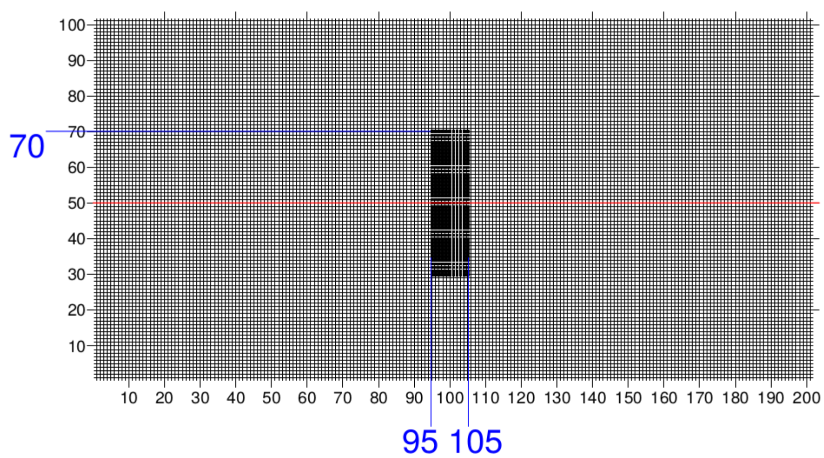
Przepływ potencjalny

24 maja 2023

Nieściśliwa, nielepka ciecz opływa wstawioną przeszkodę (Fig.1). Rozwiążemy problem na siatce 201 na 101 punktów [współrzędne $(1, 201) \times (50, 151)$]. powyżej osi symetrii układu (Fig. 1). Przyjmujemy skok siatki $dx = dy = 1$.



Rysunek 1: Siatka różnicowa do opisu cieczy opływającej nieruchomą szynę. Szyna znajduje się w obszarze $(95, 105) \times (30, 70)$. Równania rozwiążemy powyżej osi symetrii układu (czerwona linia), czyli w obszarze $(1, 201) \times (50, 151)$. (Rysunek kończy się na 100 punkcie w y ale warunek brzegowy trzeba przesunąć wyżej.)

Ze względu na brak lepkości przepływ jest potencjalny (bezwirowy), tzn. istnieje funkcja $\phi(x, y)$ (nazywana potencjałem przepływu) taka, że wektor prędkości cieczy (u, v) dany jest przez

$$u = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x},$$
$$v = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \tag{1}$$

($u =$ prędkość w kierunku poziomym, v - w pionowym). Potencjał przepływu spełnia równania Laplace'a

$$\nabla^2 \phi(x, y) = 0. \tag{2}$$

Zadanie 1 (50 pkt) Rozwiązać dyskretną wersję równania (2). Dyskretyzacja laplasjanu oraz metoda relaksacyjna jak w pierwszym zestawie. Iterację prowadzimy tylko na punktach spoza brzegu.

Warunki brzegowe:

- Daleko od przeszkody ciecz nie odczuwa jej obecności ($u = u_0$, $v = 0$) i potencjał dany jest przez $\phi(x, y) = u_0 x$. Potencjał przepływu swobodnego przyjąć na lewym, górnym i prawym brzegu czyli, odpowiednio $\phi(1, j) = u_0$ (dla j od 50 do 151), $\phi(i, 151) = u_0 i$ (dla i od 1 do 201) oraz $\phi(201, j) = u_0 \times 201$ (dla j od 50 do 151).

Na dolnym brzegu (osi symetrii) i na przeszkodzie zastosujemy warunki typu Neumanna:

- Na osi, ze względu na symetrię $v = 0$, czyli $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$. Przed każdą następną iteracją należy przepisać $\phi(i, 50) = \phi(i, 51)$, dla i od 1 do 94 oraz od 106 do 201.

- Ciecz nie wnika w przeszkodę – znika składowa normalna prędkości do przeszkody (czyli pochodna ϕ po x na odcinkach pionowych przeszkody oraz po y na odcinku poziomym). Daje to warunki $\phi(95, j) = \phi(94, j)$ i $\phi(105, j) = \phi(106, j)$ dla $j \in [50, 70]$ oraz $\phi(i, 70) = \phi(i, 71)$ dla $i \in (95, 105)$. W narożnikach przeszkody (95,70) i (105,70) rozsądnie jest zastosować średnie arytmetyczne wartości potencjału z wnętrza obszaru całkowania, to jest $\phi(95, 70) = (\phi(94, 70) + \phi(95, 71))/2$ oraz $\phi(105, 70) = (\phi(106, 70) + \phi(105, 71))/2$.

Uwaga: na starcie iteracji warto wstawić potencjał przepływu swobodnego wszędzie poza brzegiem. **Wyniki do uzyskania** Narysować linie stałego potencjału.

Zadanie 2 (50 pkt) Problem przepływu potencjalnego wygodnie rozwiązać używając funkcji strumienia $\psi(x, y)$. Funkcja ta również spełnia równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \psi(x, y) = 0, \tag{3}$$

i definiuje rozkład prędkości

$$u = \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y},$$
$$v = -\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}. \tag{4}$$

Warunki brzegowe. Na lewym, prawym i górnym brzegu dajemy funkcję strumienia taką, jak dla przepływu swobodnego $\psi(x, y) = u_0 y$ [odpowiada to rozkładowi prędkości cieczy $(u_0, 0)$, przyjąć $u_0 = 1.$]. Na całym dolnym brzegu (oś+przeszkoda) podajemy warunek przegowy $\psi(x, y) = \psi(1, 50)$. Dzięki temu dolny brzeg będzie linią strumienia $\psi(x, y)$ =const. Prędkości cieczy są równoległe do linii strumienia, co daje nam odpowiednie warunki brzegowe na prędkość cieczy: znikanie v na osi oraz składowych prędkości cieczy normalnych do przeszkody.

Narysować linie strumienia cieczy.