Równanie Poissona: relaksacja i nadrelaksacja

19 kwietnia 2022

Rozwiązujemy równanie Poissona w 2D

$$\nabla^2 u = -\rho(x, y), \tag{1}$$

gdzie gęstość ładunku $\rho(x, y) = \exp(-\frac{(x-x_0)^2+y^2}{d^2}) - \exp(-\frac{(x+x_0)^2+y^2}{d^2})$, $d = 5$, $x_0 = 5$. Pracujemy na siatce $[-N, \ldots, N] \times [-N, \ldots, N]$ z krokiem $dx = 1$ w obydwu kierunkach. Układ umieszczony jest w metalowym kwadratowym uziemionym pudle, co uwzględniamy wstawiając warunek brzegowy $u(x, y) = 0$ gdy $|x| = N$ lub $|y| = N$.

Z dyskretyzacji równania dostajemy przepis relaksacyjny

$$u(i, j) := \frac{u(i+1, j) + u(i-1, j) + u(i, j+1) + u(i, j-1) + \rho(i, j)dx^2}{4}. \tag{2}$$

Jedna iteracja procedury relaksacji polega na zastosowaniu wzoru (2) dla wszystkich punktów na siatce poza brzegiem.

Zbieżność iterowanej funkcji do rozwiązania równania Poissona można (wykład) śledzić licząc całkę z lagranżjanu układu ładunek-pole

$$a = \int_S \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho(i, j)u(i, j) \right] dxdy, \tag{3}$$

czyli w wersji dyskretnej

$$a = \sum_{i,j=-N+1}^{N-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u(i+1, j) - u(i-1, j)}{2dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2dx} \right)^2 - \rho(i, j)u(i, j) \right] dx^2. \tag{4}$$

Jakość rozwiązania można również ocenić odwracając równanie Poissona. Wstawiamy do równania (1) u jakim dysponujemy i liczymy

$$\rho'(x,y) = -\frac{u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j-1)+u(i,j+1)-4u(i,j)}{dx^2}. \tag{5}$$

Można sprawdzić w jakim stopniu ρ' reprodukuje ρ.

Zadanie 1 Liczymy do 1000 iteracji pętli relaksacyjnej. Startujemy od $u = 0$.

1.1. Narysować a od numeru iteracji.

1.2. Narysować u po tysięcznej iteracji.

1.3. Narysować ρ' oraz $\delta(x,y) = \rho'(x,y) - \rho(x,y)$.

1.4. Zwiększyć liczbę iteracji do 2000. Narysować $\delta(x,y)$ na końcu rachunku.

Zadanie 2 Wracamy od teraz do końca projektu do 1000 iteracji. Modyfikacja wzoru relaksacyjnego

$$u(i,j) := (1-w)u(i,j) + w\frac{u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1)+\rho(i,j)dx^2}{4}, \tag{6}$$

z $w \in (1,2)$ daje przepis na iterację nazywaną nadrelaksacją.

2.1 Znaleźć w, przy którym zbieżność osiągamy najszybciej. Sposób wyboru i udokumentowania zostawiam Państwu.

2.2 Narysować a od numeru iteracji dla w w pobliżu optimum. Uwaga: każdy rachunek ze zmienionym w startujemy od $u = 0$.

Zadanie 3 Dla rachunku z optymalnym w narysować $\delta(x,y)$ po 1000 iteracjach .