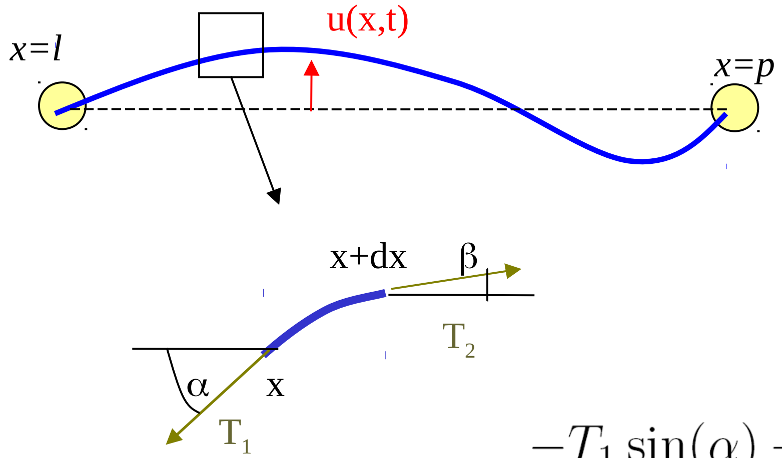
równanie falowe (dla struny), cząstkowe, hiperboliczne

[dynamika Newtonowska ośrodka ciągłego]



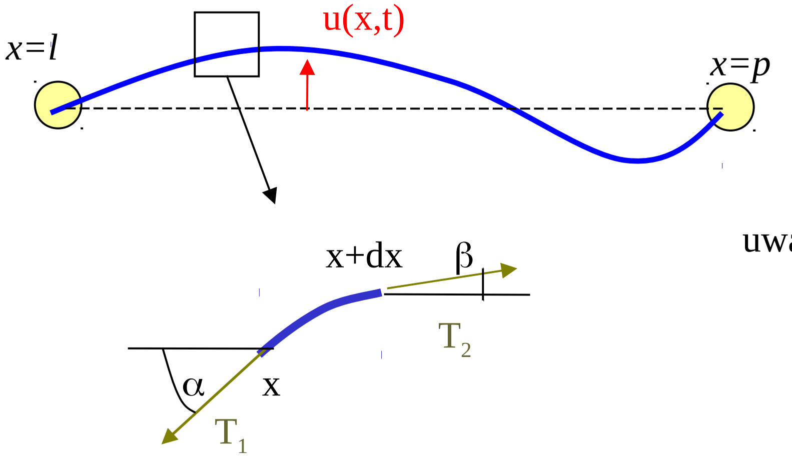
(II zasada Newtona *F=ma*)

$$-T_1 \sin(\alpha) + T_2 \sin(\beta) = \rho(x) dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

siła naciągu struny *T* (kierunek poziomy):

$$T = T_1 \cos(\alpha) = T_2 \cos(\beta)$$

$$-\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\rho(x)}{T} dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$



$$\tan(\alpha) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x$$

uwaga:

$$\tan(\beta) = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx}$$

$$-\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\rho(x)}{T} dx \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{dx}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right) = \frac{\rho(x)}{T}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

dx → 0

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$c(x) = \sqrt{\frac{T}{\rho(x)}}$$

(prędkość rozchodzenia się drgań)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

c – stałe: Ogólne rozwiązanie dla nieskończonego ośrodka (d'Alamberta)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0$$

$$u(x,t) = f(x \pm ct) \longrightarrow$$

dowolna funkcja
drgania rozchodzące się bez zmiany kształtu
[brak dyspersji w równaniu falowym]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

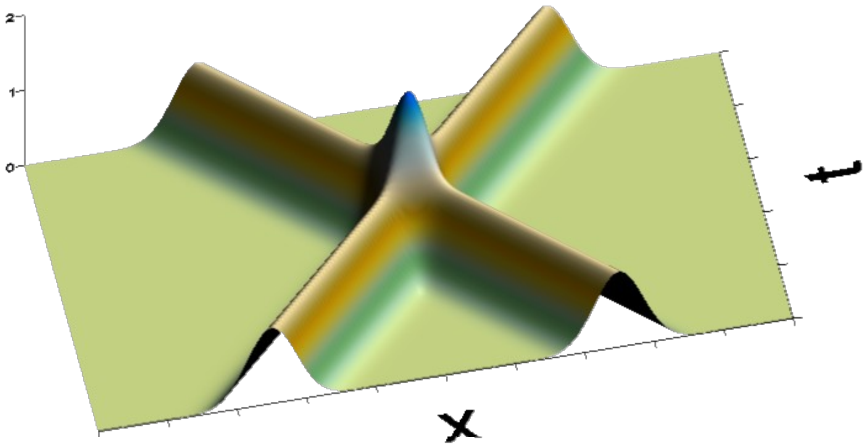
Liniowość równania:

$$\longrightarrow \frac{\partial^2 (u+v)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (u+v)}{\partial x^2}$$

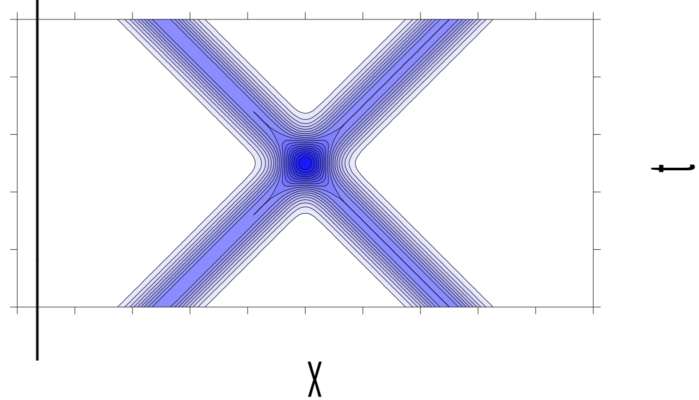
Zasada superpozycji.

Liniowość równania i zasada superpozycji:

Sygnały rozchodzą się niezależnie od siebie



$$F=\exp(-(x-0.5+ct)^2)$$
$$+\exp(-(x+0.5-ct)^2)$$



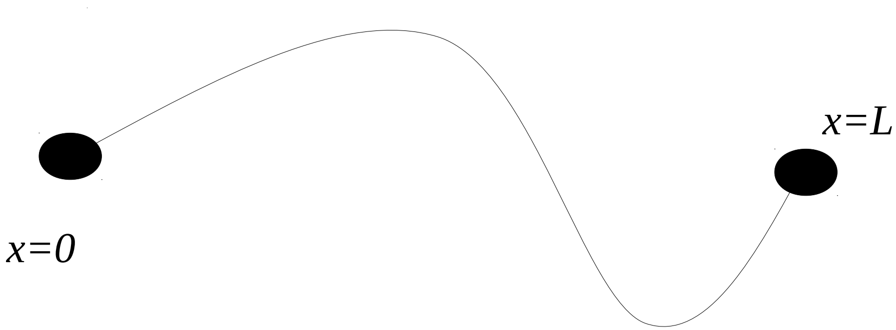
Sygnały mijają się bez zmiany kształtu [(jedna fala przenika drugą.]

ponieważ równanie liniowe: jeśli wskażemy bazę zupełną funkcji ze znaną ewolucją czasową = problem rozwiązany
baza: mody normalne (fale stojące) (drgania własne)

baza: mody normalne (fale stojące) (drgania własne)

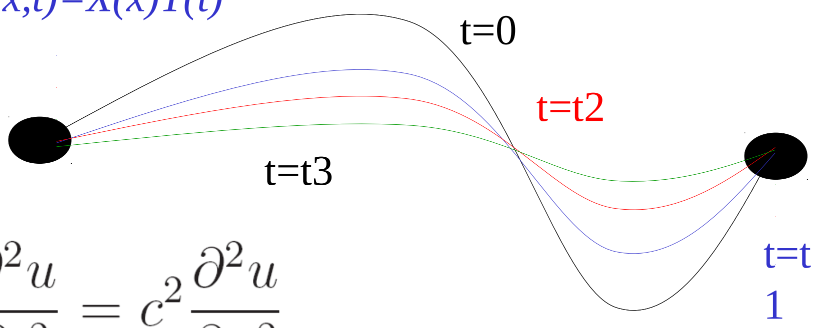
Dwupunktowe warunki brzegowe

u(0,t)=u(L,t)=0



Poszukajmy rozwiązań, w których tylko amplituda (a nie kształt fali) nie zależy od czasu:

u(x,t)=X(x)T(t)



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$T(t)=\cos(\omega\ t+\phi)=$
$C\cos(\omega\ t)+D\sin(\omega\ t)$

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

[gdy gęstość struny zmienna *c* może być funkcją położenia]

Równanie na część przestrzenną fal stojących (drania własne, drgania normalne)

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\frac{\omega_n^2}{c^2(x)} X_n(x) \qquad \frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

Dla *c* niezależnego od x:

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -k_n^2 X_n(x)$$

k-liczba falowa, wektor falowy
$k = 2\pi/\lambda$ tutaj λ długość fali
$k=\omega / c$

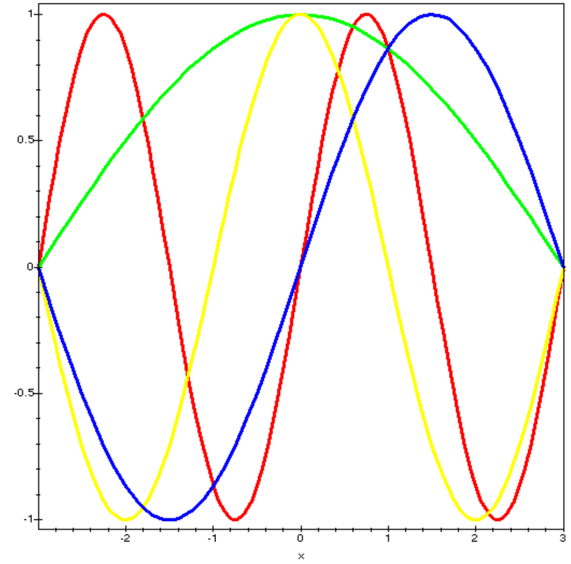
$X_n(x)=\sin(k_n x)$

WB: spełnione, gdy $X(0)=X(L)=0$

$k_n = n\pi / L$

$$L = \frac{n}{2}\lambda_n$$

Fale stojące:
Między warunkami brzegowymi
całkowita liczba połówek długości fal..



0 L

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -k_n^2 X_n(x)$$

warunki brzegowe: kwantyzacja $k \rightarrow$ kwantyzacja w

$$\frac{1}{T(t)}\frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \frac{c^2}{X(x)}\frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\omega^2$$

$X_n(x)=\sin(k_n x)$, $T_n=\sin(w_n t)$

$$c = \sqrt{T/\rho}$$

$k_n = n\pi/L$

T oznacza naciąg struny

$k=\omega/c \longrightarrow \omega_n = ck_n$

przestrzenne drgania własne nie zależą od c,
ale częstości tak.

Wiemy, że niższe tony
dają struny o większej grubości [ρ].

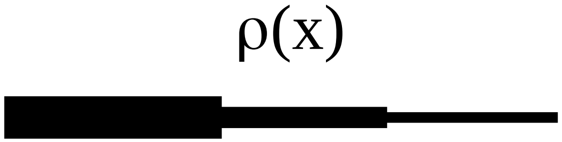
Wiemy również, że
im silniej struna naciągnięta tym
wyższy dźwięk.

Drgania własne dla zmiennej gęstości struny

$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\frac{\omega_n^2}{c^2(x)} X_n(x)$$

W przypadku ogólnym [$c=c(x)$] przyda się rachunek numeryczny. Wyliczyć X_n oraz ω_n

$$c(x) = \sqrt{T_0/\rho(x)}$$



$$\frac{d^2 X_n(x)}{dx^2} = -\rho(x)\frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x)$$

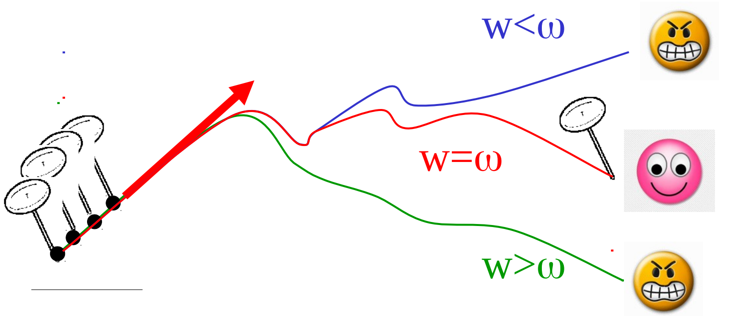
Dyskretyzujemy drugą pochodną, liczymy $X_n(x+dx)$

$$X_n(x+\Delta x) = -\Delta x^2 \rho(x)\frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x) - X_n(x-\Delta x) + 2X_n(x)$$

Równanie własne z warunkami brzegowymi: Metoda strzałów.

$$X_n(x+\Delta x) = -\Delta x^2 \rho(x) \frac{\omega_n^2}{T_0} X_n(x) - X_n(x-\Delta x) + 2X_n(x)$$

w – parametr równania
ω - dokładna wartość własna



---

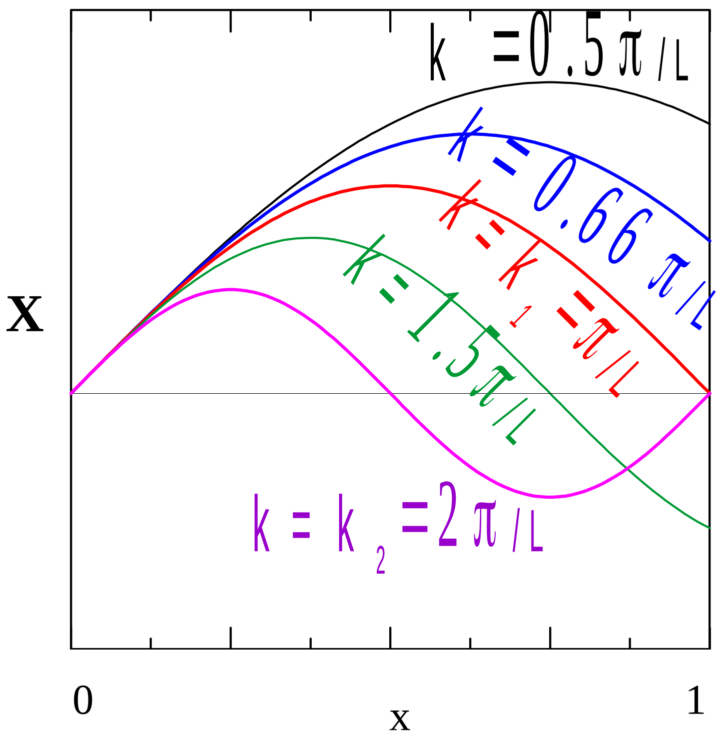
w X_0 wstawić warunek brzegowy, ale co wstawić w X_1 ??

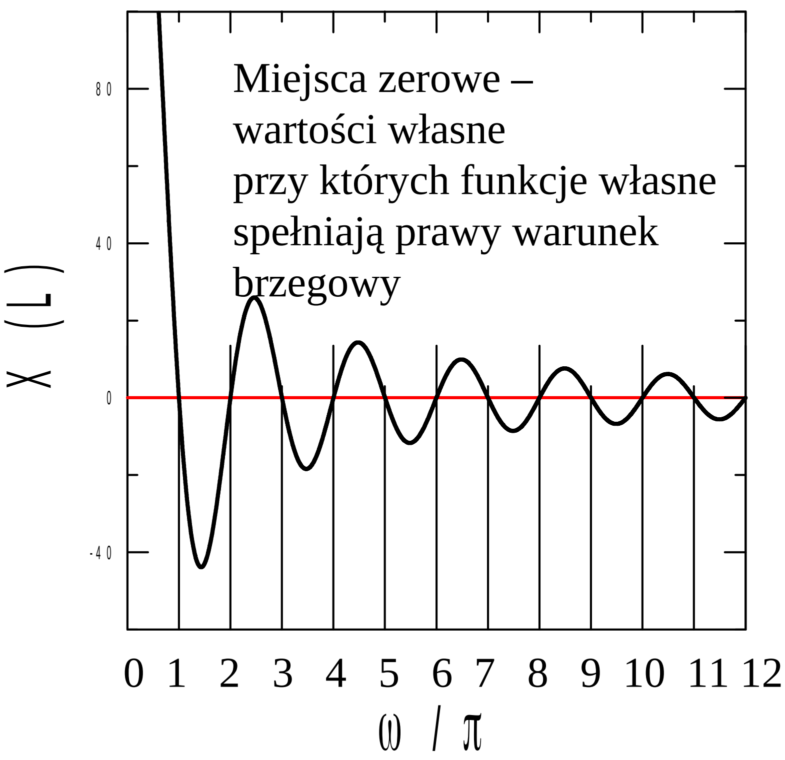
dla drgań własnych wstawiamy w X_1 cokolwiek
Funkcje własne określone co do stałej normalizacyjnej.
(zmieni się tylko normalizacja, równanie własne = jednorodne)

Test metody dla ρ(x)=1
(L=1, T_0=1)

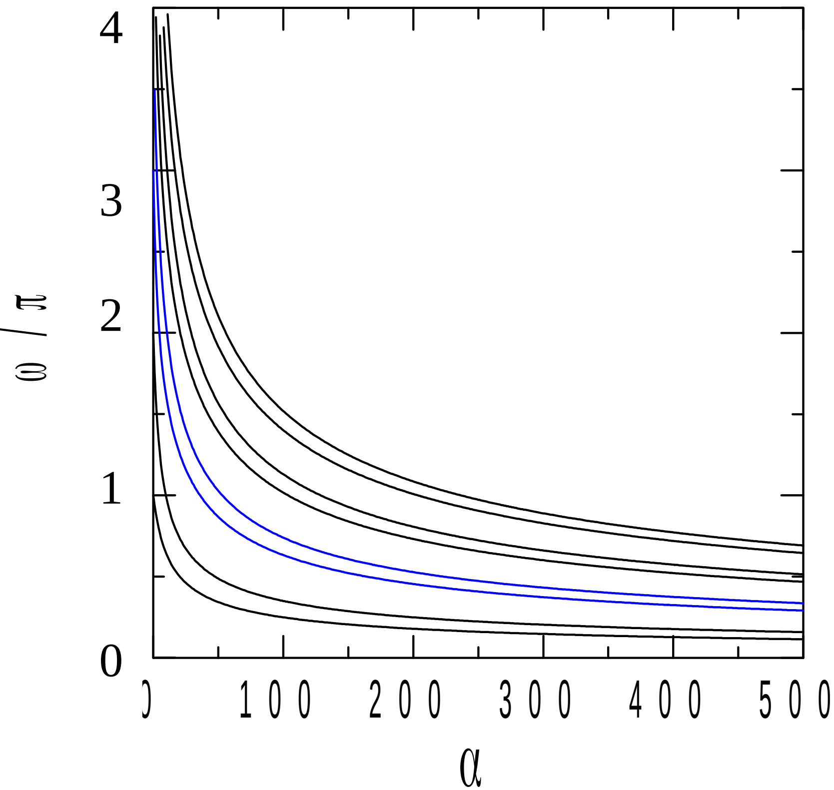
$$g(x) = \rho(x)\frac{\omega^2}{T_0}$$

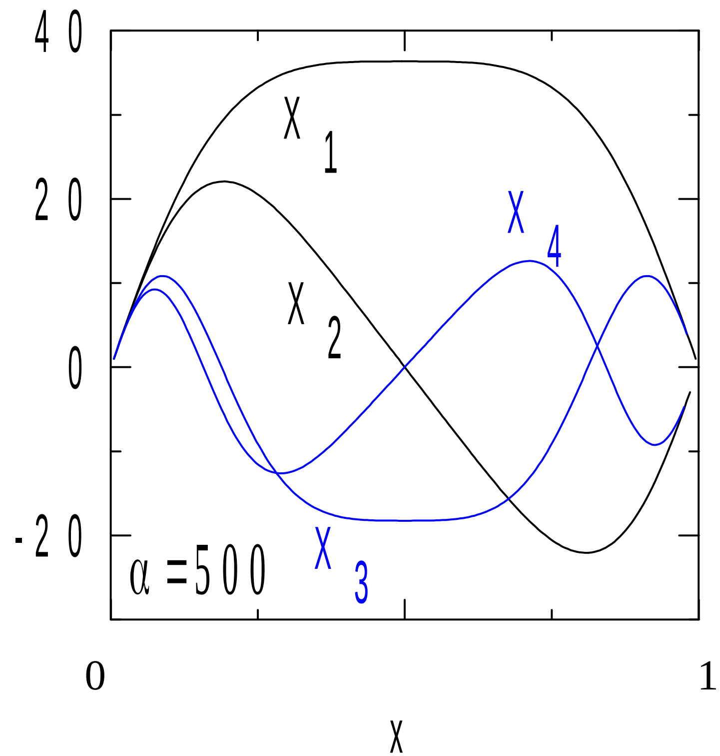
Analityczne: $k_n = n\pi\ /L$





Przykład: $\rho(x)=1+4\alpha(x-1/2)^2$ (struna cięższa przy mocowaniach)





α=0 – częstości własne równoodległe
Częstości własne maleją z α (cięższa struna)
duże α – częstości grupują się w pary

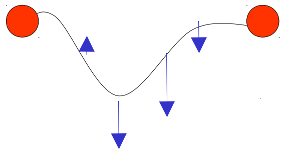
W każdej parze: funkcja parzysta i nieparzysta.
Środek struny – prawie nieważki, na częstości wpływ ma kształt funkcji przy brzegach – a tam zbliżony dla każdej funkcji z pary

Drgania własne a ogólne rozwiązania równania falowego

Równanie ogólne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Warunki początkowe:
u(x,t=0) oraz *v(x,t=0)=du/dt*



Zadać wychylenie
i prędkości

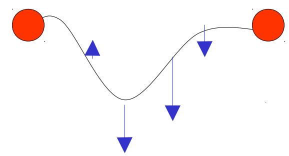
rozłożyć warunki początkowe na drgania własne
problem zależności czasowych jest rozwiązany

Drgania normalne a ogólne rozwiązania równania falowego

Równanie ogólne:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Warunki początkowe:
u(x,t=0) oraz *v(x,t=0)=du/dt*



Zadać wychylenie
i prędkości

rozłożyć warunki początkowe na drgania własne
problem zależności czasowych jest rozwiązany

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$$

$$v(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n\omega_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n\omega_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$$

w chwili t=0, za kształt struny odpowiadają współczynniki c_n
a za prędkość – współczynniki s_n

Superpozycja drgań własnych:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$$

Warunki początkowe $u(x, t=0) = g(x)$

$$\frac{du(x,t=0)}{dt} = h(x)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x)$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \omega_n \sin(k_n x)$$

$$\int_0^L \sin(k_m x)dx \times$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin(k_n x)dx$$

$$s_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L h(x)\sin(k_n x)dx$$

$$\int_0^L \sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{m\pi x}{L})dx = \frac{L}{2}\delta_{nm}$$

dla drgań własnych jednorodnej struny:
Dyskretna sinusowa transformata Fouriera

rozkład na mody normalne

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x)$$ na przedziale (0,L) $$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin(k_n)dx$$

Rozwinięcie w szereg Fouriera:

g(x) = okresowa, odcinkowo ciągła z okresem *T*:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x)\right)$$ $$o_n = 2\frac{n\pi}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\cos(\omega_n x)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(x)\sin(\omega_n x)dx$$

Rozkład na drgania normalne a szereg Fouriera:
drgania podległe warunkom brzegowym g(0)=g(L)=0.
L nie ma interpretacji okresu (może być pół długości fali).

Warunki Dirichleta zbieżności szeregu Fouriera

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x))$$

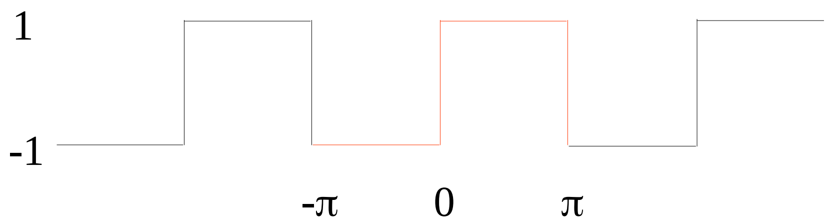
Rozwinięcie Fouriera zbieżne w sensie jednorodnym

$$\lim_{N\to\infty} \int \left| g(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x)) \right|^2 dx = 0$$

o ile *g(x)* 1) całkowalna w kwadracie
2) odcinkowo ciągła $\longrightarrow$ rozwinięcie Fouriera dąży do g(x) „prawie wszędzie" tzn poza punktami dyskretnymi punktami (rozwinięcie Fouriera jest wszędzie ciągłe!)

Twierdzenie Dirichleta: W punktach nieciągłości szereg Fouriera zbieżny do g(x)=[g(x-0)+g(x+0)] / 2

Okazuje się, że tw. Dirichleta nie rozwiązuje wszystkich problemów dla struny: pewien praktyczny problem z *kanciastymi* (nieróżniczkowalnymi) warunkami początkowymi.



Fala prostokątna

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x)\right)$$

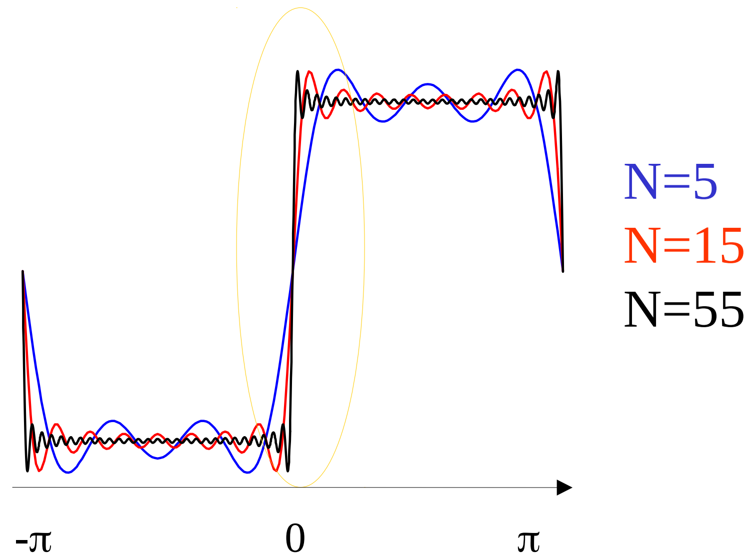
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(\omega_n x) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(\omega_n x) dx = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} \text{ dla } n \text{ nieparzystego} \\ 0 \text{ dla } n \text{ parzystego} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots \right)$$

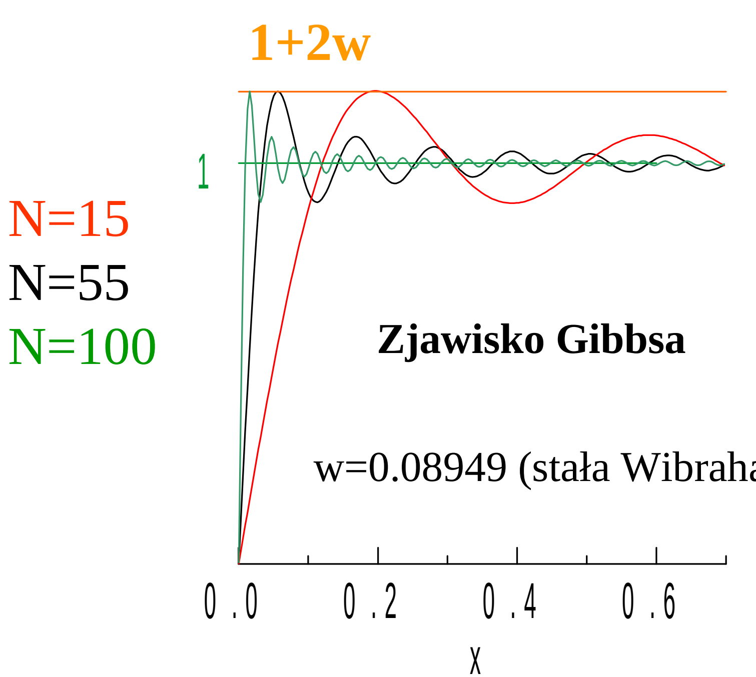
W punkcie nieciągłości = [g(0-)+g(0+)]/2 = (-1 + 1) / 2 =0

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$$



Nad nieciągłością wartość schodka
przestrzelona o około 18%

-



w=0.08949 (stała Wibrahama-Gibbsa)

Na PC pracujemy ze skończonymi bazami:

Równania różniczkowego przez rozkład
warunku początkowego na drgania własne
nie rozwiążemy dokładnie, jeśli
ten jest nieciągły.

Na PC pracujemy ze skończonymi bazami...

Zbieżność szeregu Fouriera w sensie bezwzględnym

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(o_n x) + b_n \sin(o_n x) \right)$$

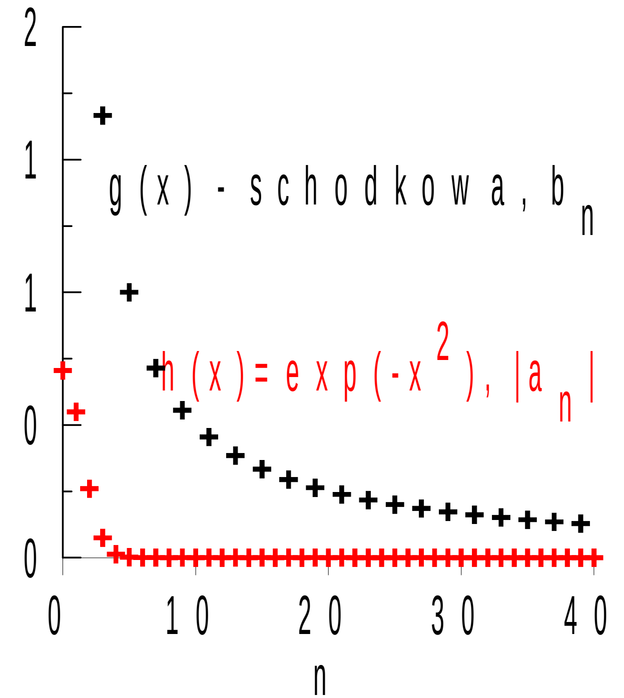
Szereg jest bezwzględnie zbieżny jeśli można go *obciąć* na pewnym wyrazie rozwinięcia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < \infty$$

Rozwinięcie fali prostokątnej nie jest bezwzględnie zbieżne:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{2n+1} = \infty$$

Bo *ogólny szereg harmoniczny* jest rozbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$



Wniosek: w skończonej bazie funkcji własnych możemy rozwiązywać tylko problemy z warunkiem początkowym, którego rozwinięcie w szereg Fouriera jest bezwzględnie zbieżne

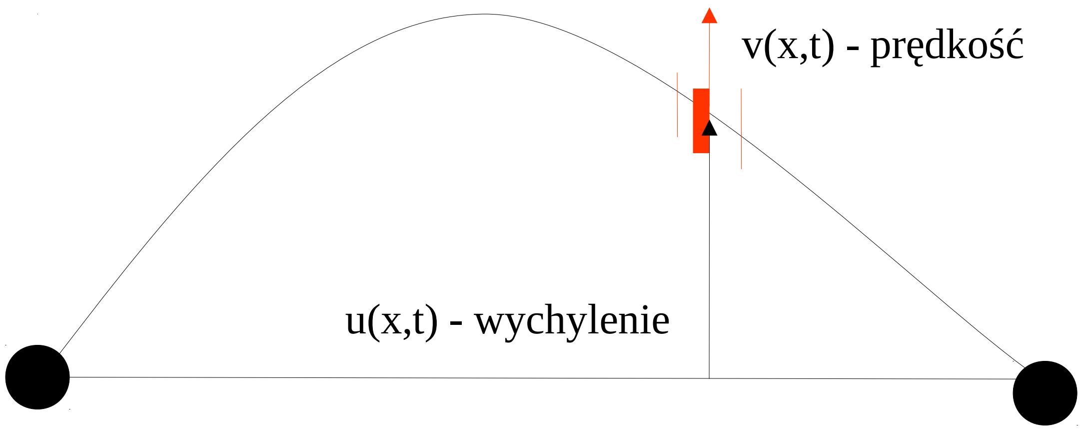
Metoda różnic skończonych = uwalnia nas od problemu rozkładu na drgania własne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Rozwiązanie numeryczne: dzielimy strunę na N fragmentów,
dla każdego z nich rozwiązujemy równania Newtona
(zabieg odwrotny do wyprowadzenia równania różniczkowego)

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

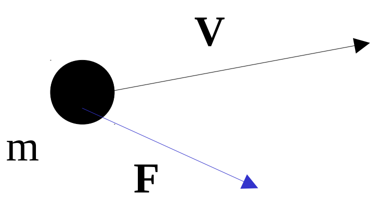
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$



z równania falowego:

$$a(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) + u(x-\Delta x,t) - 2u(x,t)}{\Delta x^2}$$

Schemat Verleta (popularny dla symulacji dynamiki molekularnej)



$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

Schemat Verleta
Phys. Rev. **159**, 98 (1967)

Pomysł: rozwinąć położenie **r** w chwili *t+Δt* i *t-Δt* w szereg Taylora

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t) + \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t-\Delta t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3\mathbf{r}(t)}{dt^3}\Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t-\Delta t) + \mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

tylko o jeden rząd mniej dokładny niż RK4

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = 2\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t-\Delta t) + \mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^4)$$

Schemat położeniowy Verleta

Jeśli chodzi nam tylko o tor ruchu: świetny schemat.
Nie używa *prędkości*, ale ta często potrzebna potrzebna:
np do wyliczenia energii, ale również : sił (np. oporu, Lorentza)

jeśli siły niezależne od prędkości, a informacja o nich potrzebna jest do innych celów
można - wykonać krok do t+Δt, a potem

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t-\Delta t)}{2\Delta t} + O(\Delta t^2)$$

rząd błędu wyższy,
wciąż dokładnie dla ruchu
jednostajnie przyspieszonego
a stałe między t a Δt

jeśli siły zależą od prędkości: nie wykonamy kroku do t+Δt, możemy co najwyżej:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t-\Delta t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

kiepsko: wynik dokładny tylko dla a=0

prędkościowa wersja schematu Verleta
(dający prędkości jednocześnie z położeniami)

Położenia – poświęcamy jeden rząd dokładności:

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{V}(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Potrzebny przepis na prędkość w chwili t + Δt z błędem $O(\Delta t^2)$:

Rozwinąć **r** w Taylora względem punktu t+ Δt:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{V}(t+\Delta t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t+\Delta t)\Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

Dodać stronami:

$$\mathbf{V}(t+\Delta t) = \mathbf{V}(t) + \frac{\Delta t}{2}(\mathbf{a}(t+\Delta t) + \mathbf{a}(t)) + O(\Delta t^2)$$

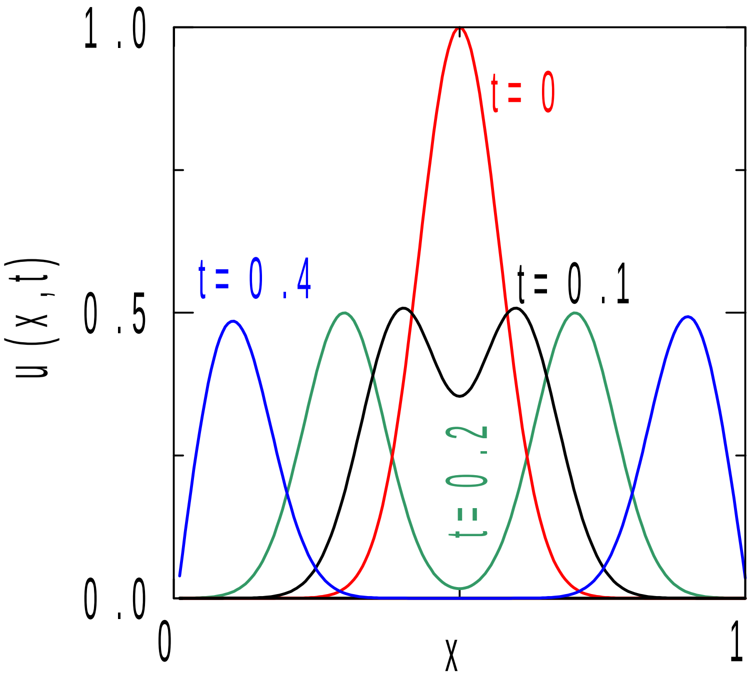
Wzory podkreślone na czerwono – Verlet prędkościowy.

Rozwiązania numeryczne 1. (laboratorium)

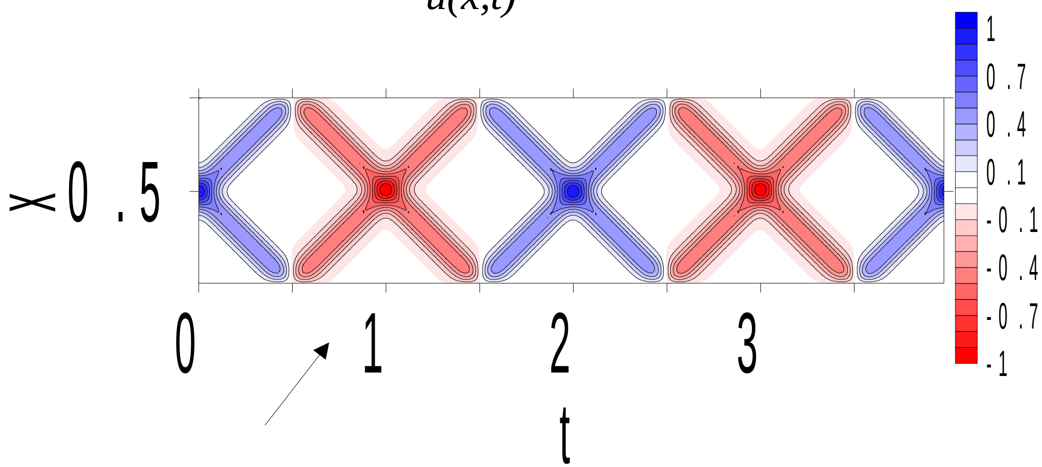
L=1

***u*(x,t=0)=exp[-100(x-0.5)²]**

***v*(x,t=0)=0**

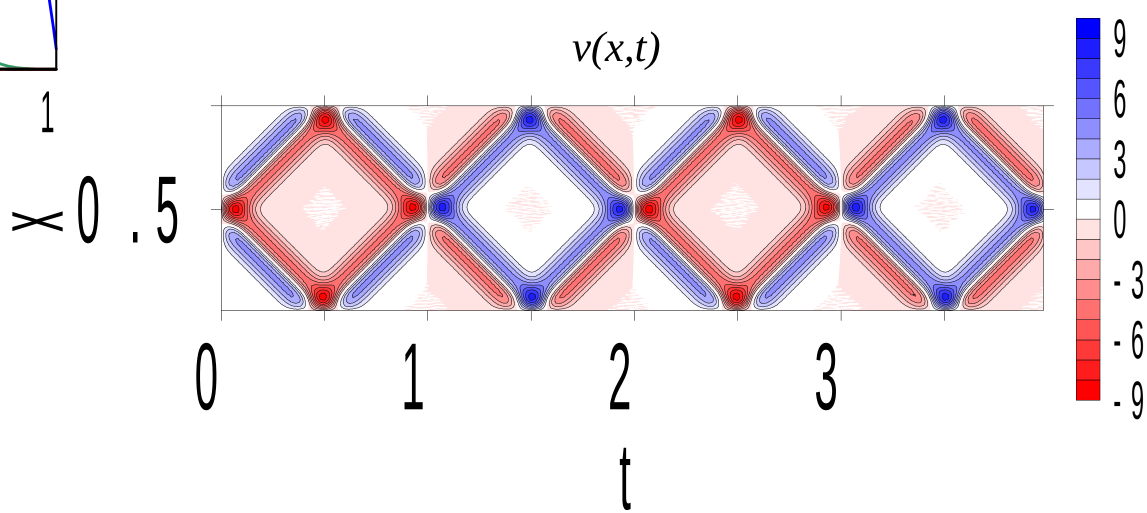


u(x,t)

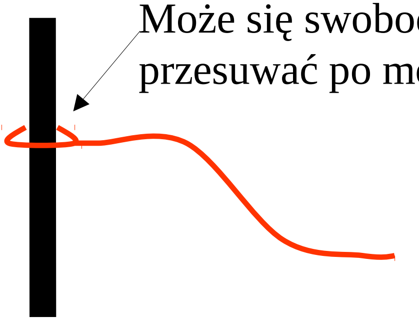


Odbicie ze zmianą
fazy (idzie górą , wraca dołem)

v(x,t)



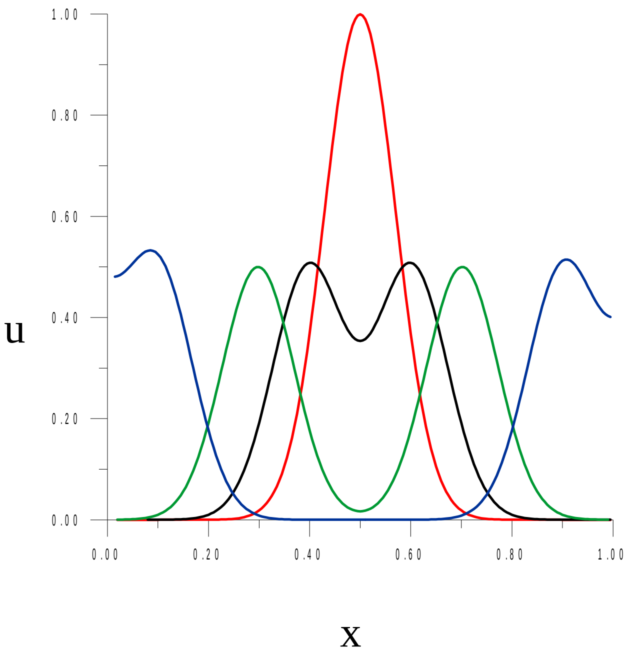
Rozwiązanie numeryczne 2.



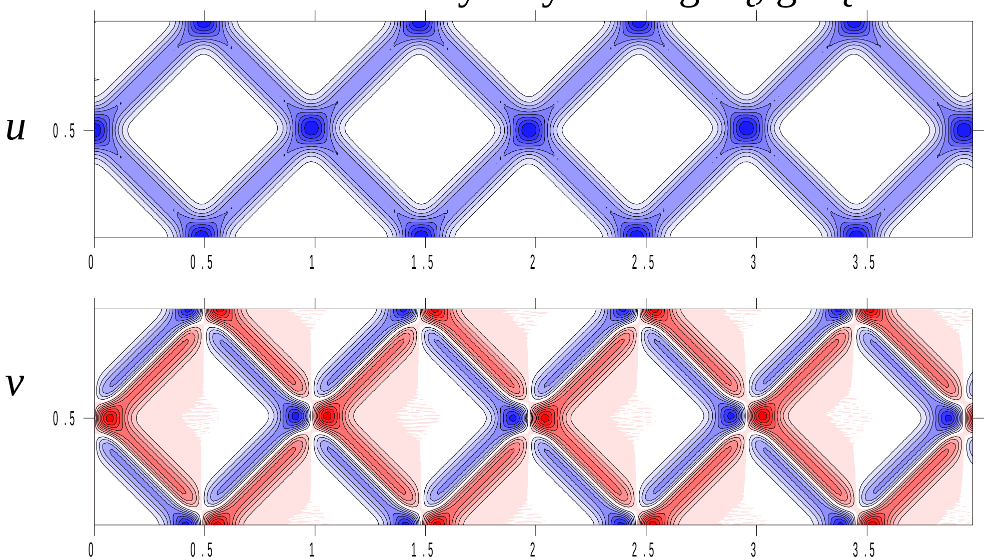
Swobodne warunki brzegowe:
na brzegach na strunę nie działa żadna siła pionowa:

Warunek brzegowy Neumana (na pochodną) zamiast Dirichleta (na wartość funkcji)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x=0,t)} = 0$$



Odbicie bez zmiany fazy: idzie górą, górą wraca



energia drgania:

$$dE = \frac{1}{2}\rho(x)dxv^2(x,t) + \frac{1}{2}T_0 dx\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

kinetyczna

Potencjalna: odkształcenie struny

Dla ρ(x)=ρ

$$E = \frac{1}{2}\rho\int_0^L v^2(x,t)dx + \frac{1}{2}T_0\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

Dla pojedynczego modu własnego $u(x,t) = \sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$

$$E = \frac{\omega_n^2}{2}\rho\cos^2(\omega_n t)\int_0^L \sin^2(k_n x)dx + \frac{k_n^2}{2}T_0\sin^2(\omega_n t)\int_0^L \cos^2(k_n x)dx$$

$$E = \frac{\omega_n^2}{2}\rho\cos^2(\omega_n t)\frac{L}{2} + \frac{k_n^2}{2}T_0\sin^2(\omega_n t)\frac{L}{2}$$

ω=kc
$T_0=\rho c^2$

$$E = \frac{L}{4}(kc)^2\rho\left(\cos^2(\omega_n t) + \sin^2(\omega_n t)\right)$$

Kinetyczna na potencjalną się zmienia, całkowita zachowana

Analiza chwilowa drgania

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t)$$

1) Można prześledzić zależności *czasowe* i z nich wydobyć częstości własne
2) Co jeśli drgania są np. gasnące? Jeśli sens ma tylko częstość przestrzenna, a nie czasowa?
3) Analiza chwilowa drgania na podstawie wychylenia zależności położeniowych = wychylenia g(x) i prędkości h(x) w *danej chwili*.

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin(k_n x)dx$$

$$s_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L h(x)\sin(k_n x)dx$$

Równanie fali tłumionej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \underline{2a\frac{du}{dt}}$$

$a > 0$ = stała tłumienia
c niezależna od położenia

Opory związane z prędkością struny [np. powietrza]

Warunki brzegowe $u(x=0,t)=u(x=L,t)=0$
Warunki początkowe $u(x,t)$ oraz $v(x,t)$.

Mody normalne dla fali tłumionej:
Poszukajmy rozwiązania metodą separacji zmiennych $u(x,t)=X(x)T(t)$

$$XT'' = c^2 X''T - 2aT'X / : XT$$

$$\frac{T''}{T} + \frac{2aT'}{T} = \boxed{\frac{c^2 X''}{X} = -\omega^2}$$

Część przestrzenna bez zmian!

$X_n(x)=\sin(k_n x)$

$k_n=n\pi\ /L$

$k=\omega\ /c$

Część przestrzenna: $$\frac{T''}{T} + \frac{2aT'}{T} = -\omega_n^2 = -\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2$$

$$T'' + 2aT' + \omega_n^2 T = 0$$

rozwiązujemy dla *T=exp(rt)*, równanie charakterystyczne: *exp(rt) [r^2+2ar+w_n^2] = 0* ,
szukamy rozwiązań na *r*
możliwe przypadki: 2 pierwiastki rzeczywiste, jeden podwójny, obydwa zespolone

Warunki początkowe: $T'(t=0) = 0$ Struna spoczywa w chwili początkowej

$T(t=0) = 1$ Rozwiązanie określone co do stałej multiplikatywnej (równanie jednorodne)

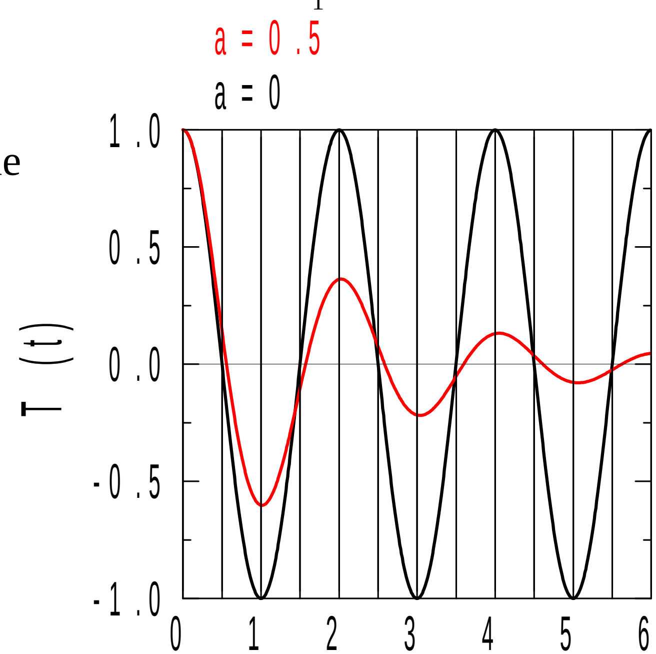
$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a: & \exp(-at)\left[\cosh\left(\sqrt{a^2-\omega_n^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2-\omega_n^2}}\sinh\left(\sqrt{a^2-\omega_n^2}t\right)\right] \\ \omega_n = a: & \exp(-at)\left[1+at\right] \\ \omega_n > a: & \exp(-at)\left[\cos\left(\sqrt{\omega_n^2-a^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2-a^2}}\sin\left(\sqrt{\omega_n^2-a^2}t\right)\right] \end{cases}$$

$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a: & \exp(-at)\left[\cosh\left(\sqrt{a^2-\omega_n^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2-\omega_n^2}}\sinh\left(\sqrt{a^2-\omega_n^2}t\right)\right] \\ \omega_n = a: & \exp(-at)\left[1+at\right] \\ \omega_n > a: & \exp(-at)\left[\cos\left(\sqrt{\omega_n^2-a^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2-a^2}}\sin\left(\sqrt{\omega_n^2-a^2}t\right)\right] \end{cases}$$

$\omega_n = nc\pi\ /\ L$ L=1, c=1, $\omega_n = n\pi$

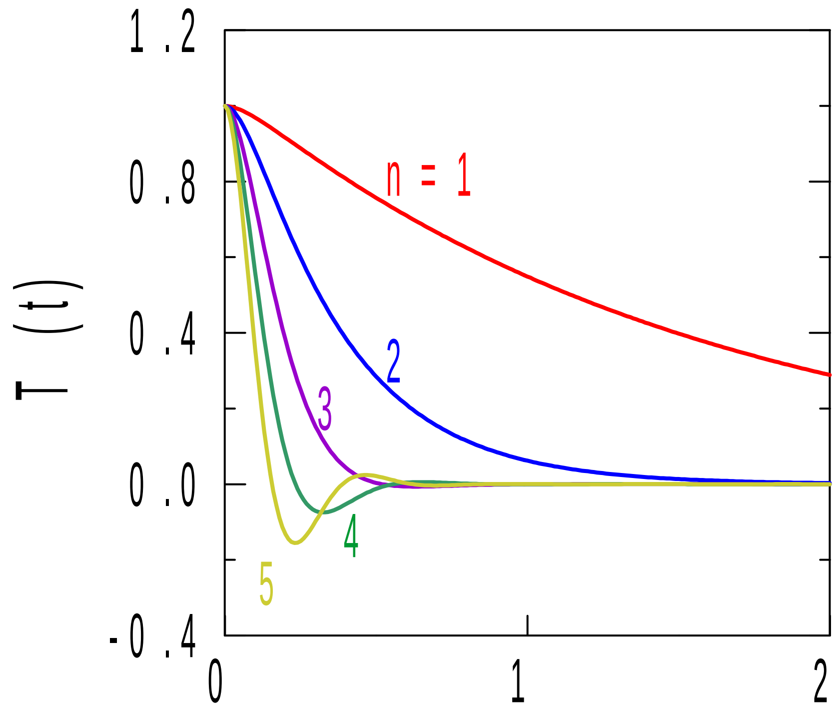
Słabe tłumienie $a<\omega_1$

Drganie z ω_1



Poza zanikiem drgania
widzimy zmniejszenie częstości

a=8, *ω1* i *ω2* = „przetłumione”
pozostałe „tłumione”



Najpierw zgasną wyższe tłumienia

Rozwiązanie równania fali tłumionej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a\frac{du}{dt}$$

rozwiązanie ogólne:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T_n(t) \sin(k_n x)$$

Położeniowa analiza Fourierowska

- rozkład na mody normalne *w danej chwili* : $c_n(t)$

= część przestrzenna nie zmienia się pod wpływem tłumienia.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

$$v(x,t) = -\omega_n \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$$

w ogólności
zależne od czasu

$$\longrightarrow$$

$$\int_0^L u(x,t) \sin(k_n x) dx = c_n \frac{L}{2} \cos(\omega_n t)$$

$$\int_0^L v(x,t) \sin(k_n x) dx = -\omega_n c_n \frac{L}{2} \sin(\omega_n t)$$

aby wydobyć cn : drugie równanie
wydzielimy przez wn, podniesiemy
w kwadracie i dodamy

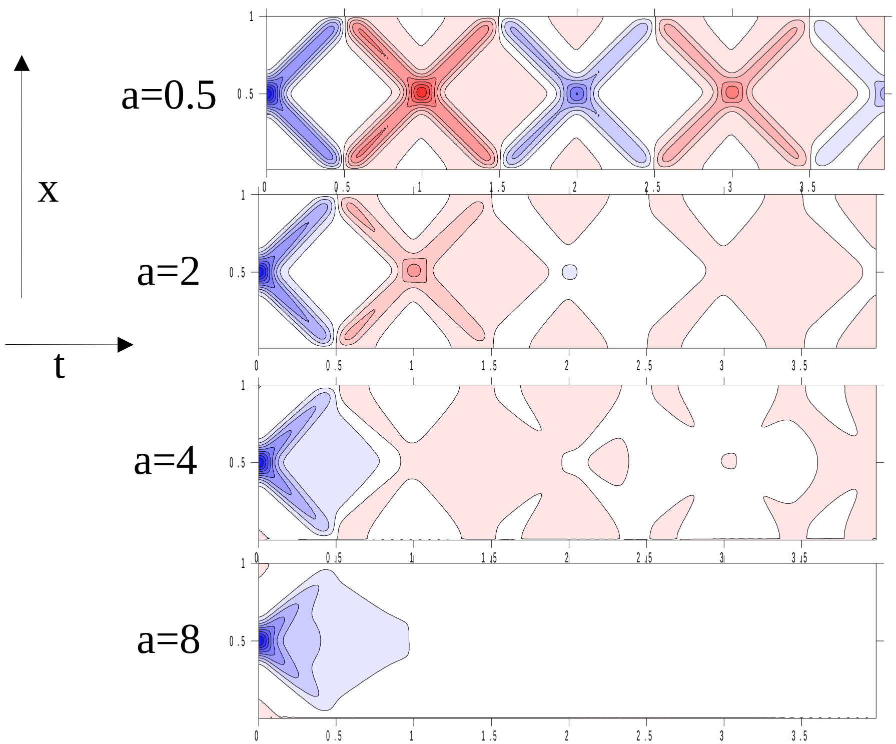
$$c_n^2 = \left(\frac{2}{L} \int_0^L u(x,t) \sin(k_n x) dx \right)^2 + \left(\frac{2}{L\omega_n} \int_0^L v(x,t) \sin(k_n x) dx \right)^2$$

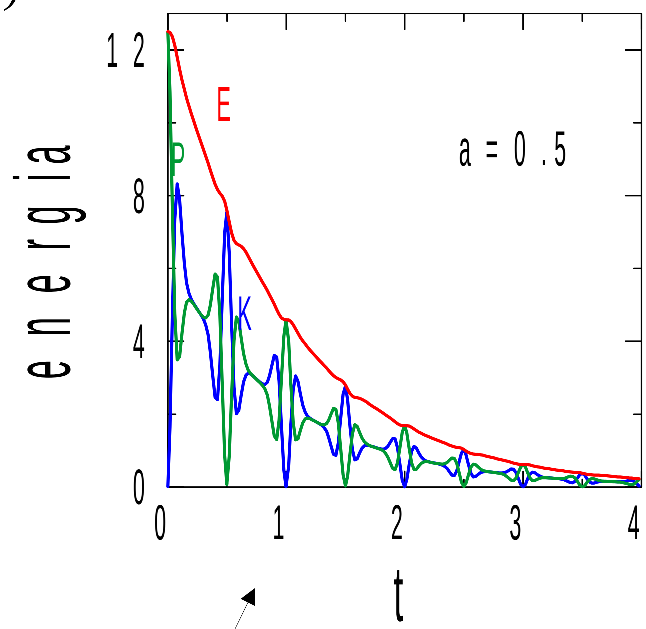
udział względny: $$r_n^2 = \frac{c_n^2}{\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2}$$

Przykład: L=1

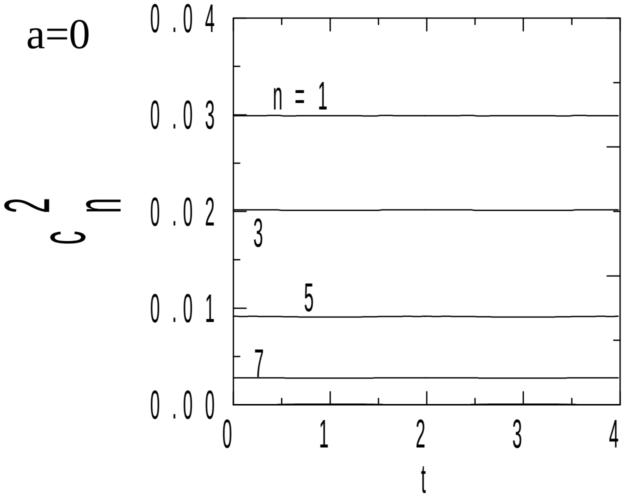
W chwili początkowej pakiet *f(x,t=0)=exp(-100(x-0.5)²)*

E=K+P (kinetyczna+potencjalna)





Spadek *E* najszybszy gdy *K* największe a=0

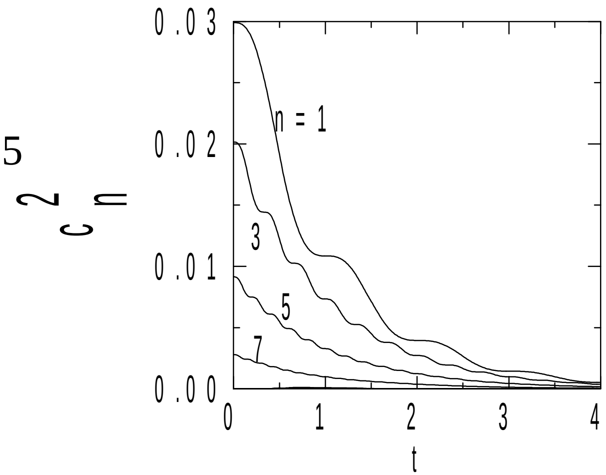


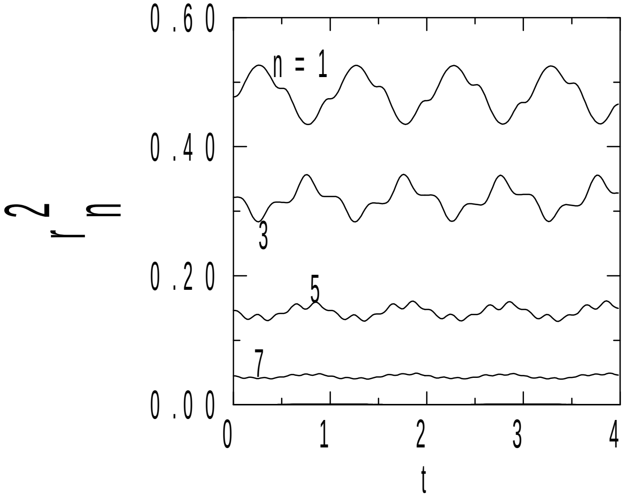
$$T_n(t) = \begin{cases} \omega_n < a: & \exp(-at)\left[\cosh\left(\sqrt{a^2-\omega_n^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{a^2-\omega_n^2}}\sinh\left(\sqrt{a^2-\omega_n^2}t\right)\right] \\ \omega_n = a: & \exp(-at)\left[1+at\right] \\ \omega_n > a: & \exp(-at)\left[\cos\left(\sqrt{\omega_n^2-a^2}t\right) + \frac{a}{\sqrt{\omega_n^2-a^2}}\sin\left(\sqrt{\omega_n^2-a^2}t\right)\right] \end{cases}$$

$$\omega_n = n\pi$$

Parzyste *n* nie wnoszą przyczynku (symetria)

a=0.5

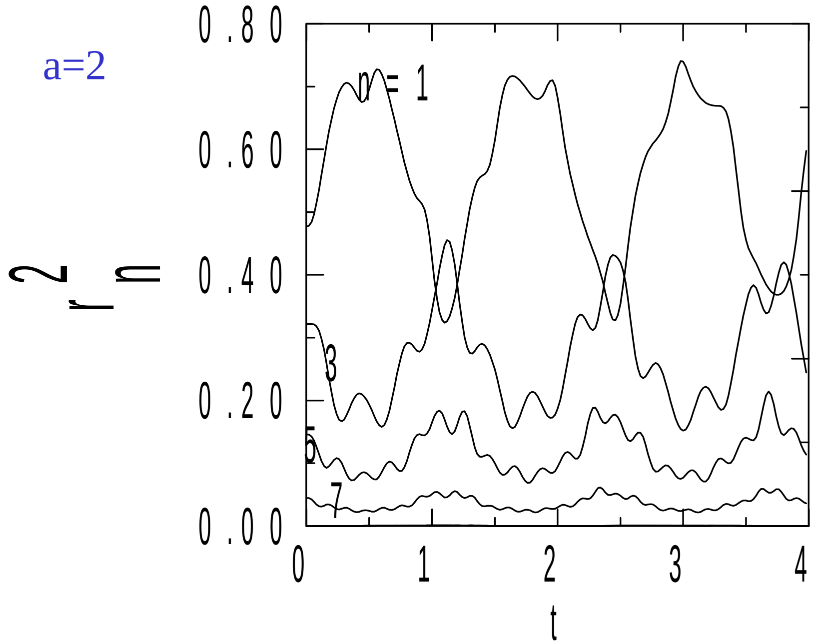




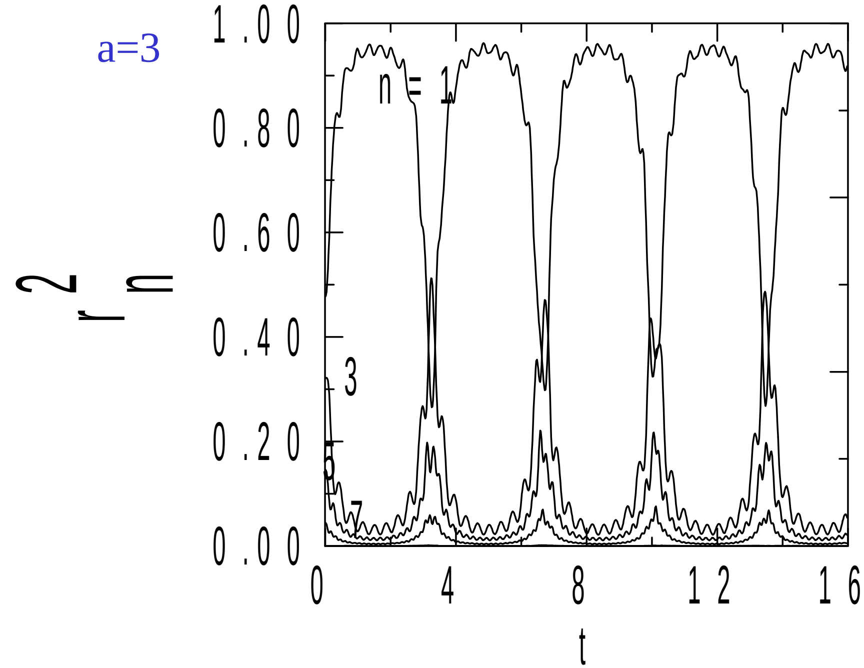
Wszystkie mody tłumione równie silnie

oscylujący udział modów normalnych

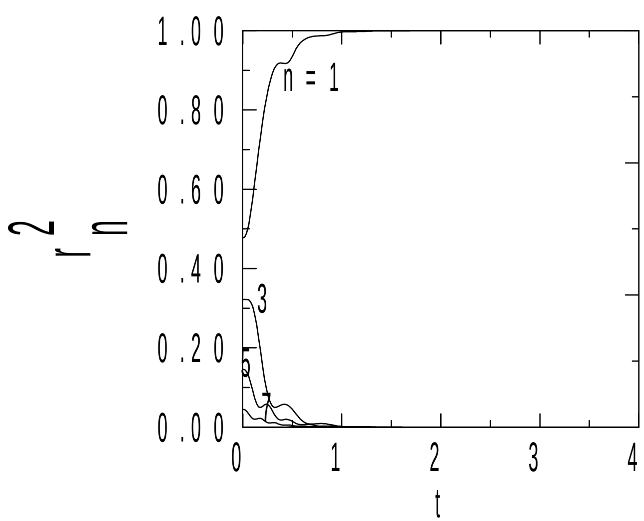
im wyższe ω_n tym bardziej stały względny udział a=2



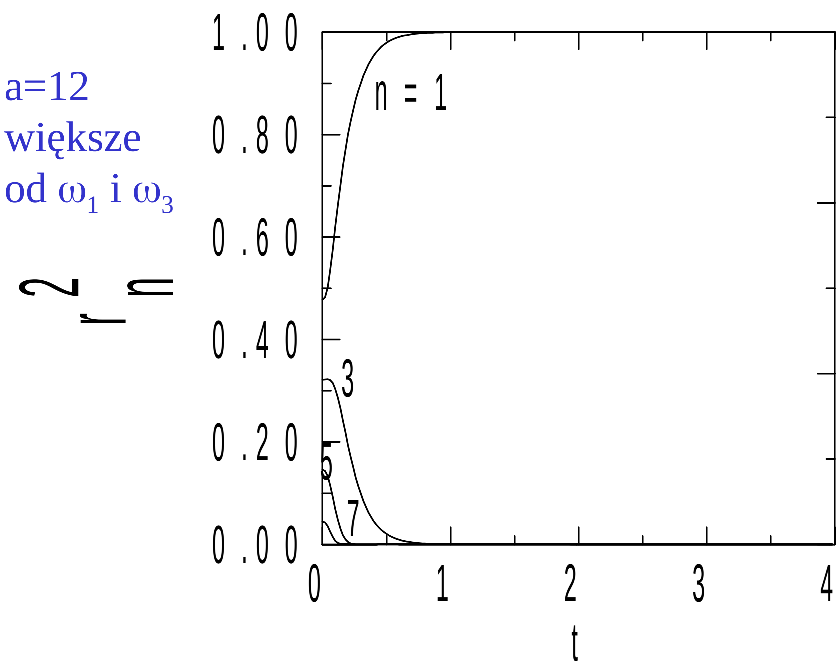
a=3



a=4, większe tylko od ω_1

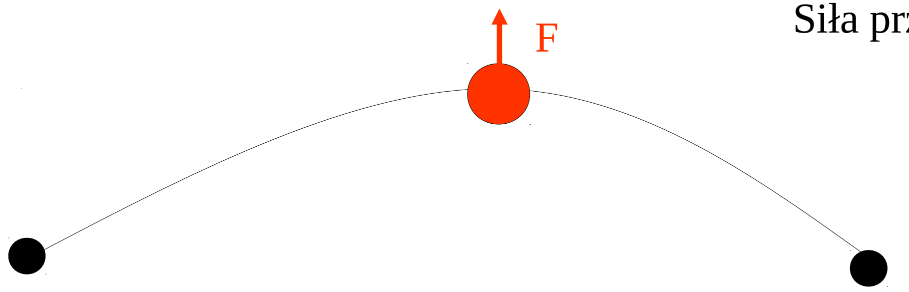


a=12
większe
od ω_1 i ω_3



Laboratorium: R. hiperboliczne z niejednorodnością:
Drgania tłumione z siłą wymuszającą

Siła przyłożona punktowo



$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2a\frac{\partial u}{\partial t} + a_F(x,t)$$

niejednorodność

$$a_F(x,t) = \begin{cases} \cos(wt) \text{ dla } x = x_0 \\ 0 \text{ w pozostałych punktach} \end{cases}$$

Wymuszenie periodycznie zmienne

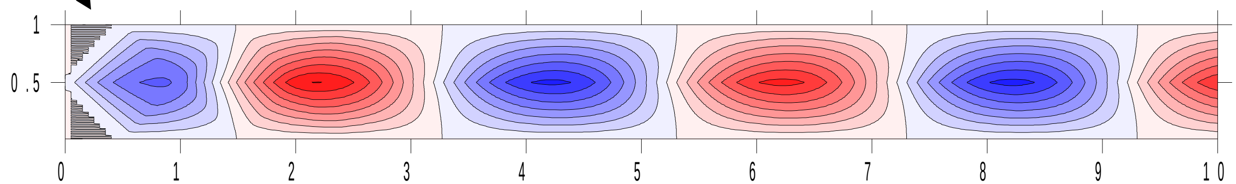
Dla t=0 struna spoczywa (*v(x,t)*=0)w położeniu równowagi (*u(x,t)=0*)

Prędkość dźwięku = 1

Siła przyłożona w środku struny x_0=1/2

u(x,t)

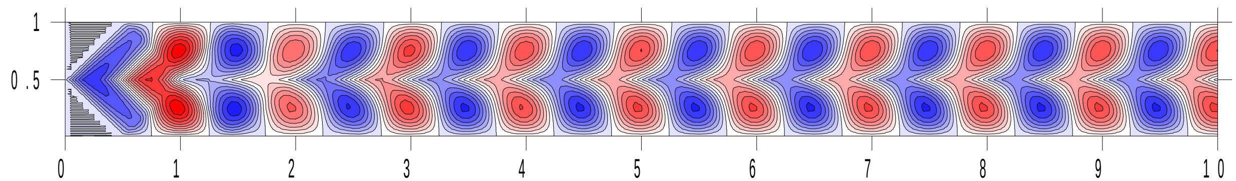
a=1
w=0.5π



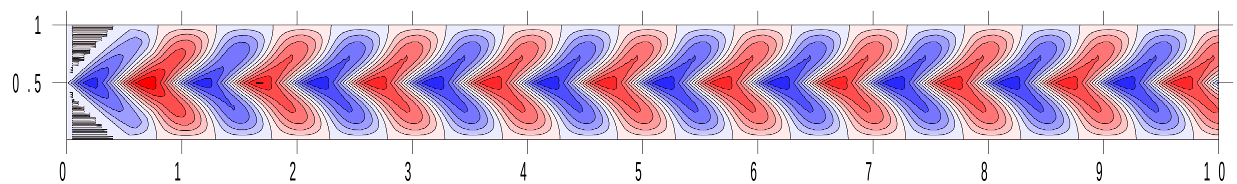
pojawia się „stan ustalony” = drgania periodyczne.

a=1
w=2π

x



a=3
w=2π



czas

W stanie ustalonym ruch jest periodyczny z okresem
siły wymuszającej *(mode locking*).

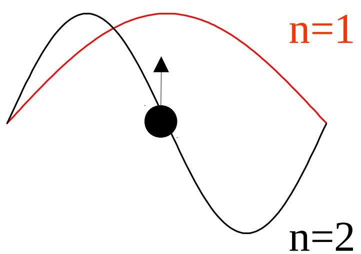
Stan ustalony a energia struny

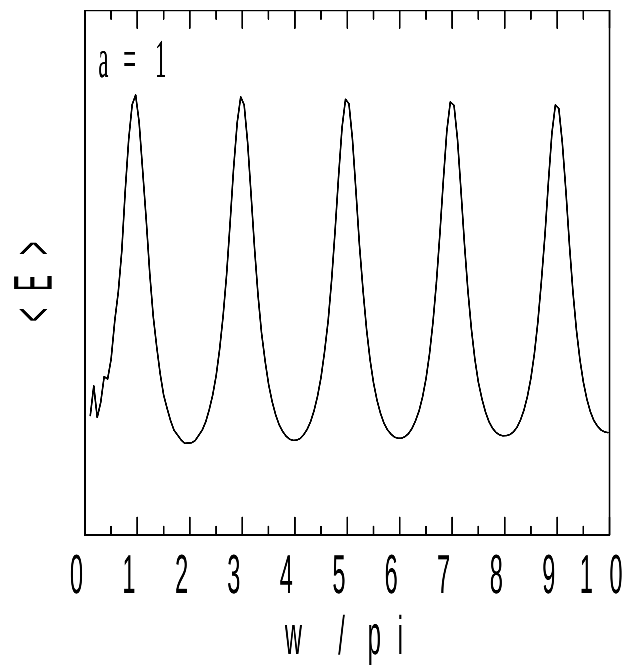
Średnia energia w stanie ustalonym:

$$< E >= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t) dt.$$

Siła przyłożona w środku struny x_0=1/2

Rezonans

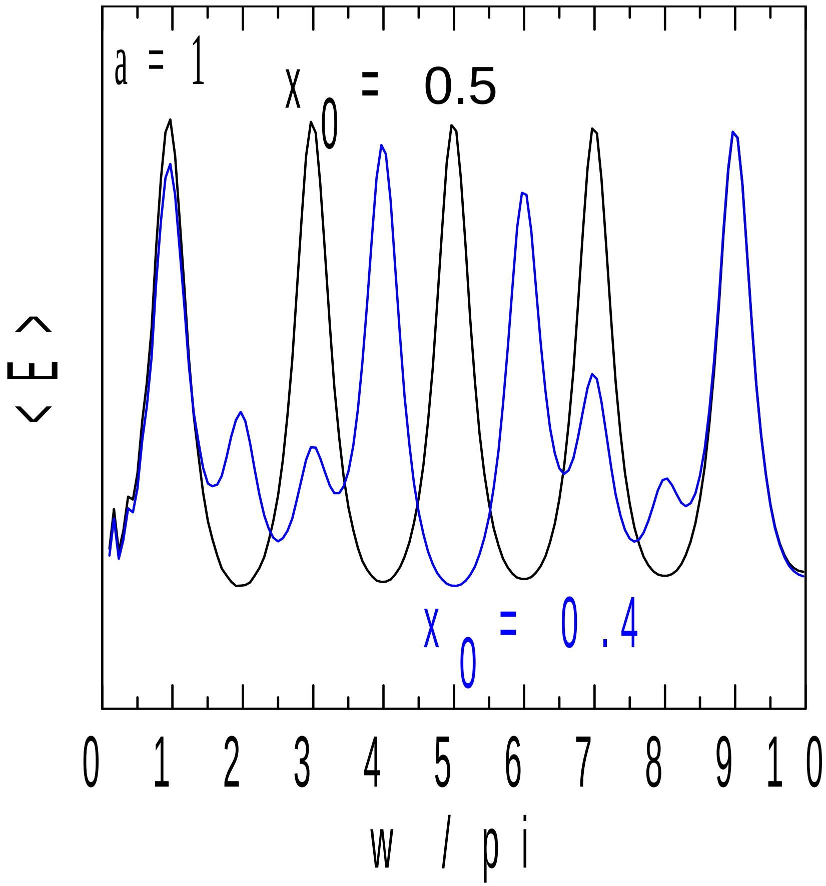


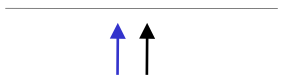


Brakuje w_{2n} ??

W środku studni = węzeł dla parzystych n

Mody z parzystym n wzbudzone gdy punkt przyłożenia przesunąć ze środka





Krzywa rezonansowa w przybliżeniu opisana przez sumę funkcji Lorentza

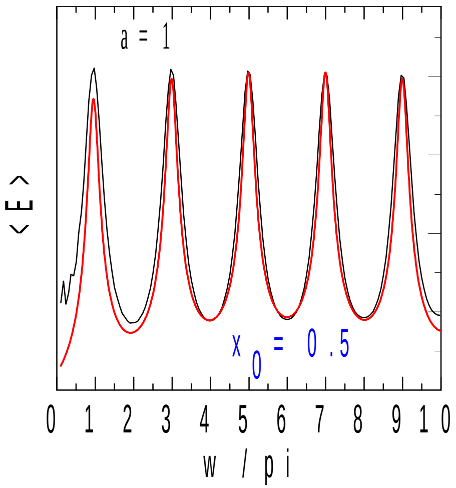
$$s(w) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i^2}{(w - w_i)^2 + (a/2)^2}$$

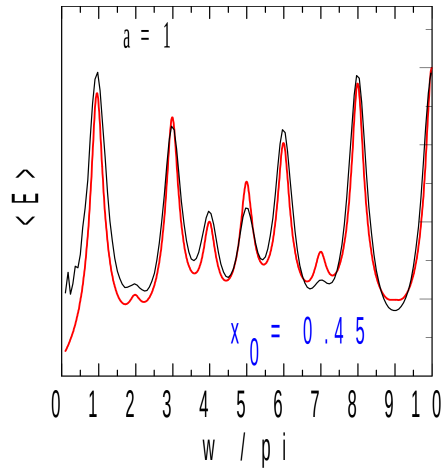
$$w_i = \sqrt{\omega_i^2 - a^2}$$

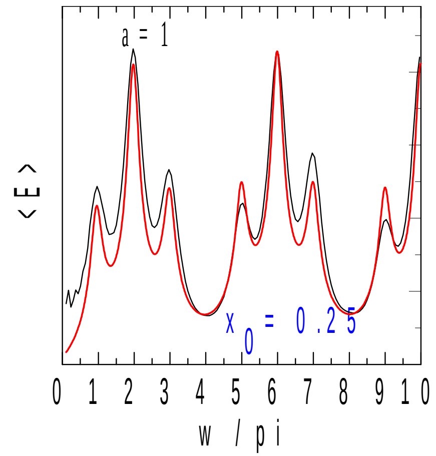
Siła sprzężenia = kwadrat wartości modu normalnego w miejscu przyłożenia siły:

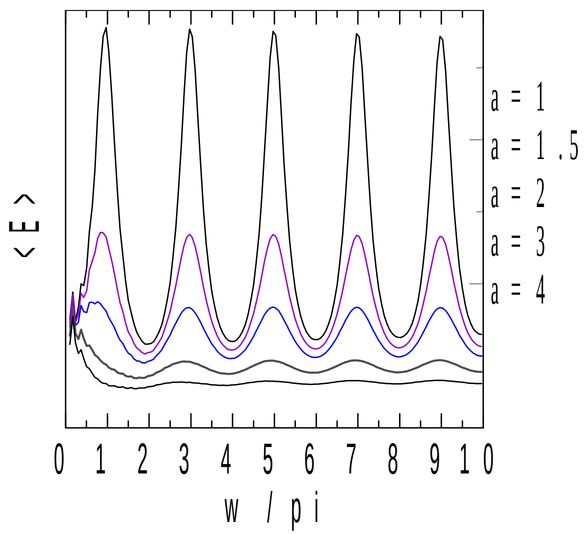
$$c_i^2 = \sin^2(i\pi x_0)$$

Średnie energie stanu ustalonego a wzory lorentowskie









Rezonans a stała tłumienia

Laboratorium 2: odbicie pakietu od granicy ośrodków

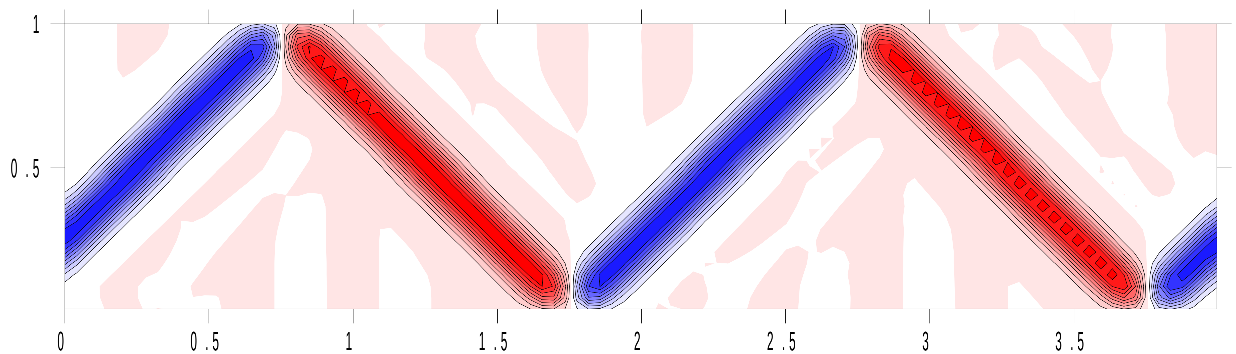
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \rho(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x < \frac{1}{2} \\ \rho_0 \text{ dla } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$u(x - Vt) = \exp(-100(x - Vt - 1/4)^2)$$

V=1

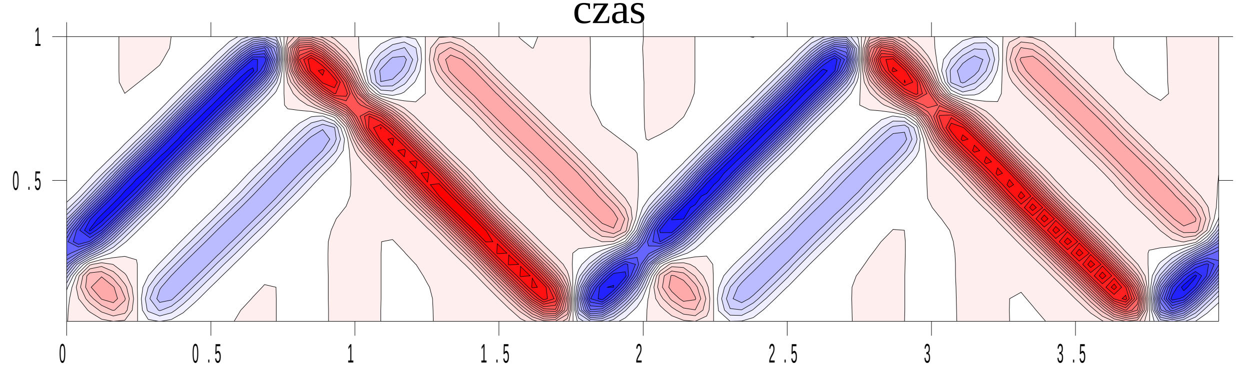
ρ_0=1

położenie



czas

V=2



V=1

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x < \frac{1}{2} \\ \rho_0 \text{ dla } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

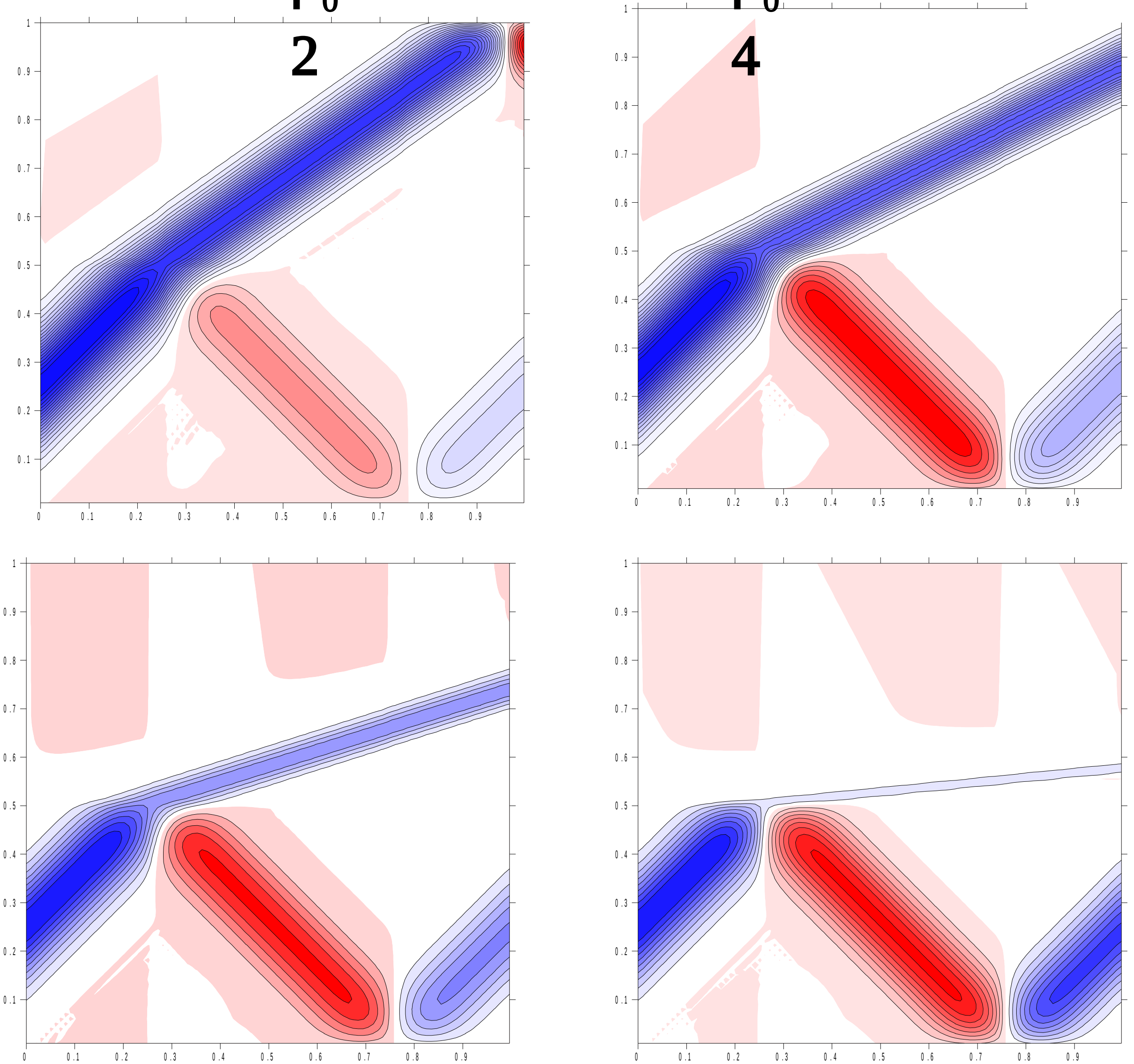
$\rho_0 = 2$

$\rho_0 = 4$

położenie

$\rho_0 = 10$

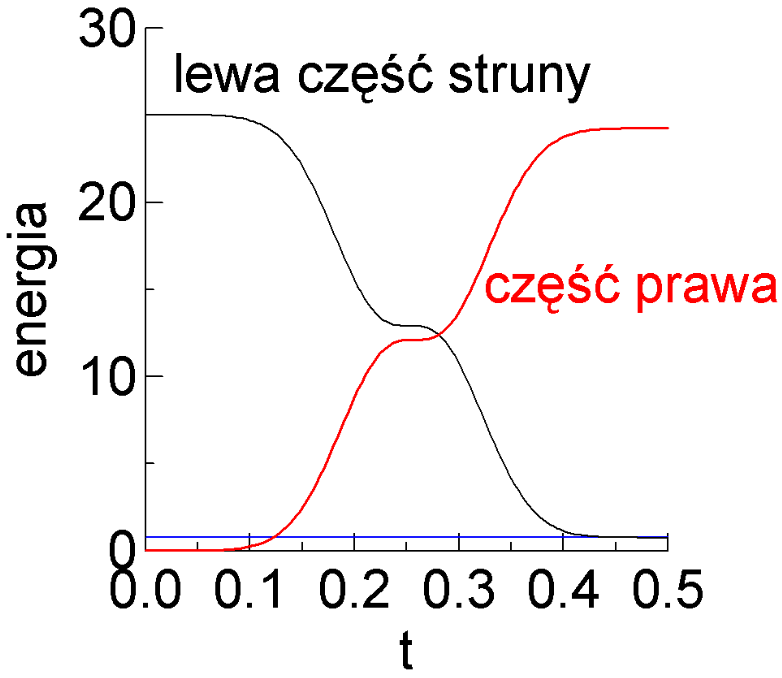
$\rho_0 = 100$



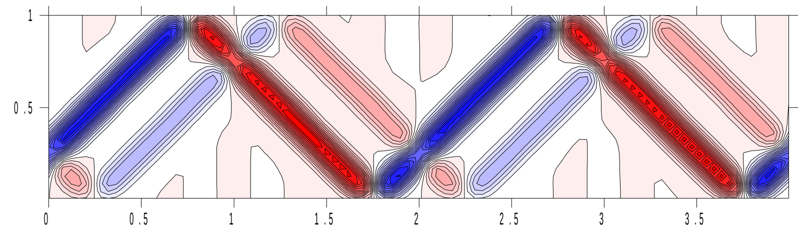
Część energii, która
pozostaje po lżejszej stronie struny $\rho=1$
po odbiciu

$$\left(\frac{1-\sqrt{\rho_0}}{1+\sqrt{\rho_0}}\right)^2$$

ρ_0=
2



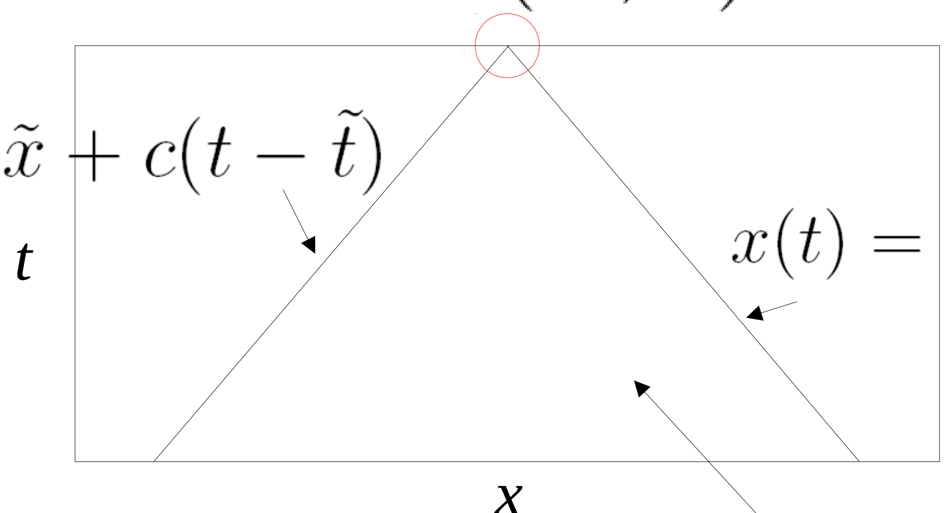
Domena zależności (Domain of Dependence)
i kryterium stabilności CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)



$$P(\tilde{x},\tilde{t})$$

$$x(t)=\tilde{x}+c(t-\tilde{t})$$

$$x(t)=\tilde{x}-c(t-\tilde{t})$$



domena zależności:
tylko zdarzenia z trójkąta ograniczonego
charakterystykami mogą
mieć wpływ na rozwiązanie w punkcie *P*

kryterium stabilności CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)

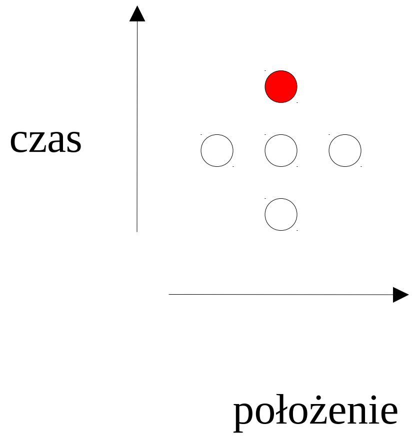
Numeryczna domena zależności
[NUMERYCZNA PRZESZŁOŚĆ]

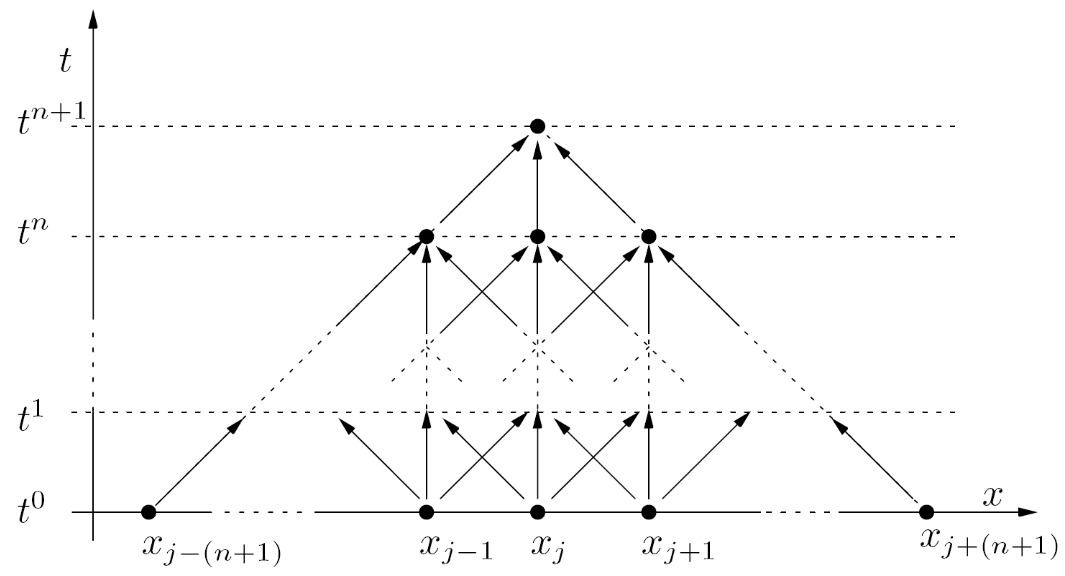
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

schemat żabiego skoku:

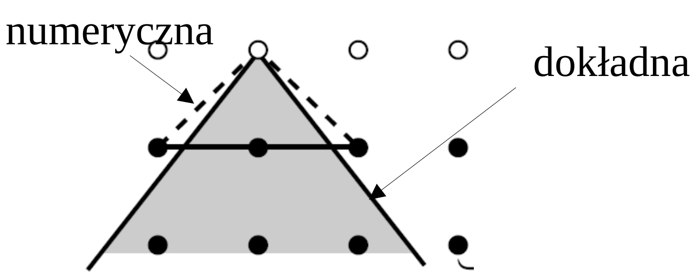
$$\frac{u(j,n+1)+u(j,n-1)-2u(j,n)}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u(j+1,n)+u(j-1,n)-2u(j,n)}{\Delta x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

$$u(j,n+1) = c^2 \Delta t^2 \frac{u(j+1,n)+u(j-1,n)-2u(j,n)}{\Delta x^2} - u(j,n-1) + 2u(j,n) + O(\Delta t^4, \Delta x^2)$$





$$u(j,n+1) = c^2\Delta t^2 \frac{u(j+1,n)+u(j-1,n)-2u(j,n)}{\Delta x^2} - u(j,n-1) + 2u(j,n) + O(\Delta t^4, \Delta x^2)$$

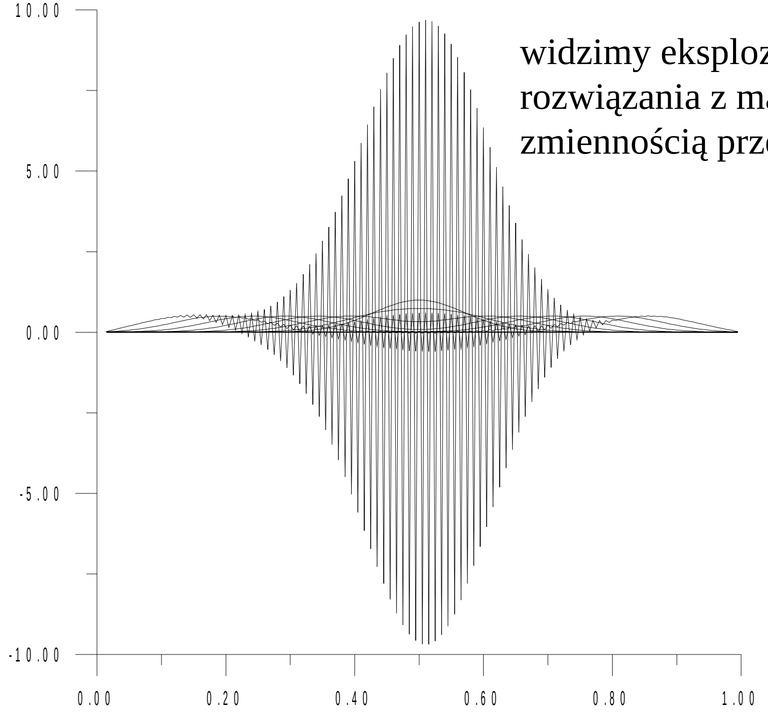


$$cdt \leq dx$$

aby przekroczyć kryterium CFL (prędkość dźwięku): schematy niejawne dla równań mechaniki
standardowy schemat niejawny = schemat Newmarka

dla dt=dx
najlepszy wybór
$\beta=0, \ \gamma=1/2$
(jawny, Verlet)

Verlet
dla dt=dx*1.01



widzimy eksplozję rozwiązania z maksymalną zmiennością przestrzenną:

Newmark jest po to aby przekroczyć kryterium CFL algorytm Newmarka (uogólnienie prędkościowego Verleta, o szerszym zastosowaniu, nie tylko dynamika molekularna, ale standardowy niejawny dla równań mechaniki)

w Verlecie prędkościowym używaliśmy przepisów:

[dla Verleta γ=1/2]

$$u(t+dt)=u(t)+v(t)dt+dt^2/2\ a(t)$$

$$\boxed{v(t+dt)=v(t)+dt\ [(1-\gamma)a(t)+\gamma a(t+dt)]}$$

Czyli: w Verlecie: jawna formuła na położenie, potencjalnie niejawna na prędkość
ta nie wystarczy dla bezwzględnej stabilności przy kroku czasowym cdt>dx (zobaczymy analizą v.Neumanna)

dla Newmarka: wprowadzamy niejawność (ważenie przyspieszeń z teraźniejszości i przyszłości) również do wzoru na położenia:

$$\boxed{u(t+dt)=u(t)+v(t)dt+dt^2/2\ [(1-2\beta)a(t)+2\beta a(t+dt)]}$$

Algorytm prędkościowy Newmarka

źródło: WJT DANIEL, computational mechanics **20** (1997) 272

zróbmy z tego formułę położeniową:
wyeliminować prędkości :

$$u(t+dt)=u(t)+v(t)dt+dt^2/2\,[(1-2\beta)a(t)+2\beta a(t+dt)]$$

(*)

$$v(t+dt)=v(t)+dt\,[(1-\gamma)a(t)+\gamma a(t+dt)]$$

dla kroku poprzedniego=

$$u(t)=u(t-dt)+v(t-dt)dt+dt^2/2\,[(1-2\beta)a(t-dt)+2\beta a(t)]$$

dla kroku poprzedniego =

$$v(t)=v(t-dt)+dt\,[(1-\gamma)a(t-dt)+\gamma a(t)]$$

$$u(t)=u(t-dt)+v(t)dt+dt^2/2\,[(1-2\beta)a(t-dt)+2\beta a(t)]-dt^2[(1-\gamma)a(t-dt)+\gamma a(t)]$$

$$u(t)=u(t-dt)+v(t)dt+dt^2/2\,[(2\gamma-2\beta-1)a(t-dt)+(2\beta-2\gamma)a(t)]$$

$$u(t-dt)=u(t)-v(t)dt-dt^2/2\,[(2\gamma-2\beta-1)a(t-dt)+(2\beta-2\gamma)a(t)] \quad (*)$$

dodamy stronami gwiazdki

$$u(t+dt)=u(t)+v(t)dt+dt^2/2\ [(1-2\beta)a(t)+2\beta a(t+dt)]$$

+ stronami

$$u(t-dt)=u(t)-v(t)dt+dt^2/2\ [(-2\gamma+2\beta+1)a(t-dt)+(2\gamma-2\beta)a(t)]$$

skasujemy prędkość

$$u(t-dt)+u(t+dt)=2u(t)\ +dt^2/2[2\beta a(t+dt)+(1-4\beta+2\gamma)a(t)+(-2\gamma+2\beta+1)a(t-dt)]$$

$$u(t+dt)=2u(t)\ -u(t-dt)+dt^2[\beta a(t+dt)+(1/2-2\beta+\gamma)a(t)+(-\gamma+\beta+1/2)a(t-dt)]$$

algorytm Newmark = wersja położeniowa, dwa parametry γ,β

dla porównania Verlet położeniowy

$$u(t+dt) = dt^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2u(t) - u(t-dt)$$

wagi przy przyspieszeniu: $\beta+1/2-2\beta+\gamma-\gamma+\beta+1/2=1$
(wszystkie wybory dają schemat, który w granicy małego dt redukuje się do Verleta)
Newmark sprowadza się do Verleta gdy $\gamma=1/2$, $\beta=0$ (maks dokładność lokalny błąd czwartego rzędu)
rola γ, β – zobaczymy jak się sprawdzają w praktyce

$$u(t+dt)=2u(t)-u(t-dt)+dt^2[\beta a(t+dt)+(1/2-2\beta+\gamma)a(t)+(-\gamma+\beta+1/2)a(t-dt)]$$

$$u(t+dt)=2u(t)-u(t-dt)+dt^2[\beta a(t+dt)+\alpha a(t)+\delta a(t-dt)]$$

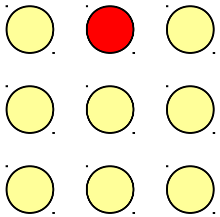
jak wykonać krok czasowy?

sposób rozwiązywania zależy od wyrażanie na *a*
dla struny:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} \quad = \quad & 2U_j^n - U_j^{n-1} + \frac{dt^2}{dx^2}\left[\beta\left(U_{j+1}^{n+1} + U_{j-1}^{n+1} - 2U_j^{n+1}\right) + \right. \\ & \left. \alpha\left(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n - 2U_j^n\right) + \delta\left(U_{j+1}^{n-1} + U_{j-1}^{n-1} - 2U_j^{n-1}\right)\right] \end{aligned}$$

Po przegrupowaniu wyrazów:
układ równań liniowych z macierzą trójprzekątniową

stencil:

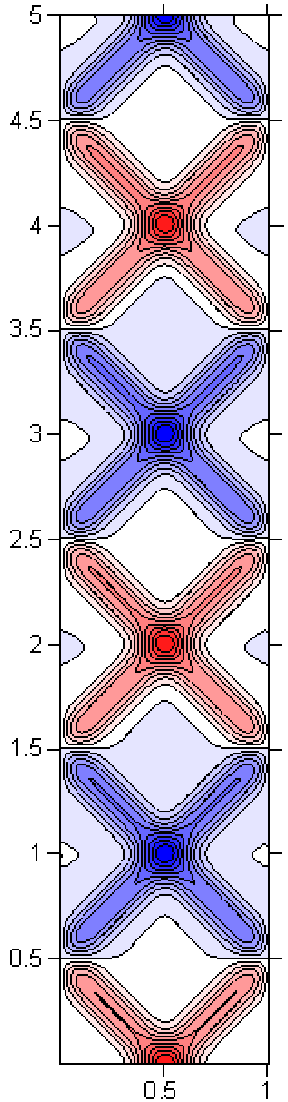


schemat Newmark MRS, struna

dt=dx

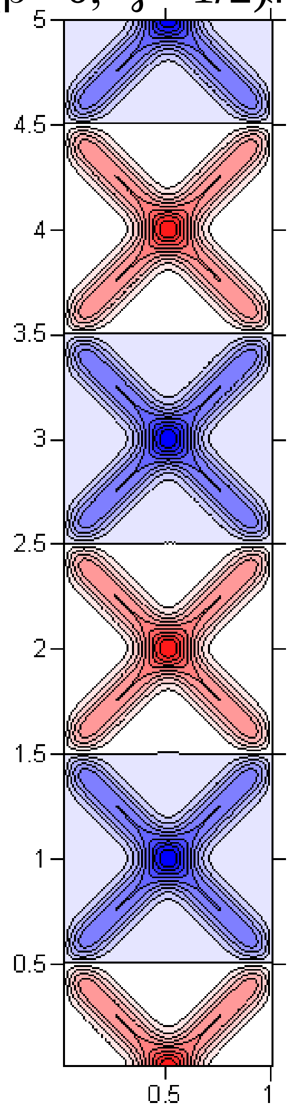
101 węzłów

dokładny

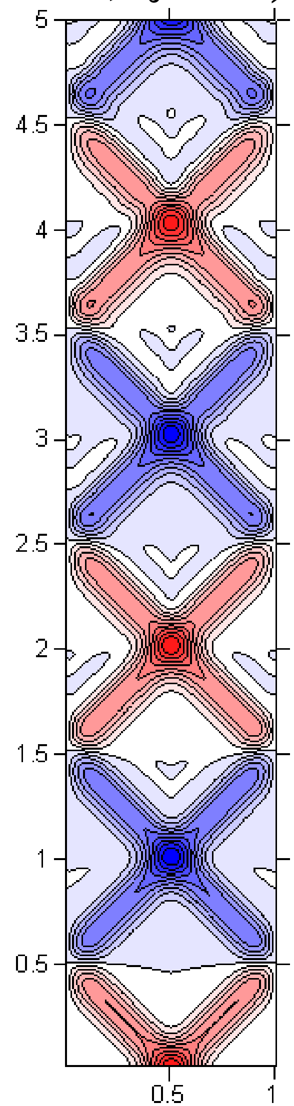


Verlet

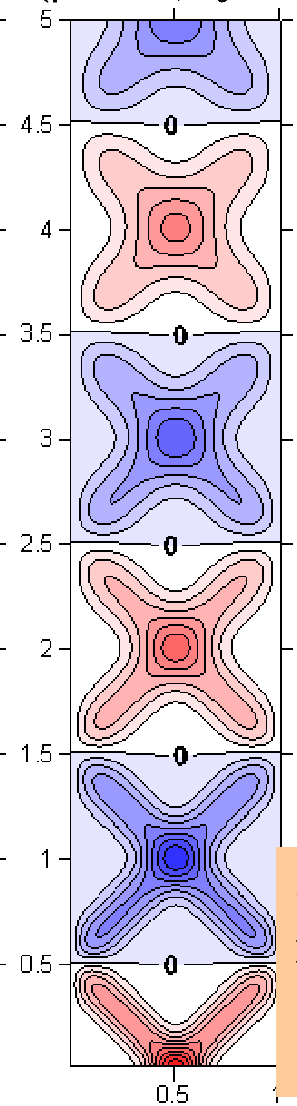
($\beta=0$, $\gamma=1/2$)



($\beta=1/2$, $\gamma=1/2$)

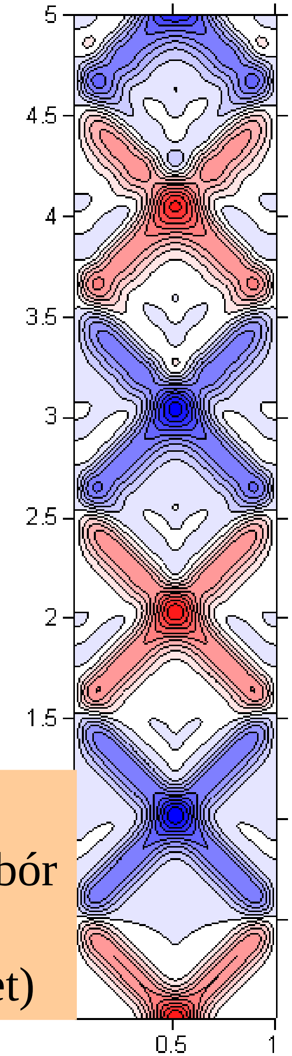


($\beta=1/2$, $\gamma=1$)



$\beta=.9$

$\gamma=1/2$



czas

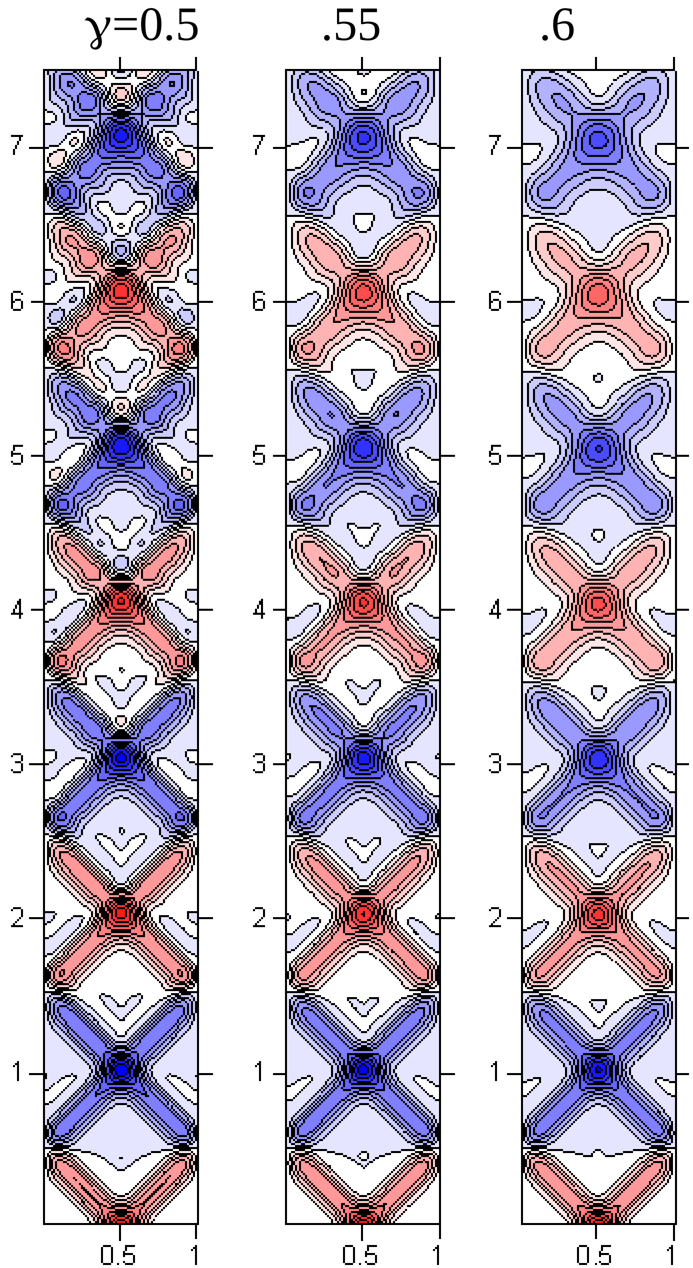
położenie

dla dt=dx
najlepszy wybór
$\beta=0$, $\gamma=1/2$
(jawny, Verlet)

101 węzłów

rola γ (dt=1.5dx, β=0.5)

MRS: schemat Newmark
rola parametrów metody



β>0 – wynosi stabilność poza kryterium CFL, kosztem generacji wyższych częstości przestrzennych

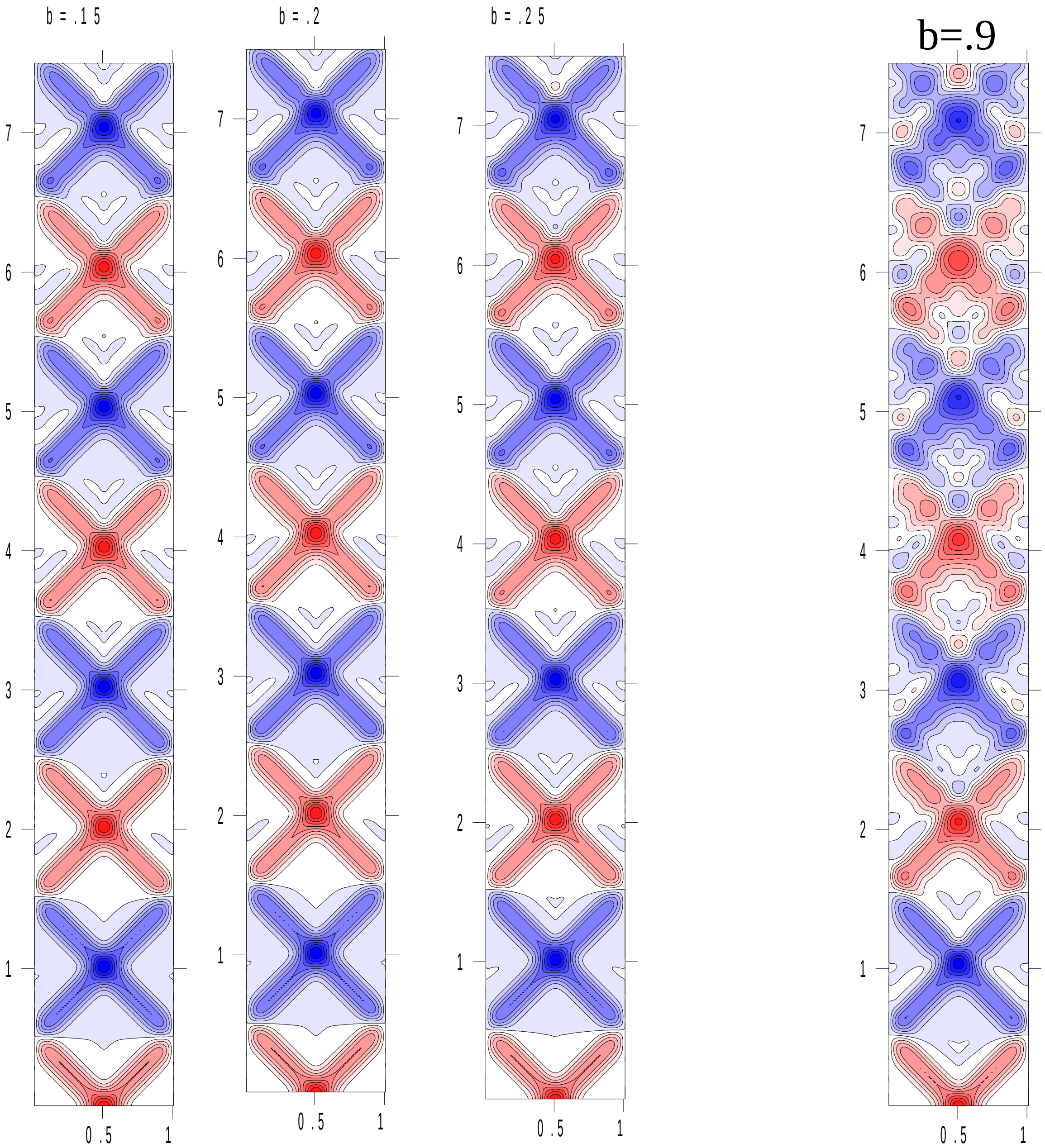
γ>1/2 ogranicza wzmacnianie wyższych częstości kosztem dyssypacji (zaniku całego pakietu)

γ<1/2 – s. niestabilny

zostawmy γ=1/2
i manipulujmy betą

poza CFL: dt > cdx
dt=1.5dx,
γ=0.5, schemat staje się stabilny dla β>0.15

101 węzłów MRS



rosnące beta generuje wyższe częstości
wniosek:
najlepszy minimalne β przy którym schemat jeszcze stabilny

czy można je wyznaczyć analitycznie?

Projektowanie schematu Newmarka dla zadanego kroku czasowego.
dobrać minimalne β aby metoda była stabilna dla danego *dt* ?
Będziemy wiedzieli, że po wyższe β nie warto sięgać.

analiza von Neumanna dla γ=1/2

$$u(t+dt)=2u(t)-u(t-dt)+dt^2[\beta a(t+dt)+(1/2-2\beta+\gamma)a(t)+(-\gamma+\beta+1/2)a(t-dt)]$$

$$u(t+dt)-dt^2\beta a(t+dt)=2u(t)-u(t-dt)+dt^2[(1-2\beta)a(t)+\beta a(t-dt)]$$

Ansatz von Neumanna:

$$A_k^n=\lambda^{n+1}A_k^0$$

$$\lambda^2[1-2\beta\frac{dt^2}{dx^2}(\cos(k\Delta x)-1)]=2\lambda-1+\frac{dt^2}{dx^2}[\lambda(1-2\beta)2\underline{(\cos(k\Delta x)-1)}+\beta 2(\cos(k\Delta x)-1)]$$

$$\lambda^2[1-2\beta\frac{dt^2}{dx^2}c]=2\lambda-1+\frac{dt^2}{dx^2}[\lambda(1-2\beta)2c+\beta 2c]$$

$$\lambda^2[1-2\beta\frac{dt^2}{dx^2}c] = 2\lambda - 1 + \frac{dt^2}{dx^2}[\lambda(1-2\beta)2c + \beta 2c]$$

$$\lambda^2[1-2\beta\frac{dt^2}{dx^2}c] - 2\lambda[1+(1-2\beta)\frac{dt^2}{dx^2}c] + 1 - 2\beta dt^2 c = 0$$

$$\Delta = 4[1+(1-2\beta)\frac{dt^2}{dx^2}c]^2 - 4[1-2\beta dt^2 c]^2$$

$$\Delta = 4dt^2 c(2 + \frac{dt^2}{dx^2}c - 4\beta\frac{dt^2}{dx^2}c)$$

$$\lambda = \frac{1+(1-2\beta)\frac{dt^2}{dx^2}c \pm \frac{dt}{dx}\sqrt{c(2+c\frac{dt^2}{dx^2} - 4\beta\frac{dt^2}{dx^2}c)}}{1-2\beta c\frac{dt^2}{dx^2}}$$

Sytuacja będzie taka: dopóki $\Delta<0$: 2 pierwiastki, o module nie większym od 1
gdy $\Delta>0$ metoda stanie się niestabilna

$$\lambda = \frac{1 + (1-2\beta)\frac{dt^2}{dx^2}c \pm \frac{dt}{dx}\sqrt{c(2 + c\frac{dt^2}{dx^2} - 4\beta\frac{dt^2}{dx^2}c)}}{1 - 2\beta c\frac{dt^2}{dx^2}}$$

-2<c<0 zawsze

żeby dwa urojone:

$$2 + \frac{dt^2}{dx^2}c(1-4\beta) > 0 \longrightarrow \beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c\frac{dt^2}{dx^2}}$$

$|\lambda|^2<1$?

daje ten sam wynik $\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c\frac{dt^2}{dx^2}}$

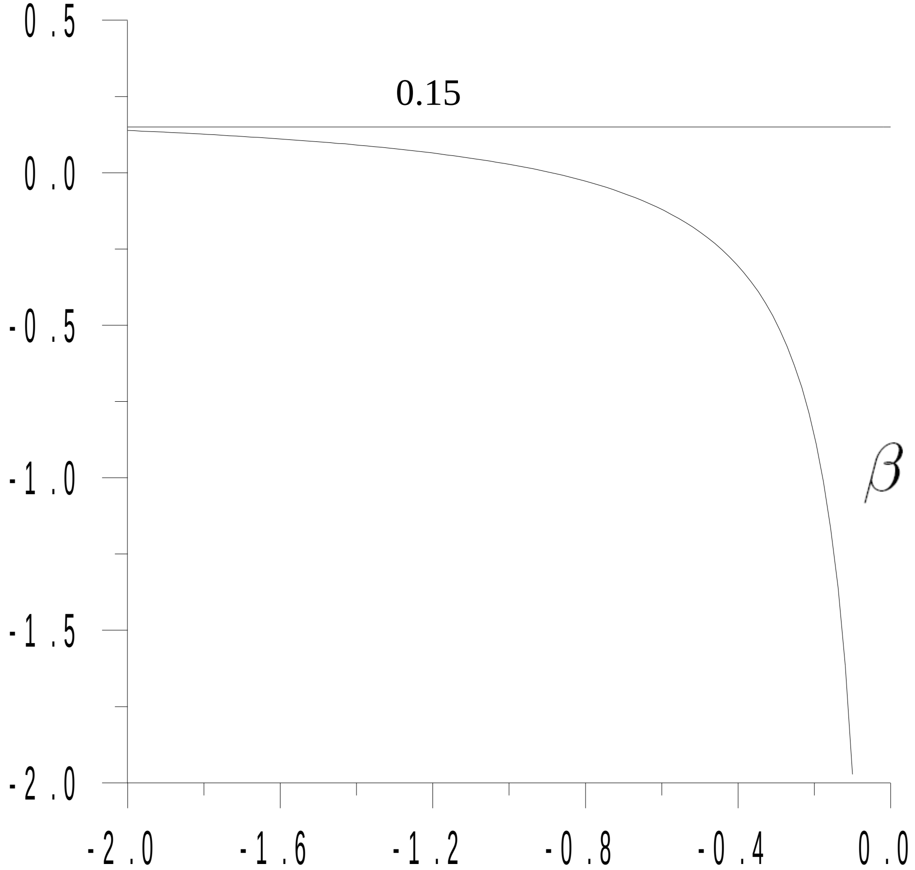
β>1/4 – metoda stabilna dla dowolnego *t* [ponieważ *c* < 0]

---

uwaga: możemy sobie teraz
sprawdzić stabilność Verleta dla *dt*=*dx* oraz beta=0 , ¼+1/(2*c*) <0 [ok.]

dobór beta zapewniającego
stabilność schematu Newmark
w MRS dla zadanego kroku czasowego

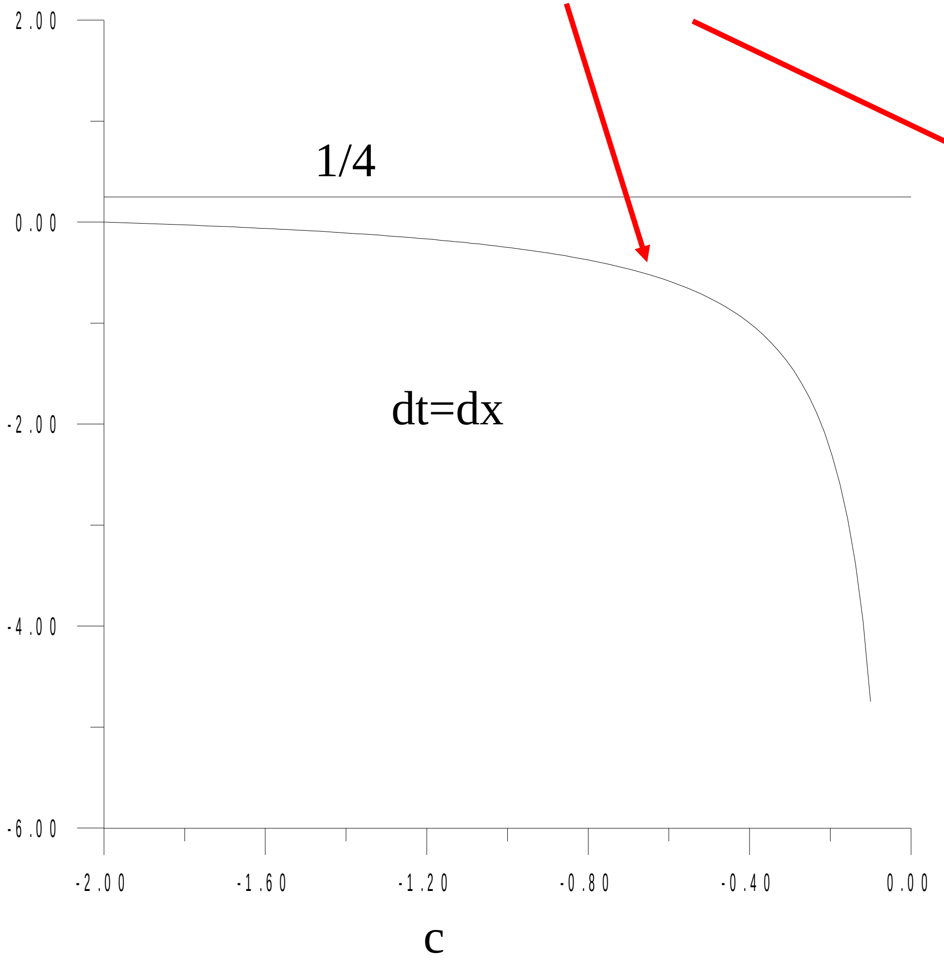
dt=1.5 dx

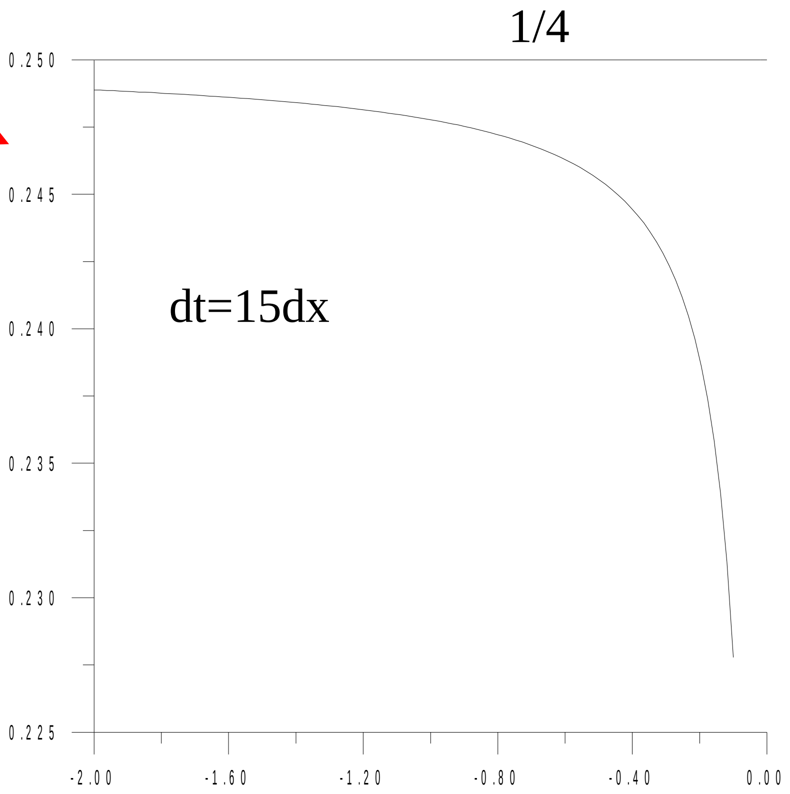


$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c\frac{dt^2}{dx^2}}$$

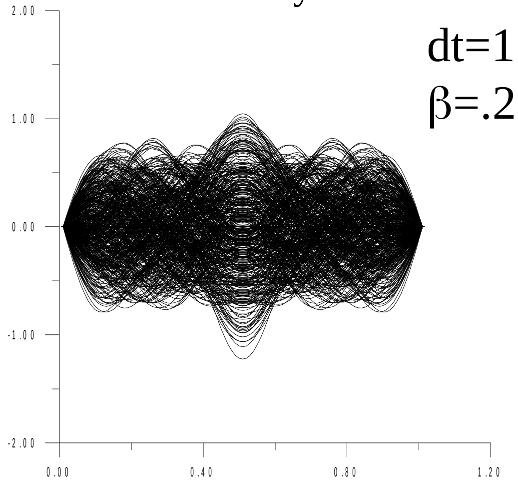
$$\beta > \frac{1}{4} + \frac{1}{2c\frac{dt^2}{dx^2}}$$

dobór beta zapewniającego
stabilność schematu Newmark
w MRS dla zadanego kroku czasowego





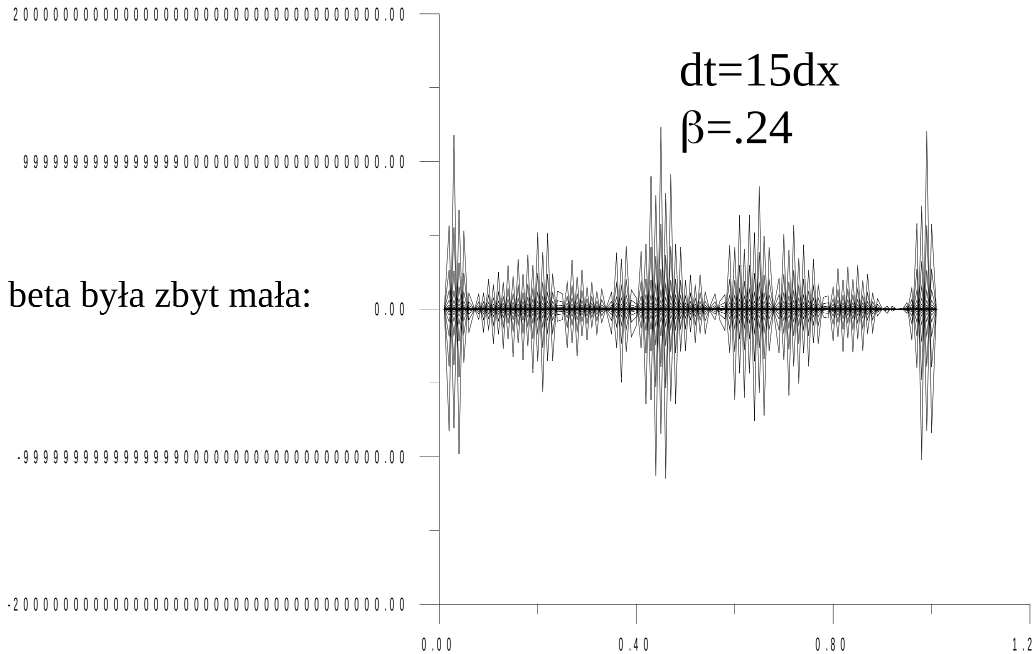
struna, b. wiele chwil czasowych



dt=15dx
β=.25

MRS, Newmark, γ=1/2

bo beta była zbyt mała:



dt=15dx
β=.24