Równanie falowe dla struny

17 kwietnia 2023

W równaniu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$u(x,t)$ oznacza wychylenie struny w punkcie x w chwili t, a c prędkość rozchodzenia się drgań. Przyjmujemy $c = 1$. Rozwiązania (1) podaje się dla warunków początkowych na wychylenie

$$u(x, t = 0) = u_0(x) \tag{2}$$

i prędkość w chwili początkowej $(t = 0)$

$$v(x, t = 0) \equiv \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t}|_{t=0} = v_0(x). \tag{3}$$

Struna jest sztywno zamocowana na końcach: $u(x = 0, t) = u(x = 1, t) = 0$.

(prędkościowy schemat Verleta)

Równanie (1) rozwiążemy metodą różnic skończonych. Strunę dyskretyzujemy do $N = 101$ punktów, każdy odpowiadający za fragment struny długości $\Delta x = 0.01$. Przyjmiemy $\Delta t = 0.005$. Użyjemy prędkościowego schematu Verleta,

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t v(x, t) + \frac{1}{2} a(x, t) \Delta t^2 \tag{4}$$

$$v(x, t + \Delta t) = v(x, t) + \frac{\Delta t}{2} \left(a(x, t + \Delta t) + a(x, t) \right) \tag{5}$$

gdzie przyspieszenie $a = \frac{d^2 u}{dt^2}$ wyliczamy z prawej strony równania falowego (1) stosując iloraz różnicowy drugiej pochodnej

$$\frac{d^2 u}{dx^2}|_t = \frac{u(x + \Delta x, t) + u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t)}{\Delta x^2}. \tag{6}$$

Stosując schemat Verleta - liczymy i zapamiętujemy przyspieszenie w chwili t. Liczymy $u(t+\Delta t)$ wg (4). Gdy cała struna uległa przesunięciu: liczymy $v(t+\Delta t)$ wg wzoru (5) ze średnią arytmetyczną przyspieszenia w chwili t oraz $t+\Delta t$.

zadanie 1 (sztywne i luźne warunki brzegowe)

Rozwiązać równanie (1) dla warunków początkowych

$$u_0(x) = \exp(-100(x-0.5)^2), \tag{7}$$

oraz

$$v_0(x) = 0 \tag{8}$$

przy sztywnych warunkach brzegowych $u(0,t) = u(1,t) = 0$, oraz dla luźnych warunków brzegowych $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$, dla $t \in (0,5)$. Luźne warunki wprowadzamy do programu przypisując dla każdej chwili czasowej $u(0,t) := u(\Delta x, t)$ oraz $u(1,t) := u(1-\Delta x, t)$. Uwaga: trzeba zastosować podstawienie przed każdym wyliczeniem przyspieszenia. Narysować $u(x,t)$ dla sztywnych i luźnych warunków.

zadanie 3 (drgania tłumione)

Wracamy do sztywnych warunków brzegowych. Wprowadzamy tłumienie drgań proporcjonalne do prędkości struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{9}$$

gdzie β jest współczynnikiem tłumienia. Przyspieszenie potrzebne do schematu Verleta dane jest teraz przez

$$a_\beta(x,t) = \frac{d^2 u}{dx^2}|_t - 2\beta v(x,t). \tag{10}$$

Uwaga: przy przyspieszeniu zależnym od prędkości schemat ze względu na formę (5) staje się niejawny. Ze względu na liniową zależność od tłumienia można analitycznie rozwiązać przepis (5) na zmianę prędkości,

$$v(x,t+\Delta t) = \left[v(x,t) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{d^2 u}{dx^2}|_{t+\Delta t} + a_\beta(x,t) \right) \right] / (1+\beta \Delta t). \tag{11}$$

Narysować przebieg drgań $u(x,t)$ dla $\beta = 0.5, 2$ i 4.

zadanie 4 (drgania wymuszone)

Dodajemy siłę wymuszającą nadającą dodatkowe przyspieszenie strunie $a_F(x,t)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + a_F(x,t), \tag{12}$$

Siłę przykładamy punktowo

$$a_F(x,t) = \begin{cases} \cos(wt) \text{ dla } x = x_0 \\ 0 \text{ dla } x \neq x_0 \end{cases} \tag{13}$$

z $x_0 = 1/2$. W chwili początkowej struna spoczywa ($v(x,t) = 0$) w równowadze ($u(x,t) = 0$). Wstawimy słabe tłumienie $\beta = 1$ i częstość wymuszenia $w = \pi/2$.

W obecności wymuszenia przepis na zmianę prędkości ma postać

$$v(x,t+\Delta t) = \left[v(x,t) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{d^2u}{dx^2}|_{t+\Delta t} + a_\beta(x,t) + a_F(x,t+\Delta t) + a_F(x,t) \right) \right] / (1+\beta\Delta t). \tag{14}$$

Narysować $u(x,t)$ dla t od 0 do 10. Widzimy, że drgania osiągają stan ustalony po pewnym czasie. Jaki jest okres drgań w stanie ustalonym ?

zadanie 5 (rezonanse)

Energia struny dana jest wyrażeniem

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 v^2(x,t)dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \tag{15}$$

Wyliczyć średnią energię stanu ustalonego jako

$$< E >= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt, \tag{16}$$

dla $t_1 = 16$, $t_2 = 20$. Narysować $\langle E \rangle$ w funkcji $w \in (0, 10\pi)$. Na rysunku zobaczymy rezonanse dla częstości własnych drgań tłumionych $w = w_n = \sqrt{\omega_n^2 - \beta^2}$ (dla $\beta = 1$: $w_n \approx \omega_n = n\pi$) ale tylko dla nieparzystych n. Czy uda się nam wywołać rezonanse dla parzystych n przesuwając punkt przyłożenia siły wymuszającej poza środek struny $x_0 = 0.4$? Narysować $\langle E \rangle$.