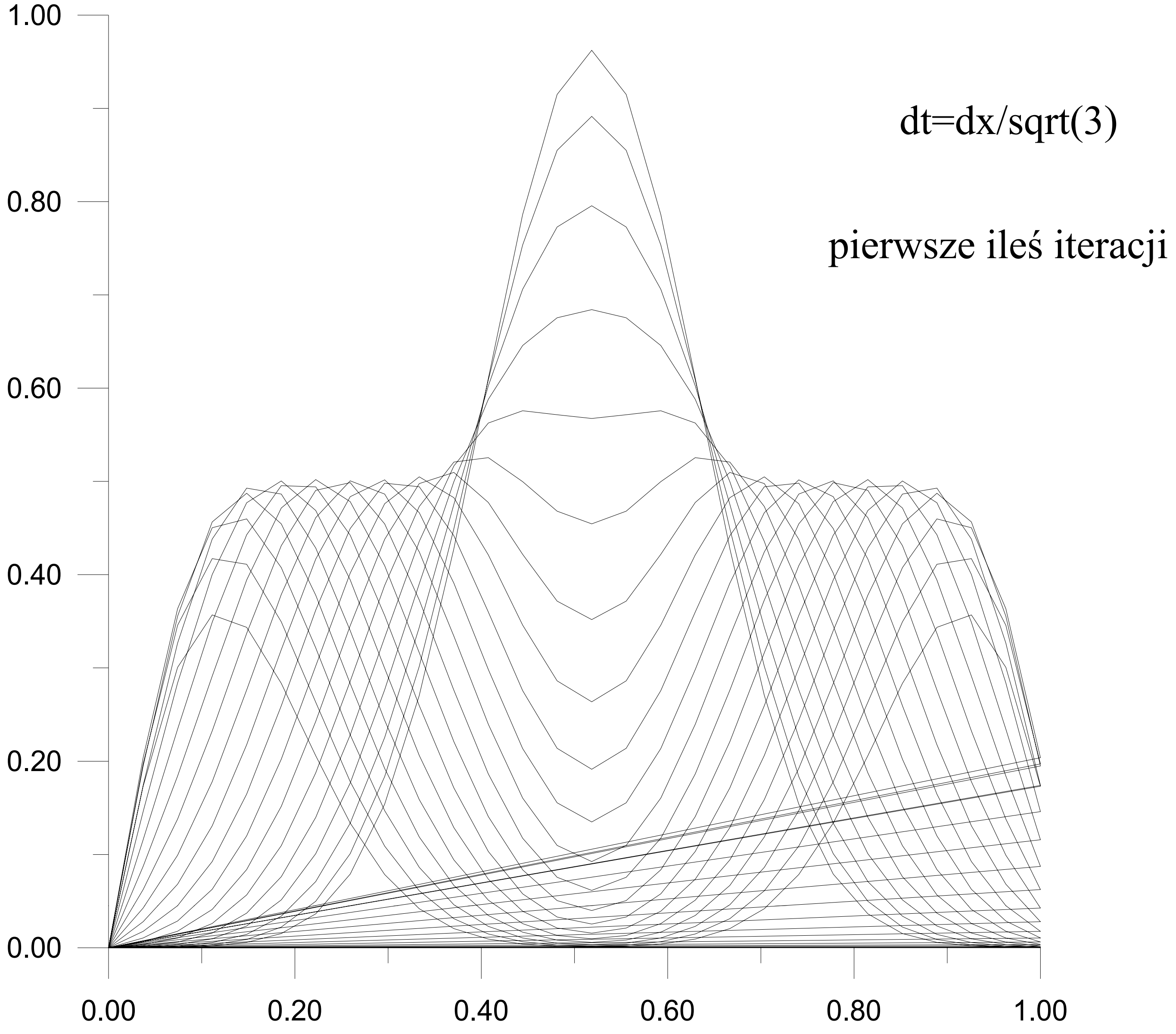
dla stabilności wystarczy

$$\frac{(-12dt^2 + 2h^2)^2 + 16(9dt^4 - 3dt^2h^2)}{4h^4} \leq 1$$

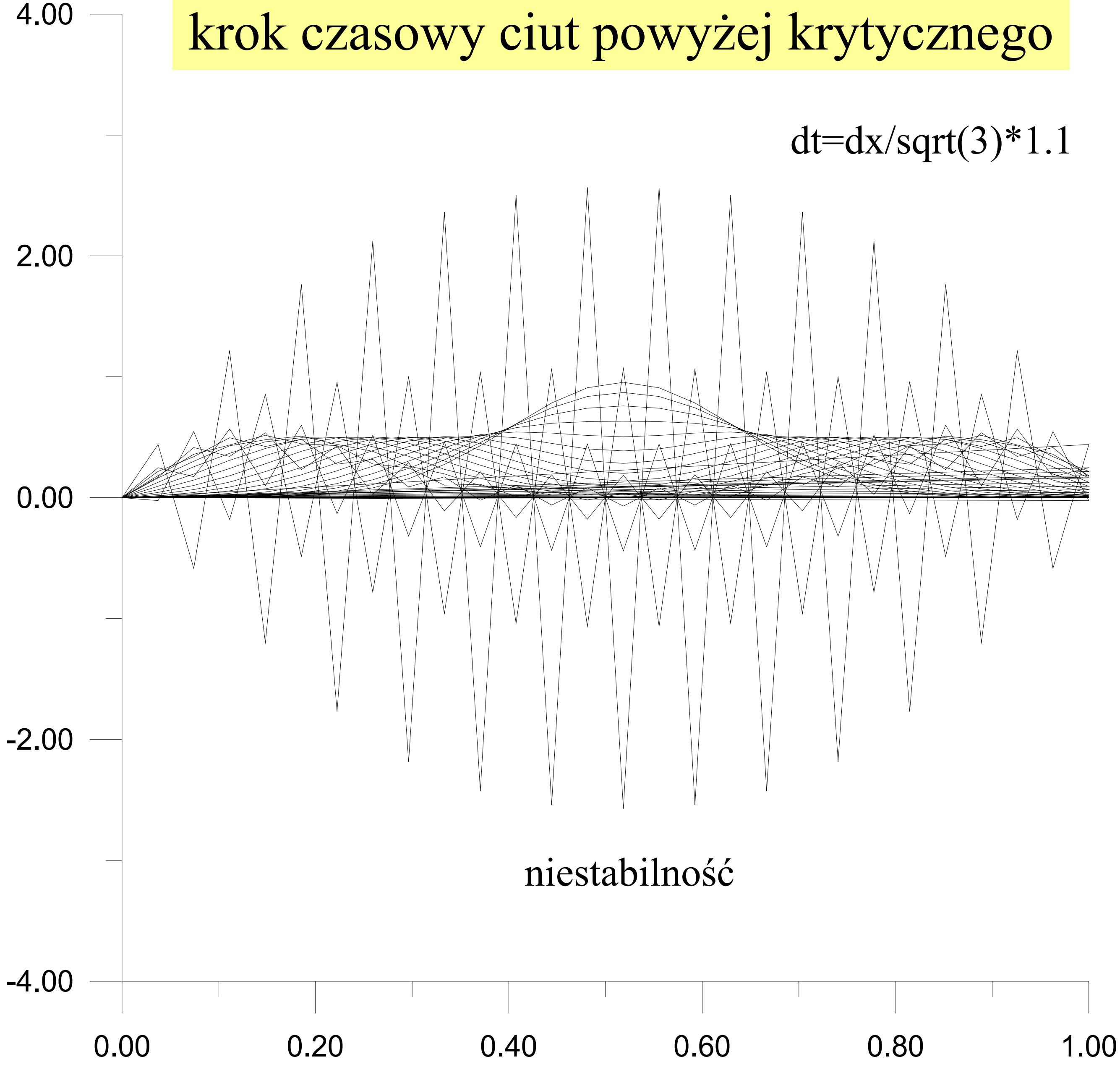
$144\ dt^4-48dt^2h^2+144dt^4-48dt^2h^2 \leq 0$ $\longrightarrow$ $3dt^2 \leq h^2$ $\longrightarrow$ $dt \leq h/\mathrm{sqrt}(3)=0.577\ h$

dostaliśmy graniczną wartość dt, dla której delta równania kwadratowego=0, dla większych dt – pierwiastek z deltą rzeczywisty, jedna z wartości własnych staje się większa, a druga mniejsza od jedynki

Verlet w MES liniowe funkcje kształtu krytyczny dla stabilności krok czasowy



Verlet w MES liniowe funkcje kształtu krok czasowy ciut powyżej krytycznego

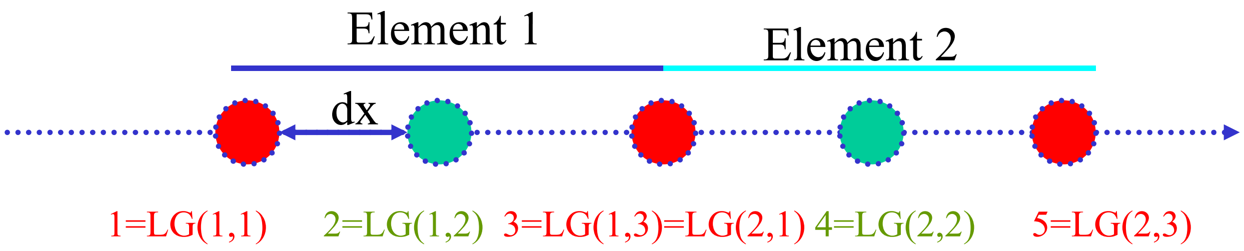


dla równania falowego
Verlet w MES z funkcjami linowymi stabilny dla cdt ≤ dx/sqrt(3)
podczas gdy Verlet w MRS cdt ≤ dx

czy pomogą lepsze funkcje kształtu?

MES, równanie falowe
kwadratowe funkcje kształtu, składanie macierzy

$\phi_1=\xi(\xi-1)/2$
$\phi_2=-(\xi-1)(\xi+1)$
$\phi_3=\xi(\xi+1)/2$



struna podzielona na elementy, zbudowana tablica nadająca numer globalny dla danego numeru elementu i numeru węzła

$$\sum_j (\phi_k,\phi_j)c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2(\phi_k,\phi_j'') + 2(\phi_k,\phi_j)\right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k,\phi_j)c_j(t-dt)$$

do rozwiązania będzie to samo równanie
macierze wygodniej już składać, tak jak w problemach niezależnych od czasu

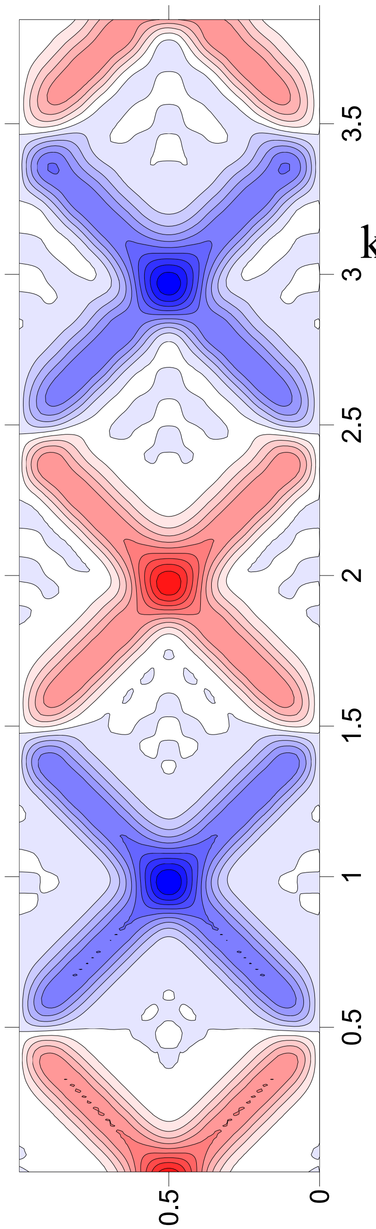
x(m+1)-x(m-1)

$$O_{ij}^m = (\phi_i^m,\phi_j^m) = \frac{h_m}{30}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad E_{ij}^m = (\phi_i^m,(\phi_j^m)'') = \frac{1}{3h_m}\begin{pmatrix} -7 & 8 & -1 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$$

globalne macierze składane podobnie jak w metodzie niezależnej od czasu

Analiza Ironsa dla kwadratowych fk: również dx/sqrt(3) na krok krytyczny

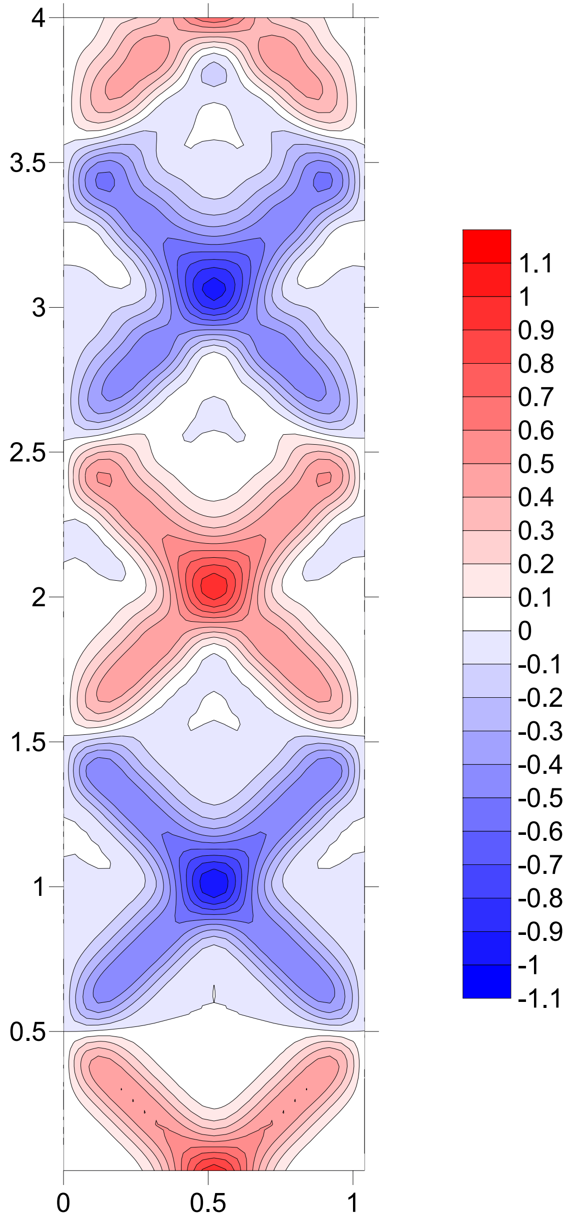
27 węzłów (13 elementów) dt=dx/2
(wciąż niestabilne dla dt=dx)



kwadratowe

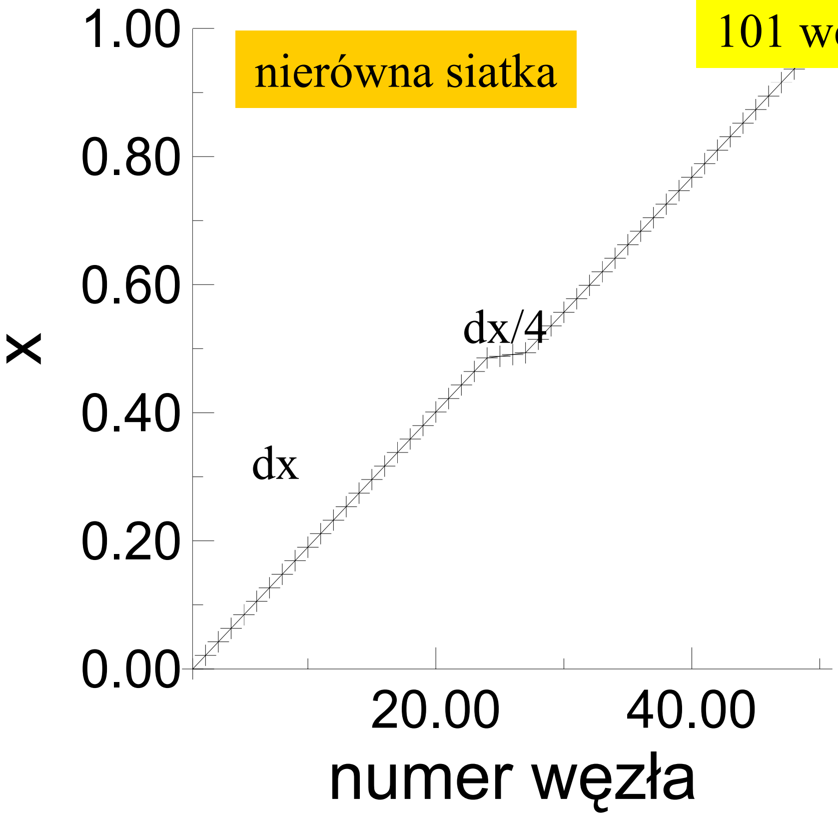
Nieco dokładniej
niż dla fcji liniowych

liniowe
dt=dx/2

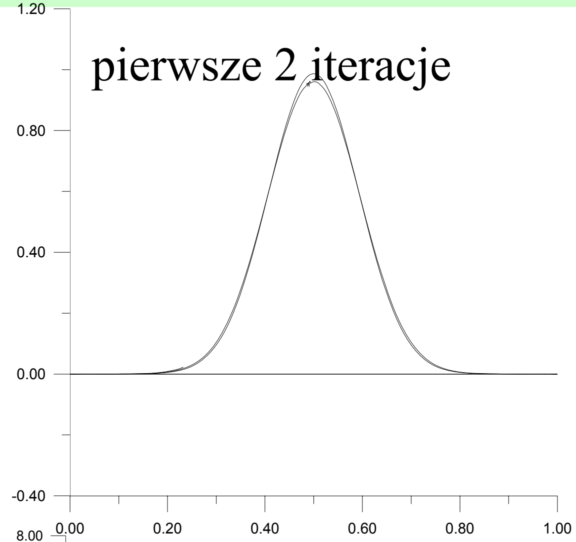


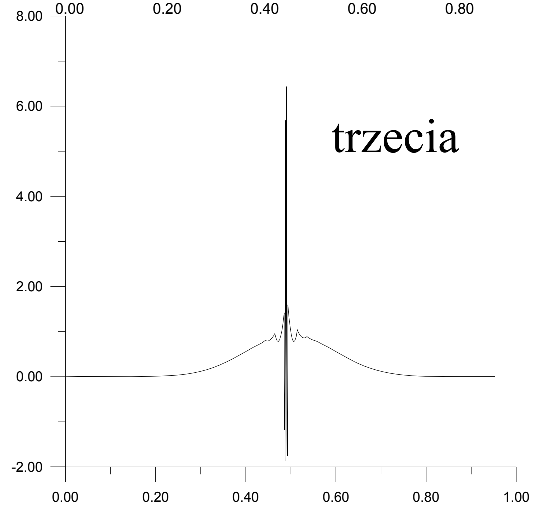
stabilność a nierównomierna (zaadaptowana) siatka nierówna siatka

101 węzłów



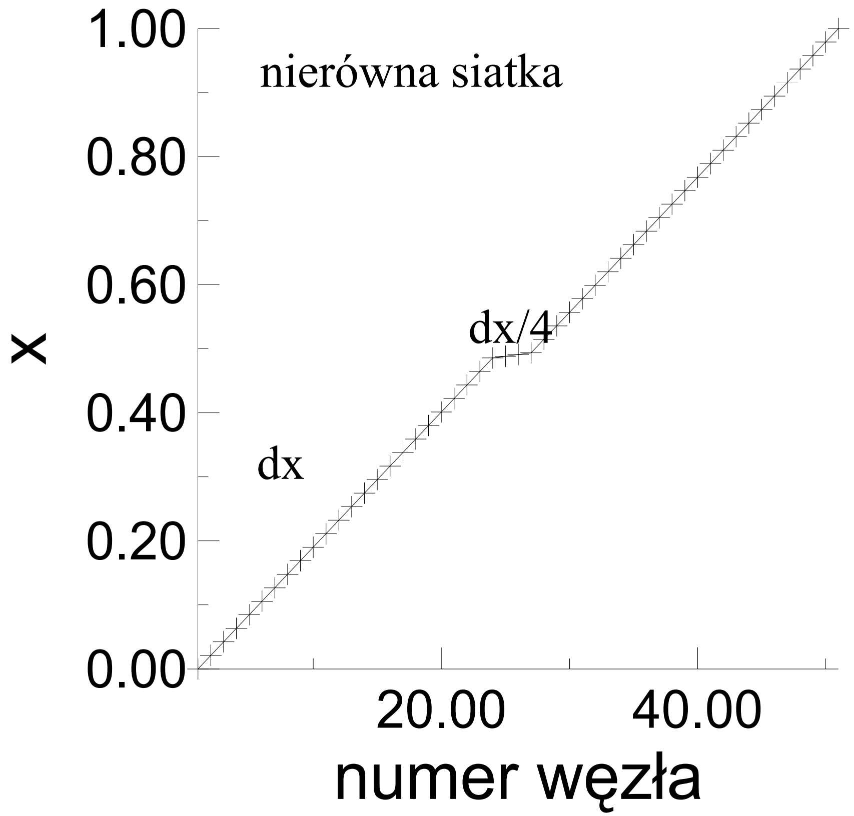
FEM ze schematem Verleta dt=dx/sqrt(3)
i kwadratowymi FK



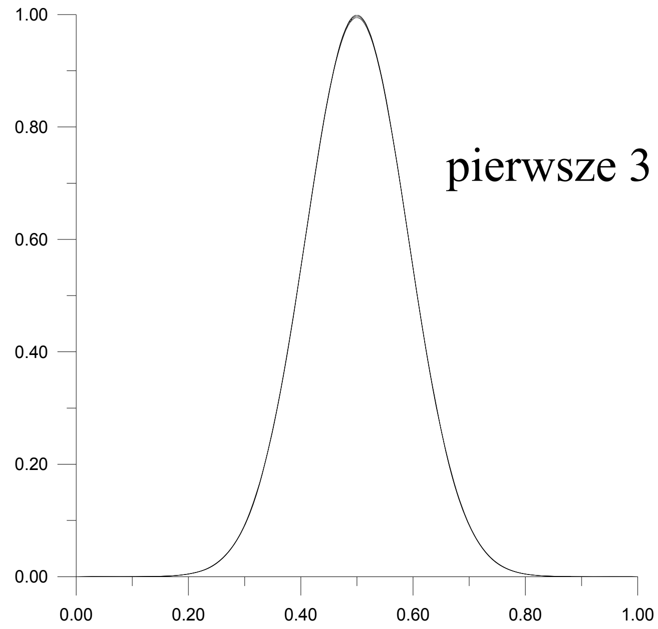


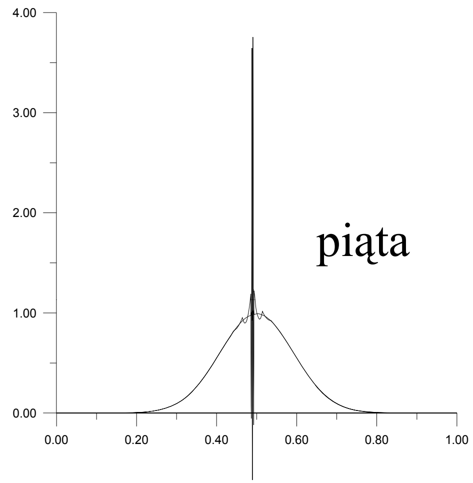
W środku pudła 4 elementy
o długości dx/4

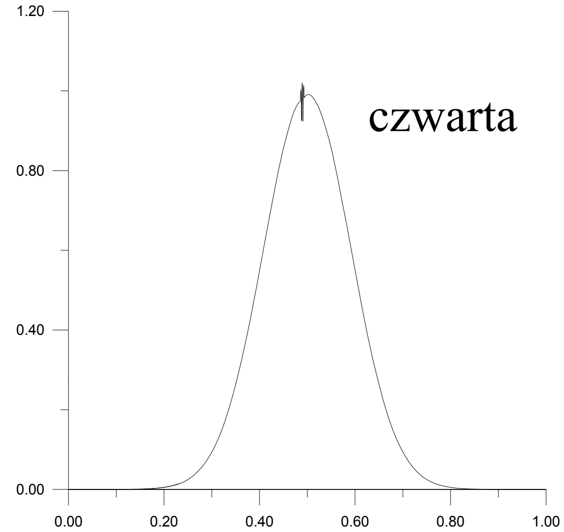
101 węzłów



FEM ze schematem Verleta **dt=dx/(sqrt(3)3.9)**



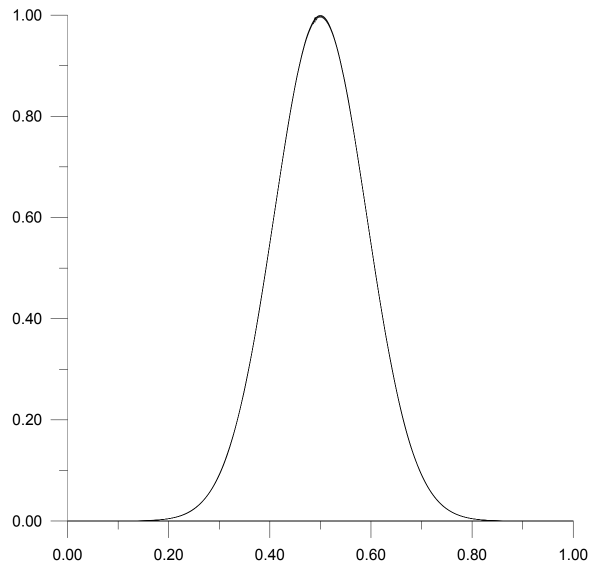




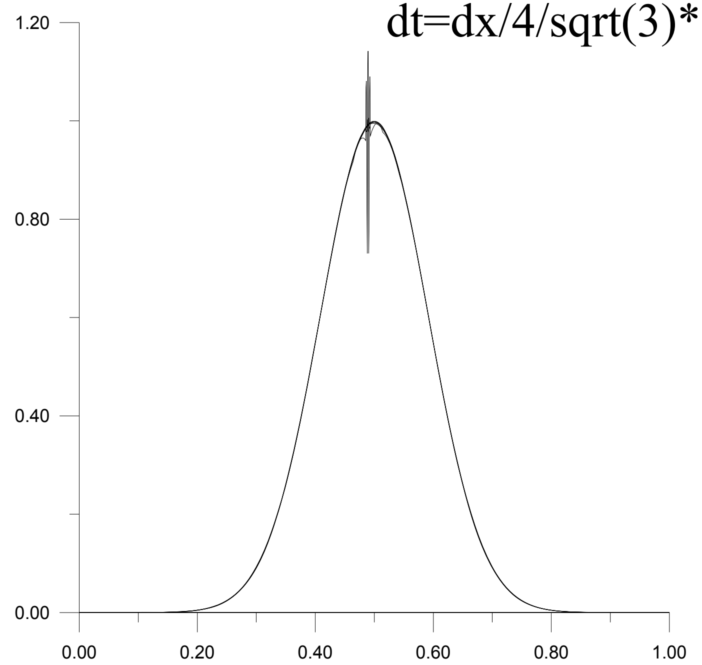
FEM ze schematem Verleta i kwadratowymi FK

101 węzłów

dt=dx/4/sqrt(3)

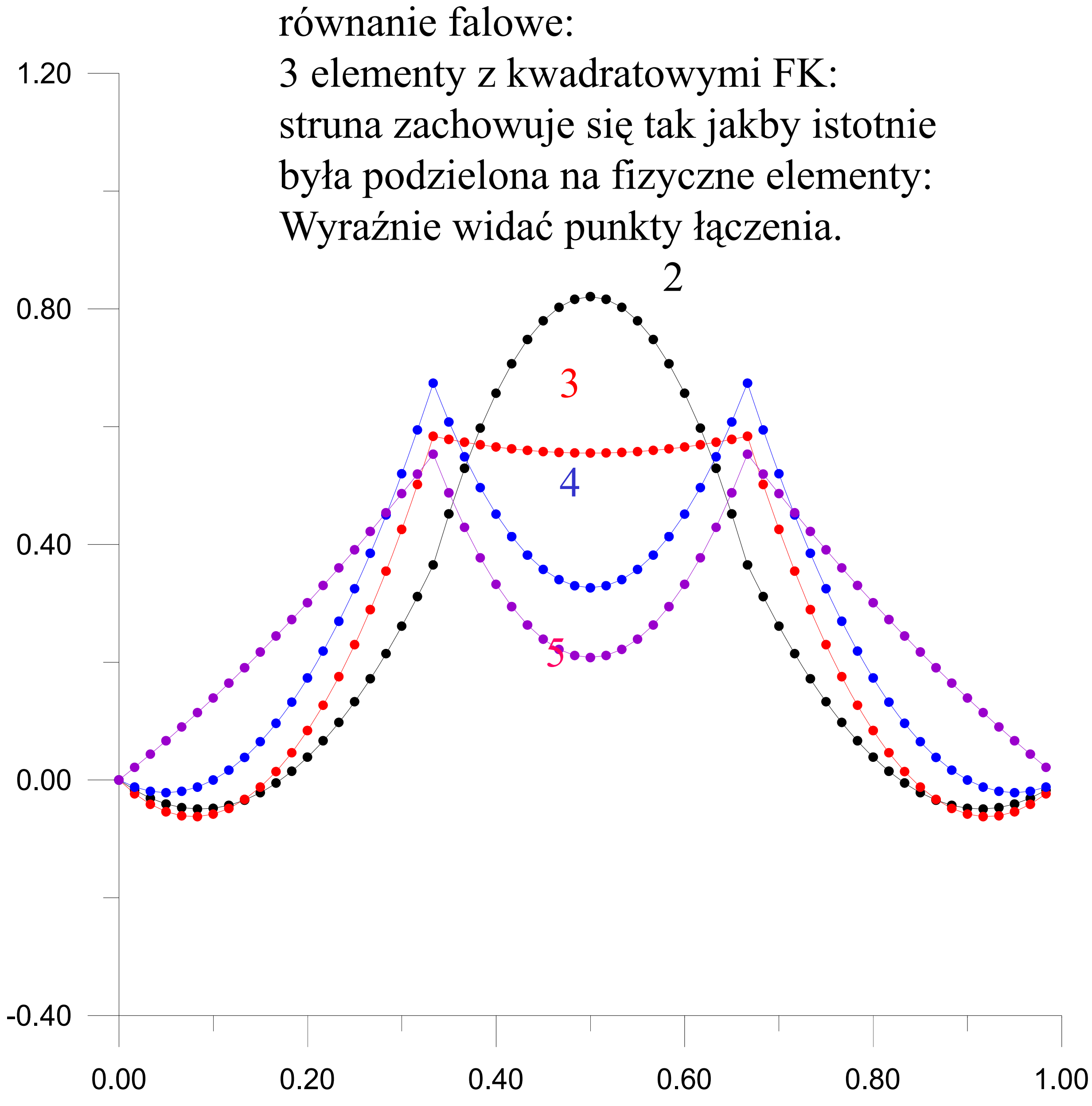


dt=dx/4/sqrt(3)*1.1



Twierdzenie Ironsa: odczytane ponownie = o stabilności decyduje najmniejszy z elementów
ustawia *dt* czytaj: *sztywność*

najmniejszy element (minimalny h) narzucają na dt
najsilniejsze: ograniczenie dt<dx/4/sqrt(3) [tw. Ironsa]


równanie falowe:
3 elementy z kwadratowymi FK:
struna zachowuje się tak jakby istotnie
była podzielona na fizyczne elementy:
Wyraźnie widać punkty łączenia.
1.20
0.80
0.40
0.00
-0.40
0.00
0.20
0.40
0.60
0.80
1.00
2
3
4
5

w MES „bezwładność” posiadają elementy na całej ich długości
w MRS bezwładność sprowadzona jest do punktów (węzłów)

Technika *(manipulacja) mass lumping (lump*=brykiet) = masa (bezwładność) elementu sprowadzona do węzłów

w MES „bezwładność” posiadają elementy na całej ich długości
w MRS bezwładność sprowadzona jest do punktów (węzłów)

Technika *(manipulacja) mass lumping (lump*=brykiet) = masa (bezwładność) elementu sprowadzona do węzłów

technika upodabniająca MES do MRS w celu zwiększenia dopuszczalnego kroku czasowego

w macierzy masy O (ϕ_κ,ϕ_φ) na diagonali wstawiamy sumę elementów z danego wiersza, resztę zerujemy

dla elementów o równej długości i liniowych funkcjach kształtu MES + *mass lumping* = MRS

w MES „bezwładność” posiadają elementy na całej ich długości
w MRS bezwładność sprowadzona jest do punktów (węzłów)

Technika *(manipulacja) mass lumping (lump*=brykiet) = masa (bezwładność) elementu sprowadzona do węzłów

technika upodabniająca MES do MRS w celu zwiększenia dopuszczalnego kroku czasowego
w macierzy masy O (ϕ_κ,ϕ_φ) na diagonali wstawiamy sumę elementów z danego wiersza, resztę zerujemy

dla elementów o równej długości i liniowych funkcjach kształtu MES + *mass lumping* = MRS

równanie falowe:

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2(\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)\right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t-dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j) \right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t-dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

po złożeniu (4 elementy):

$$M := \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2(\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j) \right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t-dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

po złożeniu (4 elementy):

$$M := \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

po zbrykietowaniu masy:

$$M := h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2(\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)\right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t-dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix}\right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

po złożeniu (4 elementy):

$$M := \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

po zbrykietowaniu masy:

$$M := h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dla węzłów (poza brzegowymi):

$$h\, c_k(t+dt) = dt^2\, [-2/h\, c_k(t) + 1/h\, c_{k-1}(t) + 1/h\, c_{k+1}(t)] \; + 2h\, c_k(t) - h c_k(t-dt)$$

$$[\, c_k(t+dt) - 2c_k(t) + c_k(t-dt)\,] / dt^{\,2} = 1/h\, [-2/h\, c_k(t) + 1/h\, c_{k-1}(t) + 1/h\, c_{k+1}(t)]$$

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t+dt) = \sum_j \left(dt^2 (\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j) \right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t-dt)$$

dla pojedynczego elementu:

$$\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t+dt) := \left[dt^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \right] \mathbf{u}(t) - \begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix} \mathbf{u}(t-dt)$$

po złożeniu (4 elementy):

$$M := \frac{h}{3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

po zbrykietowaniu masy:

$$M := h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

dla węzłów (poza brzegowymi):

$$h\, c_k(t+dt) = dt^2 \, [-2/h\, c_k(t) + 1/h\, c_{k-1}(t) + 1/h\, c_{k+1}(t)] \;\; +2h\, c_k(t) - h c_k(t-dt)$$

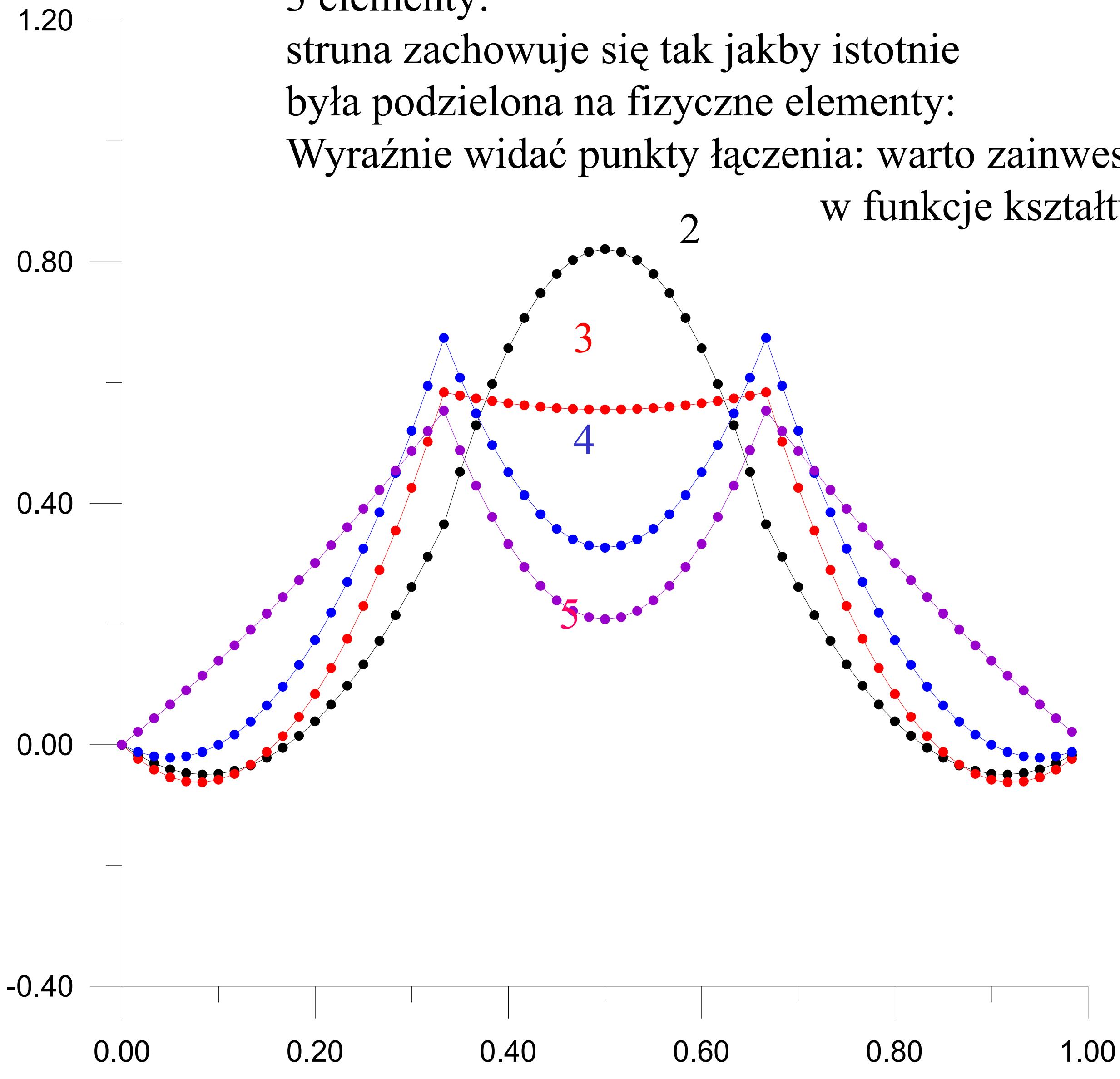
$$[\, c_k(t+dt) - 2c_k(t) + c_k(t-dt)\,] \,/ dt^{\,2} = 1/h\, [-2/h\, c_k(t) + 1/h\, c_{k-1}(t) + 1/h\, c_{k+1}(t)]$$

$c''_{tt} = c''_{xx}$ *w MRS (Verlet) z centralnymi ilorazami różnicowymi*

z ograniczeniem na krok czasowy jak dla MRS - Verleta

Działanie przeciwne do brykietowania masy:
Uciąglenie pochodnej na granicy elementów

3 elementy:
struna zachowuje się tak jakby istotnie
była podzielona na fizyczne elementy:
Wyraźnie widać punkty łączenia: warto zainwestować
w funkcje kształtu Hermita



równanie falowe

$$\sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t + dt) = \sum_j \left(dt^2(\phi_k, \phi_j'') + 2(\phi_k, \phi_j)\right) c_j(t) - \sum_j (\phi_k, \phi_j) c_j(t - dt)$$

$$u(\xi) = u_1^0 \phi_1^0(\xi) + u_1^1 \phi_1^1(\xi) + u_2^0 \phi_2^0(\xi) + u_2^1 \phi_2^1(\xi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_1^0 &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 & \qquad \phi_1^1 &= \frac{J_m}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\ \phi_2^0 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 & \qquad \phi_2^1 &= \frac{J_m}{4}(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \end{aligned}}$$

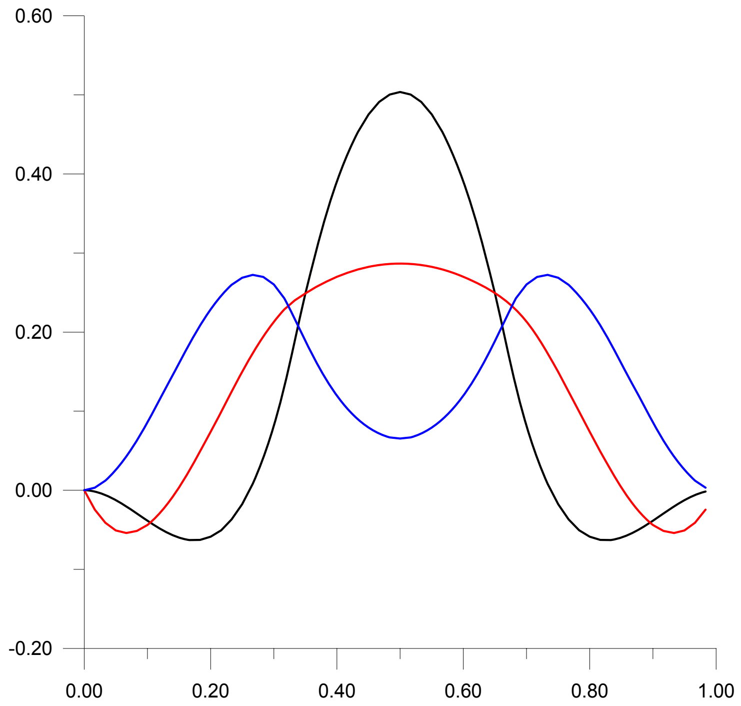
$$E_{ij}^{m} = \frac{1}{30J_m} \begin{pmatrix} -18 & -3J_m & 18 & -3J_m \\ -3J_m & -8J_m^2 & 3J_m & 2J_m^2 \\ 18 & 3J_m & -18 & 3J_m \\ -3J_m & 2J_m^2 & 3J_m & -8J_m^2 \end{pmatrix}$$

(ϕ_i, ϕ_j'')

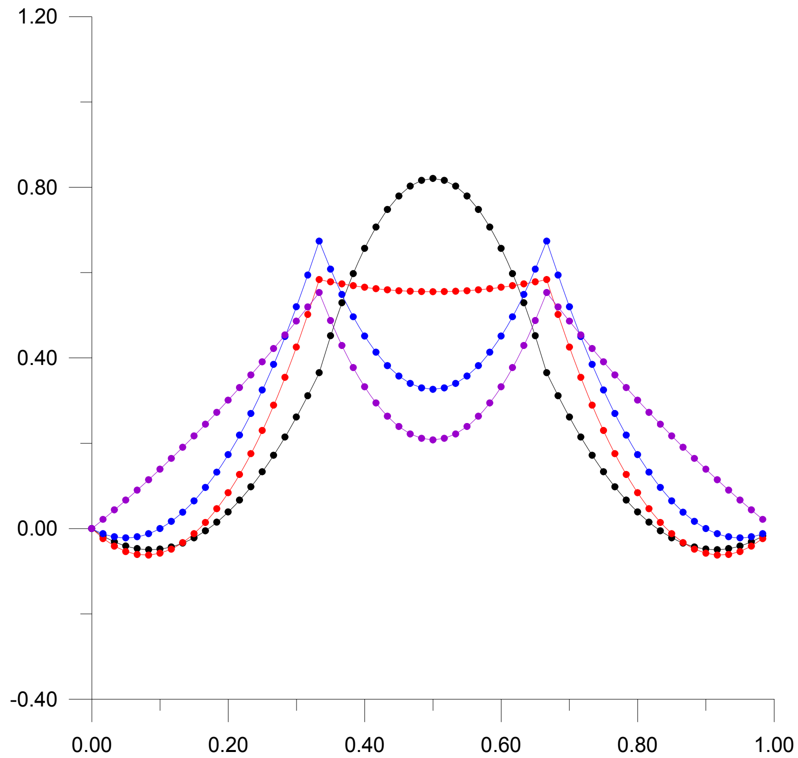
$$O_{ij}^{m} = \frac{J_m}{105} \begin{pmatrix} 78 & 22J_m & 27J_m & -13J_m \\ 22J_m & 8J_m^2 & 13J_m & -6J_m^2 \\ 27 & 13J_m & 78 & -22J_m \\ -13J_m & -6J_m^2 & -27J_m & 8J_m^2 \end{pmatrix}$$

drgania złożonej z 3 elementów struny dla różnych funkcji ształtu (zdjęcia z kolejnych chwil czasowych)

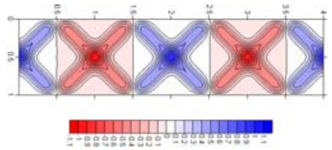
3 elementy, struna, funkcje Hermitea



3 elemementy, struna
funkcje Lagrange

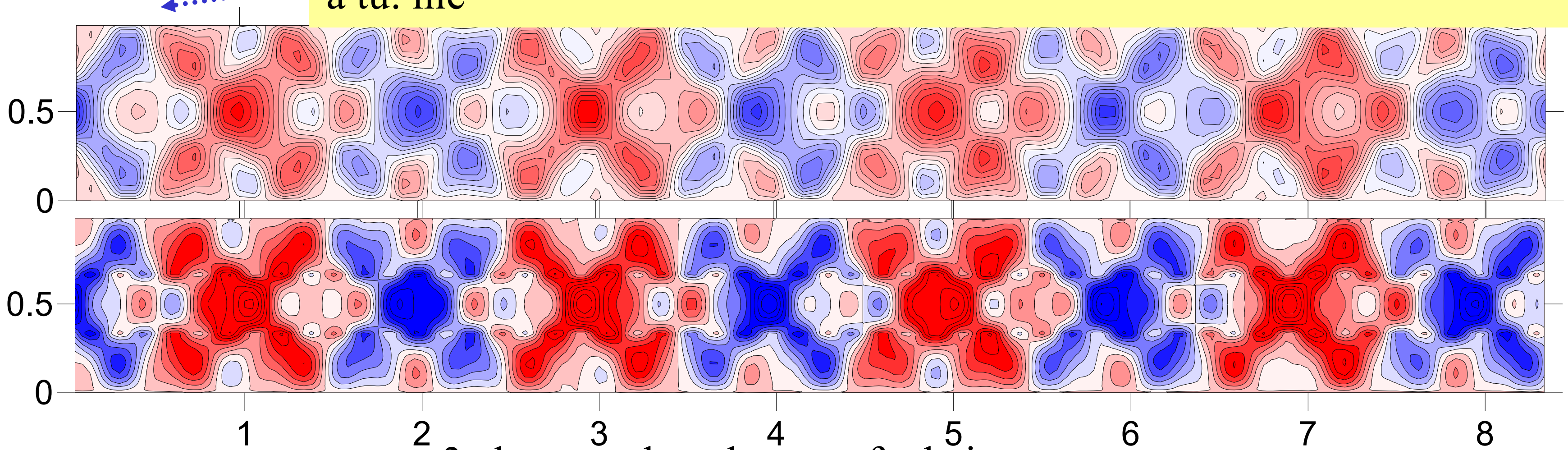


drgania złożonej z 3 elementów struny
dla różnych funkcji ształtu (zdjęcia z kolejnych chwil czasowych)



3 elementy kubiczne sklejki Hermitea

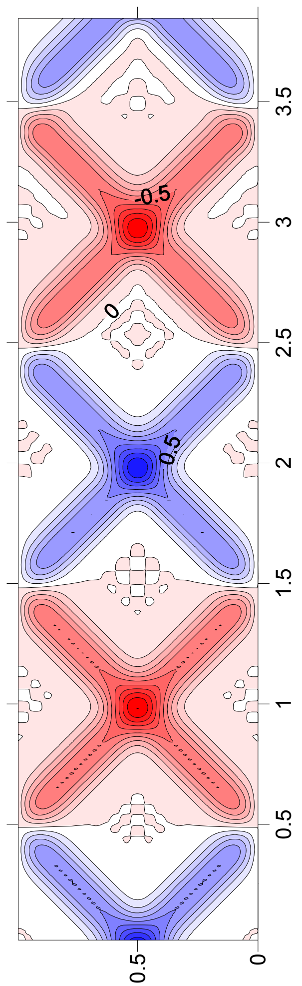
w rozwiązaniu dokładnym granica: niebieskie / czerwone jest jak nożem uciął
a tu: nie



3 elementy kwadratowe funkcje
kształtu Lagrange'a

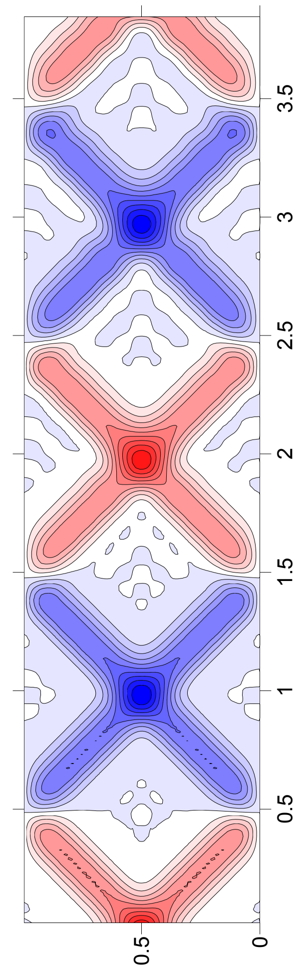
Ten sam krok czasowy, tyle samo parametrów węzłowych

ALE: Hermit: stabilny dopiero dla dt=dx/4!
13 elementów, 28 parametrów węzłowych
tutaj dx 2 razy wieksze niż obok

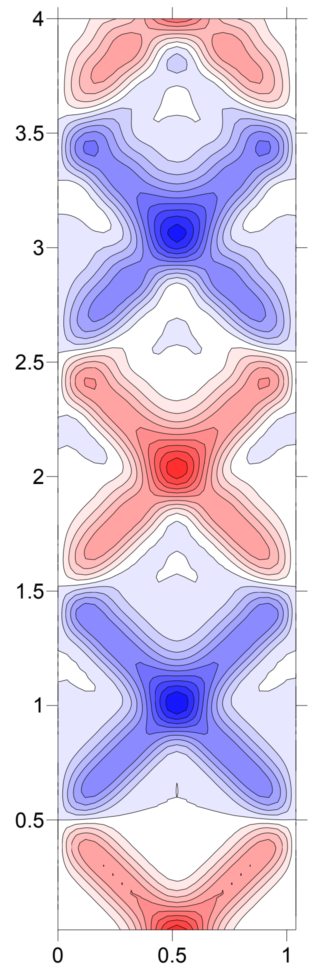


27 węzłów (13 elementów) dt=dx/2
(wciąż niestabilne dla dt=dx)

kwadratowe Lagrangea



liniowe
(przy tych samym
rozkładzie węzłów)



Wiedza jaką nabyliśmy do tej pory na podstawie rachunków dla
równania adwekcji, dyfuzji i falowego:

MES zależne od czasu buduje się na podstawie schematów dla MRS.

Schematy jawne MRS generują schematy MES, które nie działają jak podstawienie.
Ponadto: uzyskane schematy są stabilne z
ostrzejszym ograniczeniem na krok czasowy niż w MRS.

Ograniczenie na krok czasowy dane przez krok przestrzenny jest bardzo
złą informację dla MES bo nie pozwala na efektywne rachunki przy
zoptymalizowanej (lokalnie zagęszczonej) siatce.

Budowa schematów MES na jawnych MRS nie ma sensu.
Bazować należy na niejawnych schematach MRS, które przeniesione
do MES działają bez ograniczenia na krok czasowy.

Odpowiednik CN dla równania falowego:
schemat Newmarka

$$\boxed{u(t+dt)=2u(t) -u(t-dt)+dt^2[\beta a(t+dt)+(1/2-2\beta+\gamma)a(t)+(-\gamma+\beta+1/2)a(t-dt)]}$$

γ,β – parametry metody

a : przyspieszenie

dla falowego:
$a=c^2 u_{xx}$ $[c=1]$

Verlet $\gamma=1/2$, $\beta=0$ ograniczony przez CFL $cdt \leq dx$

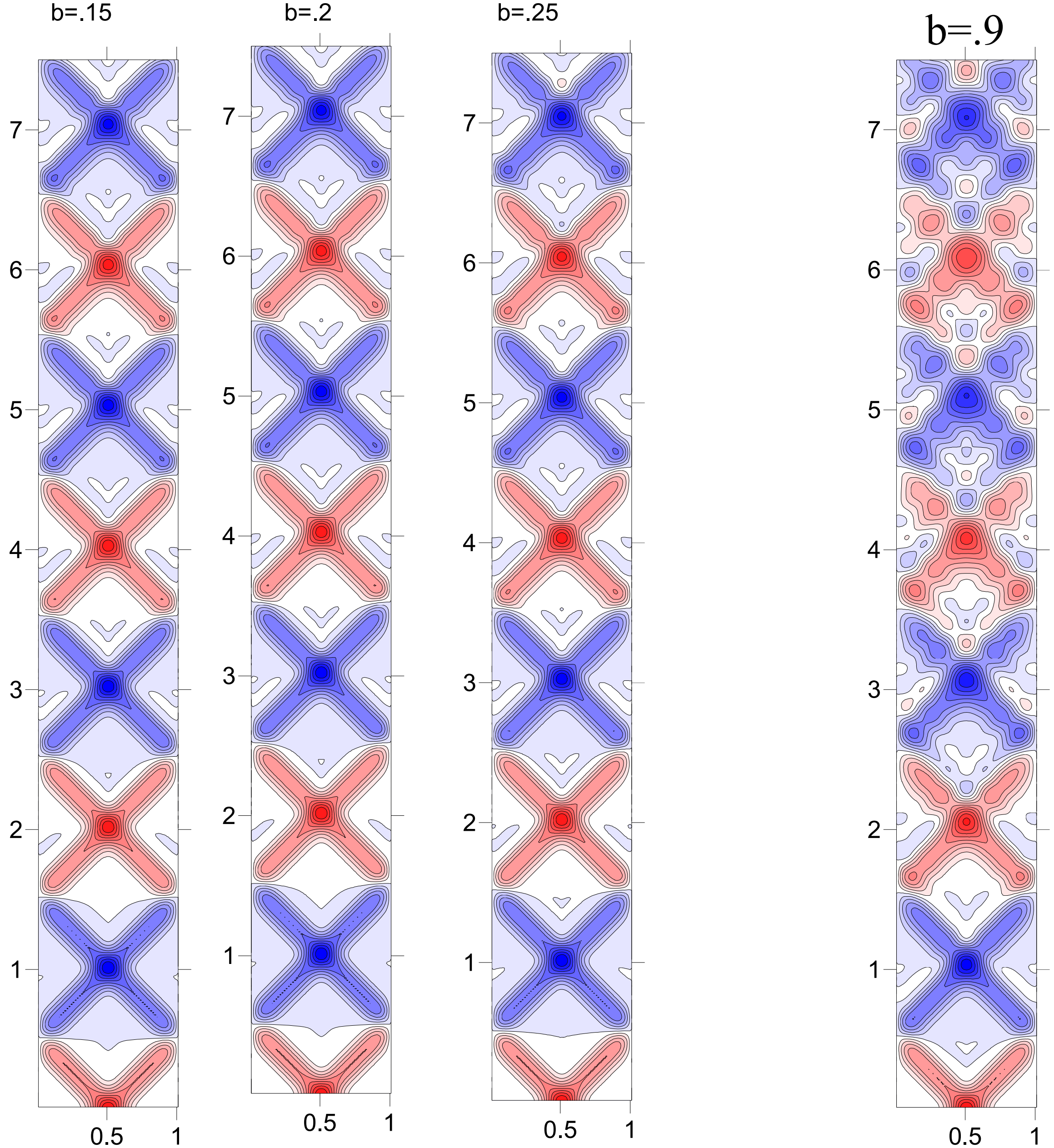
w MRS widzieliśmy, że Newmark z $\gamma=1/2$ i $\beta=1/4$ – stabilny dla dowolnego dt.

[Pamiętamy, że dla Newmarka: im mniejsze beta tym lepiej: beta wprowadzało sztuczna dyssypacje (przydatną bo stabilizującą schemat)]

poza CFL: dt > cdx
dt=1.5dx,
γ=0.5, schemat staje się stabilny dla β>0.15

101 węzłów MRS

przypomnienie



rosnące beta generuje wyższe częstości
wniosek:
najlepszy minimalne β przy którym schemat jeszcze stabilny

MES, równanie falowe, schemat Newmarka

$$u(t+dt)=2u(t)-u(t-dt)+dt^2[\beta a(t+dt)+(1/2-2\beta+\gamma)a(t)+(-\gamma+\beta+1/2)a(t-dt)]$$

Verlet = stabilność MES dla cdt<dx/sqrt(3)
pytanie: Jak duże beta, żeby FEM był stabilny dla cdt=dx ?
γ=1/2 (fiksujemy)

$$u(t+dt)=2u(t)-u(t-dt)+dt^2[\beta a(t+dt)+(1-2\beta)a(t)+\beta a(t-dt)]$$

$$u(t+dt)-dt^2\beta a(t+dt)=2u(t)-u(t-dt)+dt^2[(1-2\beta)a(t)+\beta a(t-dt)]$$

$a(x,t)=c^2 u_{xx}(x,t)$

$$\sum_j \left((\phi_k,\phi_j)-dt^2\beta(\phi_k,\phi_j'')\right)u_j(t+dt)=$$

$$\sum_j \left(2(\phi_k,\phi_j)+dt^2(1-2\beta)(\phi_k,\phi_j'')\right)u_j(t)+\sum_j\left(-(\phi_k,\phi_j)+dt^2\beta(\phi_k,\phi_j'')\right)u_j(t-dt)$$

dla jednego elementu, z u = wektorem własnym macierzy iteracji $u(t+dt)=\lambda^2 u(t-dt)$,
$u(t)=\lambda u(t-dt)$

$$\sum_j \left((\phi_k, \phi_j) - dt^2 \beta(\phi_k, \phi_j'')\right) u_j(t+dt) =$$

$$\sum_j \left(2(\phi_k, \phi_j) + dt^2(1-2\beta)(\phi_k, \phi_j'')\right) u_j(t) + \sum_j \left(-(\phi_k, \phi_j) + dt^2 \beta(\phi_k, \phi_j'')\right) u_j(t-dt)$$

$$(A - dt^2\beta B)\lambda^2 u = \lambda(2A + dt^2(1-2\beta)B)u + (-A + dt^2\beta B)u$$

liniowe funkcje kształtu:

A= $\begin{pmatrix} \frac{h}{3} & \frac{h}{6} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{3} \end{pmatrix}$ B= $\begin{pmatrix} \frac{-1}{h} & \frac{1}{h} \\ \frac{1}{h} & \frac{-1}{h} \end{pmatrix}$

weźmy cdt=h *(przypominamy, że c=1)*

$$(A - dt^2\beta B)\lambda^2 u = \lambda(2A + dt^2(1-2\beta)B)u + (-A + dt^2\beta B)u$$

```
> C:=lambda**2*matadd(A,-beta*h**2*B);
```

$$C := \lambda^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3}h + h\beta & \frac{1}{6}h - h\beta \\ \frac{1}{6}h - h\beta & \frac{1}{3}h + h\beta \end{bmatrix}$$

```
> DD:=lambda*matadd(2*A,h**2*(1-2*beta)*B);
```

$$DD := \lambda \begin{bmatrix} \frac{2}{3}h - h(1-2\beta) & \frac{1}{3}h + h(1-2\beta) \\ \frac{1}{3}h + h(1-2\beta) & \frac{2}{3}h - h(1-2\beta) \end{bmatrix}$$

```
> EE:=matadd(-A,h**2*(beta)*B);
```

$$EE := \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}h - h\beta & -\frac{1}{6}h + h\beta \\ -\frac{1}{6}h + h\beta & -\frac{1}{3}h - h\beta \end{bmatrix}$$

```
> W:=matadd(C,-DD);
```

$$W := \begin{bmatrix} \lambda^2\left(\frac{1}{3}h + h\beta\right) - \lambda\left(\frac{2}{3}h - h(1-2\beta)\right) & \lambda^2\left(\frac{1}{6}h - h\beta\right) - \lambda\left(\frac{1}{3}h + h(1-2\beta)\right) \\ \lambda^2\left(\frac{1}{6}h - h\beta\right) - \lambda\left(\frac{1}{3}h + h(1-2\beta)\right) & \lambda^2\left(\frac{1}{3}h + h\beta\right) - \lambda\left(\frac{2}{3}h - h(1-2\beta)\right) \end{bmatrix}$$

```
> WW:=matadd(W,-EE);
```

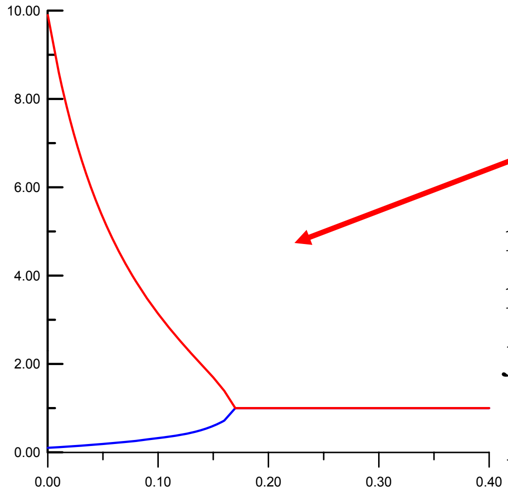
$$WW := \begin{bmatrix} \lambda^2\left(\frac{1}{3}h + h\beta\right) - \lambda\left(\frac{2}{3}h - h(1-2\beta)\right) + \frac{1}{3}h + h\beta & \lambda^2\left(\frac{1}{6}h - h\beta\right) - \lambda\left(\frac{1}{3}h + h(1-2\beta)\right) + \frac{1}{6}h - h\beta \\ \lambda^2\left(\frac{1}{6}h - h\beta\right) - \lambda\left(\frac{1}{3}h + h(1-2\beta)\right) + \frac{1}{6}h - h\beta & \lambda^2\left(\frac{1}{3}h + h\beta\right) - \lambda\left(\frac{2}{3}h - h(1-2\beta)\right) + \frac{1}{3}h + h\beta \end{bmatrix}$$

```
> det(");
```

$$h^2\beta + 6\lambda^2h^2\beta - 4\lambda h^2\beta - 4\lambda^3h^2\beta + \lambda^4h^2\beta + \frac{1}{12}h^2 - \frac{3}{2}\lambda^2h^2 + \frac{2}{3}\lambda h^2 + \frac{2}{3}\lambda^3h^2 + \frac{1}{12}\lambda^4h^2$$

```
> solve(",lambda);
```

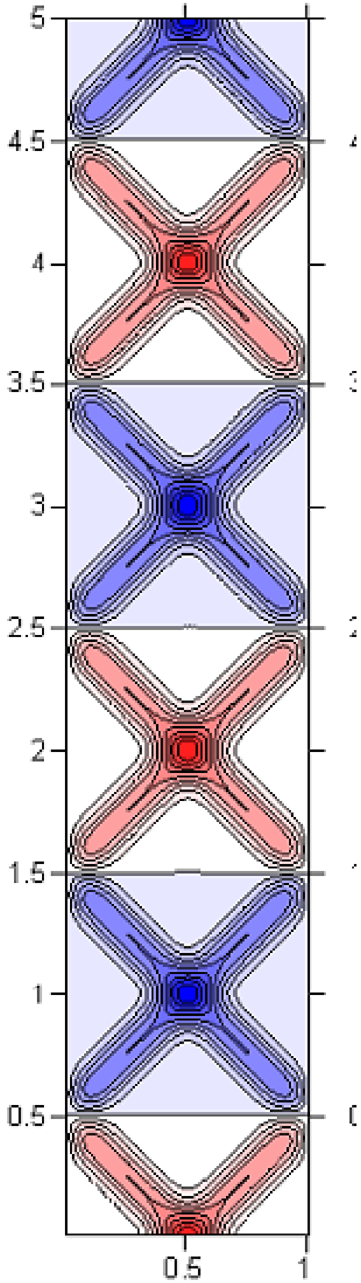
$$1,\ 1,\ \frac{1}{2}\,\frac{24\beta - 10 + 4\sqrt{-36\beta + 6}}{12\beta + 1},\ \frac{1}{2}\,\frac{24\beta - 10 - 4\sqrt{-36\beta + 6}}{12\beta + 1}$$



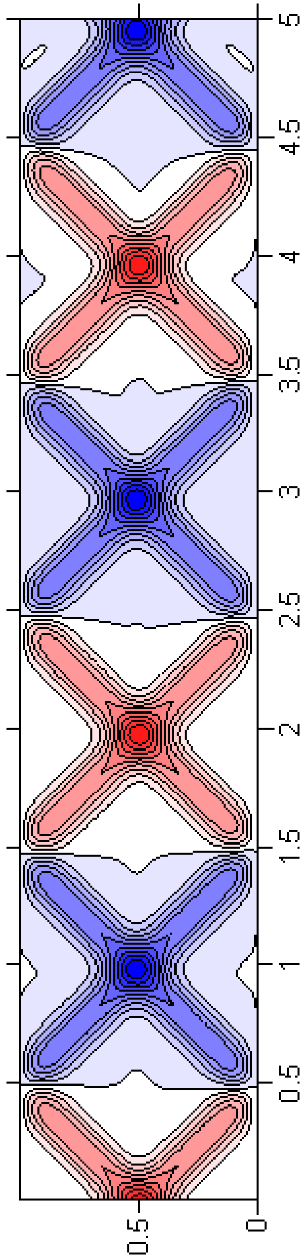
moduły 2 pierwiastków, stają się równe 1 dla $\beta \geq 1/6 = .16666$
mamy odpowiedź: aby Newmark z MES
jest stabilny dla cdt=dx, jeśli $\beta \geq 1/6$

udało nam się dogonić Verleta w MRS

MRS, dt=dx, Verlet



MES, dt=dx, **kwadratowe** fk β=0.25



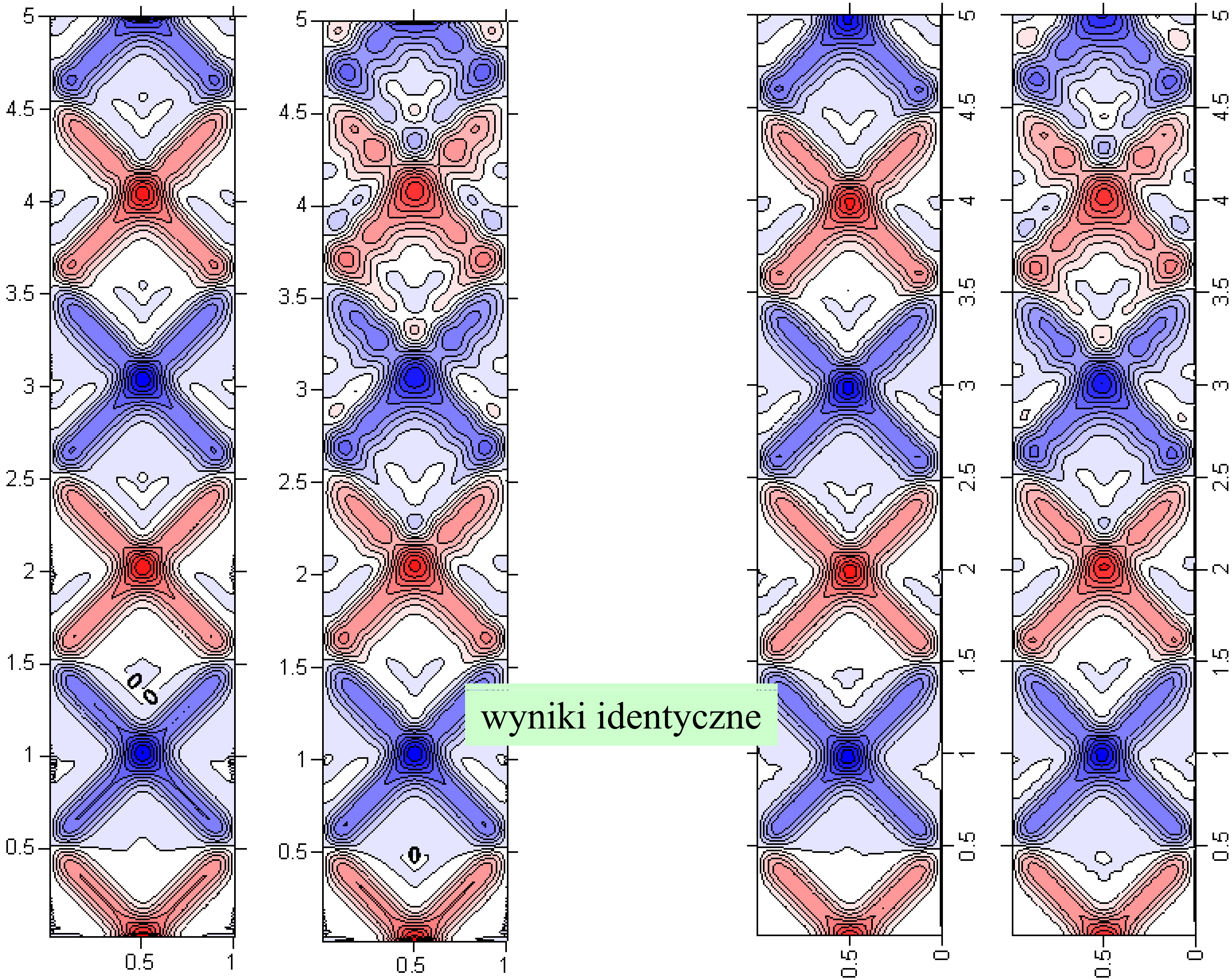
wydłużmy krok czasowy dt=2dx, Newmark w MRS i MES

MRS

β=.2 β=.5

MES (kwadratowe fk)

β=.2 β=.5

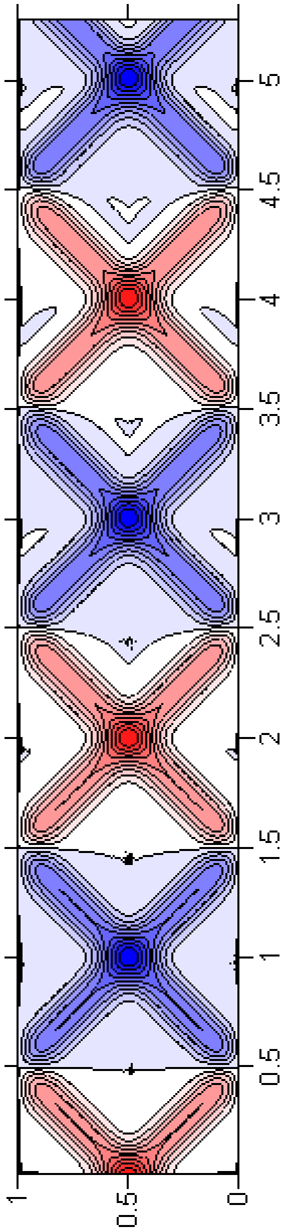


wyniki identyczne

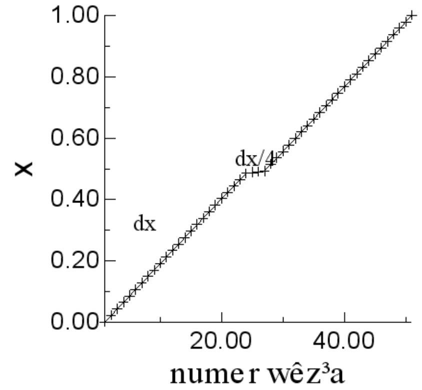
FEM ze schematem Newmarka i kwadratowymi FK

dt=dx, β=0.25

101 węzłów



zastosowanie schematu Newmarka dla MES przy nierównej siatce



Newmark ratuje sytuacje MES: można dobrać takie β aby uzyskać schemat stabilny dla każdego kroku czasowego

przekroczyliśmy ograniczenie Verleta dt<dx/4/sqrt(3) siedmiokrotnie

Wniosek:

MES pozwala na adaptację siatki,
która niemożliwa (trudna) w MRS

Tw. Ironsa: o stabilności decyduje najdrobniejszy element.
[problem podobny do sztywności]

Wyjście: MES zależne od czasu tylko
ze schematami, które w MRS są niejawne
i pozwalają na dowolny krok czasowy

(jawne nie są mniej złożone, a gorsze)