Wykład pokazujący, że wybór stałego kroku czasowego nie zawsze jest dobrym pomysłem. Jak napisać program, który będzie sam sobie dobierał krok czasowy na podstawie narzuconej przez nas tolerancji dokładności

orbita komety Halleya

- masa Słońca $M = 1.989 \times 10^{30}$kg; Słońce w początku układu odniesienia, nieruchome;
- $G = 6.6741 \times 10^{-11}$ m^3/kg/s^2, jednostka astronomiczna 149 597 870 700 m

$$\frac{dx}{dt} = v_x \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y \tag{2}$$
$$\frac{dv_x}{dt} = -G\frac{M}{r^3}x \tag{3}$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -G\frac{M}{r^3}y \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

- Physics Education 38 (2003) 429

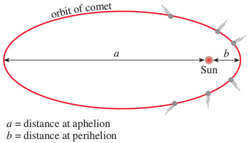
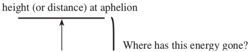


Table 1. Various parameters for comet Halley.

Perihelion distance (AU)	0.587
Aphelion distance (AU)	35.11
Semi-major axis (AU)	17.84
Dimensions (km)	$16 \times 8 \times 8$
Density (kg m^{-3})	100
Mass (kg)	$\sim 1 \times 10^{14}$

Note that AU denotes astronomical units. 1 AU = 1.49×10^{11} m, the distance between the Sun and Earth. I encourage students to calculate this roughly for themselves by telling them that it takes approximately eight minutes for sunlight to reach us.



-

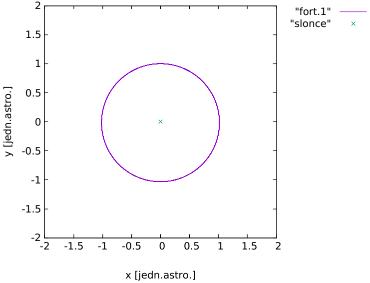
Jawny Euler dla ciała w potencjale centralnym

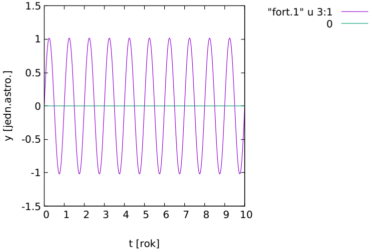
-
$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (6)$$
$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (7)$$
$$\frac{dv_x}{dt} = -G\frac{M}{r^3}x \quad (8)$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -G\frac{M}{r^3}y \quad (9)$$
$$x_{n+1} = x_n + (v_x)_n\Delta t \quad (10)$$
$$y_{n+1} = y_n + (v_y)_n\Delta t \quad (11)$$
$$(v_x)_{n+1} = (v_x)_n - G\frac{M}{r_n^3}x_n\Delta t \quad (12)$$
$$(v_y)_{n+1} = (v_y)_n - G\frac{M}{r_n^3}y_n\Delta t \quad (13)$$

- parametry orbity Ziemi do startu:
- odległość Ziemi od Słońca w peryhelium: 0.9832917 jedn. at.
- wtedy prędkość Ziemi 30.29 km/s.

Orbita Ziemi

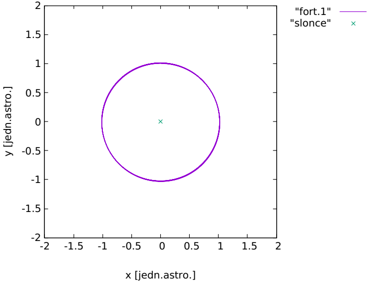
- krok $\Delta t = 15$ minut

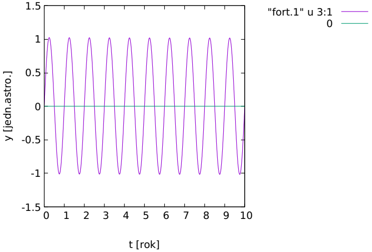




Orbita Ziemi

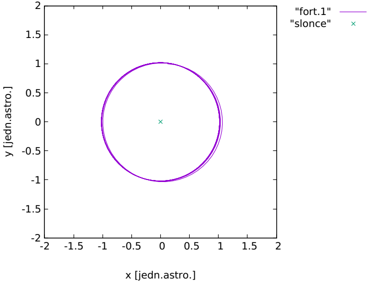
- krok Δt =dzień

- 

- 

Orbita Ziemi

- krok Δt =tydzień



Ogólnie orbita Ziemi nie jest kłopotliwa do policzenia

Kometa Halleya

ciało w potencjale radialnym
schemat Eulera
orbity
kontrola kroku czasowego

- M. Follows, Physics Education 38 (2003) 429

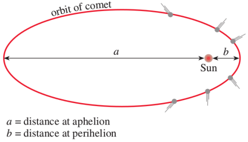
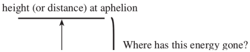


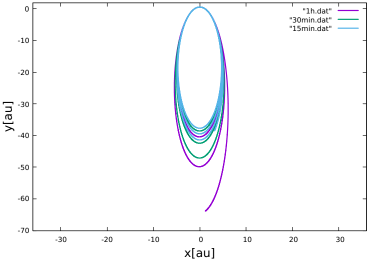
Table 1. Various parameters for comet Halley.

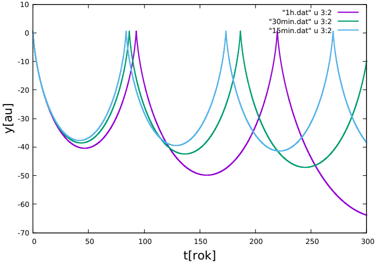
Perihelion distance (AU)	0.587
Aphelion distance (AU)	35.11
Semi-major axis (AU)	17.84
Dimensions (km)	$16 \times 8 \times 8$
Density ($\mathrm{kg\,m^{-3}}$)	100
Mass (kg)	$\sim 1 \times 10^{14}$

Note that AU denotes astronomical units. $1\ \mathrm{AU} = 1.49 \times 10^{11}$ m, the distance between the Sun and Earth. I encourage students to calculate this roughly for themselves by telling them that it takes approximately eight minutes for sunlight to reach us.

- 

- preedkość w peryhelium: 54.6 km/s, a aphelium około 800 m/s
- czas obiegu około 75 lat

- 

- 

- wniosek: nawet 15 minut to zbyt długo na krok czasowy przy obiegu około 80 lat
- problemem jest peryhelium. wielkie siły i wielkie prędkości rozwijane przez kometę w pobliżu Słońca
- można zmienić metodę na bardziej dokładną (my znamy m. trapezów), ale tam również o obliczeniach numerycznych decydować będzie krok potrzebny do aphelium ...

Kontrola błędu w rozwiązaniu równania różnicowego

- $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$
- rozwiązanie dokładne $x(t_k)$
- rozwiązanie schematu różnicowego x_k
- $x(t_k) = x_k + O(\Delta t)^{n+1}$, gdzie $n-$ rząd zbieżności metody.
- np. dla Eulera $n = 1$, dla trapezów $n = 2$
- szereg Taylora
- $x(t + \Delta t) = x(t) + f(t, x)\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} f'(t, x) + \ldots,$
- ogólnie
- $x(t_k) = x_k + C_t(\Delta t)^{n+1} + O(\Delta t)^{n+2}$
- wyliczyc C_t to poznać wiodącą część błędu
- jak to zrobić?

Kontrola błędu w rozwiązaniu równania różnicowego

- $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$

- rachunek z krokiem Δt
- $x_{k+1} = x_k + W(\Delta t)$, $W(\Delta t)$ - przepis metody
- $x(t_{k+1}) = x_{k+1} + C_t(\Delta t)^{n+1} + O(\Delta t)^{n+2}$

- rachunek z krokiem $\Delta t/2$: 2 kroki aby dojść do chwili $t + \Delta t$
- $x'_{k+1/2} = x_k + W(\Delta t/2)$
- $x'_{k+1} = x'_{k+1/2} + W(\Delta t/2)$
- w każdym kroku $\Delta t/2$ popełniamy błąd $C_t(\Delta t/2)^{n+1}$
- $x(t_{k+1}) = x'_{k+1} + 2C_t\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{n+1} + O(\Delta t)^{n+2}$

- który przepis dokładniejszy (?) (minimalne - Euler - $n = 1$)
- $C_t(\Delta t)^{n+1} - 2C_t(\Delta t/2)^{n+1} = x'_{k+1} - x_{k+1}$
- $C_t(\Delta t)^{n+1}(1 - \frac{1}{2^n}) = x'_{k+1} - x_{k+1}$
- $x(t_{k+1}) = x'_{k+1} + \frac{x'_{k+1} - x_{k+1}}{2^n - 1} + O(\Delta t)^{n+2}$
- oszacowanie błędu: $\epsilon \equiv \frac{x'_{k+1} - x_{k+1}}{2^n - 1}$
- zabieg szacowania błędu i lepszego rozwiązania przez obserwację zachowania metody zależnie od kroku czasowego: ekstrapolacja Richardsona

Kontrola błędu w rozwiązaniu równania różnicowego

- zakładamy tolerancję błędu tol

- rachunek z krokiem Δt
- $x_{k+1} = x_k + W(\Delta t)$, $W(\Delta t)$ - przepis metody
- $x(t_{k+1}) = x_{k+1} + C_t(\Delta t)^{n+1} + O(\Delta t)^{n+2}$

- $x'_{k+1/2} = x_k + W(\Delta t/2)$
- $x'_{k+1} = x'_{k+1/2} + W(\Delta t/2)$
- $x(t_{k+1}) = x'_{k+1} + 2C_t\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^{n+1} + O(\Delta t)^{n+2}$

- oszacowanie błędu: $\epsilon \equiv \frac{x'_{k+1} - x_{k+1}}{2^n - 1}$
- jeśli $|\epsilon| \leqslant \mathrm{tol}$ akceptujemy krok, przyjmujemy wyliczone wartości x'_{k+1} i idziemy dalej $t := t + \Delta t$
- niezależnie od wartości ϵ zmieniamy krok czasowy tak, aby błąd popełniany w pojedynczym kroku był bliski torelancji
- jest $\epsilon = C_t(\Delta t)^{n+1}$
- chcemy $\mathrm{tol} = C_t(\Delta t(nowy))^{n+1}$
- $\Delta t(nowy) = \Delta t \left(\frac{\mathrm{tol}}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n+1}}$
- bezpieczniej:
- $\Delta t(nowy) = c\Delta t \left(\frac{\mathrm{tol}}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n+1}}$, np. $c = 0.9$

problem ruchu w potencjale grawitacyjnym

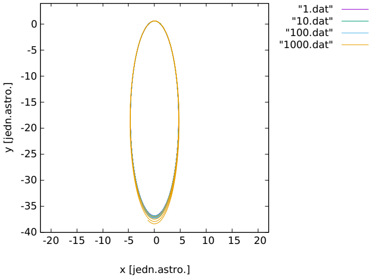
$$x_{n+1} = x_n + (v_x)_n \Delta t \quad (14)$$
$$y_{n+1} = y_n + (v_y)_n \Delta t \quad (15)$$
$$(v_x)_{n+1} = (v_x)_n - G\frac{M}{r_n^3} x_n \Delta t \quad (16)$$
$$(v_y)_{n+1} = (v_y)_n - G\frac{M}{r_n^3} y_n \Delta t \quad (17)$$

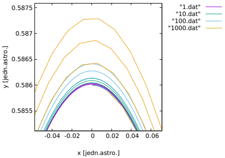
- rachunek prowadzony z dwoma krokami czasowymi
- błędy szacowane dla położeń x/y $\epsilon \equiv \frac{x'_{k+1} - x_{k+1}}{2^n - 1}$, maksymalny błąd porównywany z tolerancją
- krok akceptowany gdy błąd mniejszy od tol
- zmiana kroku czasowego $\Delta t(nowy) = 0.9 \Delta t \left(\frac{\mathrm{tol}}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n+1}}$
- dla Eulera $n = 1$

```
n=1 (Euler)
iter=0
151 continue
c 2 kroki dt/2
vsx=vox
vsy=voy
sx=xo
sy=yo

vsx0=vox
vsy0=voy
sx0=xo
sy0=yo

call wykonajkrok(dt/2,dx,vox,voy,xo,yo)
call wykonajkrok(dt/2,dx,vox,voy,xo,yo)
c 1 krok dt
call wykonajkrok(dt,dx,vsx,vsy,sx,sy)
c porownujemy
ex=(xo-sx)/(2**n-1)
ey=(yo-sy)/(2**n-1)
blond=abs(ex)
if(abs(ey).gt.blond) blond=abs(ey)
```

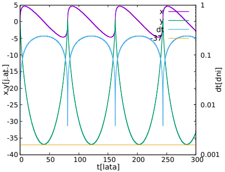
```
if(blond.lt.tol) then
t=t+dt
iter=iter+1
write(18,13) xo/au,yo/au,t/rok,dt/3600/24
else
vox=vsx0
voy=vsy0
xo=sx0
yo=sy0
endif
dt=dt*.9*(tol/blond)**(1.0/(n+1.0))
if(t.lt.czas)goto 151
```

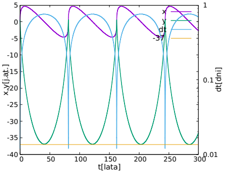
problem ruchu w potencjale grawitacyjnym

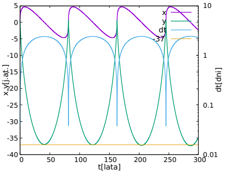
- 

- 

- po prawej od góry tol błędu: 1 m, 10 m, 100 m
- przy tolerancji błędu 1m krok czasowy $\Delta t = 5.5$ minuty w peryhelium do 5.5h w aphelium

- 

- 

- 

schemat trapezów dla układu równań

- $x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right)$
- $v_{n+1} = v_n + \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_{n+1}} - \alpha v_{n+1} - \frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n} - \alpha v_n\right)$
- układ równań nieliniowych:
- $F_1(x_{n+1}, v_{n+1}) = x_{n+1} - x_n - \frac{\Delta t}{2} v_{n+1} - \frac{\Delta t}{2} v_n$
- $F_2(x_{n+1}, v_{n+1}) = v_{n+1} - v_n - \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_{n+1}} - \alpha v_{n+1}\right) - \frac{\Delta t}{2}\left(-\frac{1}{m}\frac{dV}{dx}|_{x_n} - \alpha v_n\right)$
-

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial v_{n+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial v_{n+1}} \end{pmatrix}_{|x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}} \begin{pmatrix} x^{\mu+1}_{n+1} - x^{\mu}_{n+1} \\ v^{\mu+1}_{n+1} - v^{\mu}_{n+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1(x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}) \\ F_2(x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}) \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2m}\frac{d^2 V}{dx^2}_{|x^{\mu}_{n+1}} & 1 + \frac{\Delta t}{2}\alpha \end{pmatrix}_{|x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}} \begin{pmatrix} x^{\mu+1}_{n+1} - x^{\mu}_{n+1} \\ v^{\mu+1}_{n+1} - v^{\mu}_{n+1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1(x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}) \\ F_2(x^{\mu}_{n+1}, v^{\mu}_{n+1}) \end{pmatrix} \tag{19}$$

schemat trapezów dla komety

- $x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}\left((v_x)_{n+1} + (v_x)_n\right)$
- $(v_x)_{n+1} = (v_x)_n + \frac{\Delta t}{2}\left((a_x)_{n+1} + (a_x)_n\right)$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}\left((v_y)_{n+1} + (v_y)_n\right)$
- $(v_y)_{n+1} = (v_y)_n + \frac{\Delta t}{2}\left((a_y)_{n+1} + (a_y)_n\right)$

- $a_x = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}x$
- $a_y = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}y$

  - układ równań nieliniowych:
  - $F_1(x_{n+1}, y_{n+1}, (v_x)_{n+1}, (v_y)_{n+1}) = x_{n+1} - x_n - \frac{\Delta t}{2}(v_x)_{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(v_x)_n$
  - $F_2(x_{n+1}, y_{n+1}, (v_x)_{n+1}, (v_y)_{n+1}) = y_{n+1} - y_n - \frac{\Delta t}{2}(v_y)_{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(v_y)_n$
  - $F_3(x_{n+1}, y_{n+1}, (v_x)_{n+1}, (v_y)_{n+1}) = (v_x)_{n+1} - (v_x)_n - \frac{\Delta t}{2}(a_x)_{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(a_x)_n$
  - $F_4(x_{n+1}, y_{n+1}, (v_x)_{n+1}, (v_y)_{n+1}) = (v_y)_{n+1} - (v_y)_n - \frac{\Delta t}{2}(a_y)_{n+1} - \frac{\Delta t}{2}(a_y)_n$

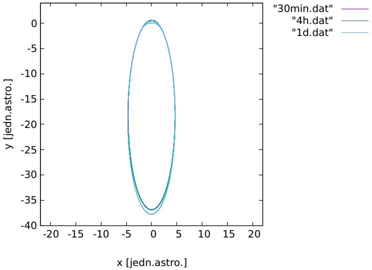
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial (v_x)_{n+1}} & \frac{\partial F_1}{\partial (v_y)_{n+1}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial y_{n+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial (v_x)_{n+1}} & \frac{\partial F_2}{\partial (v_y)_{n+1}} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_3}{\partial y_{n+1}} & \frac{\partial F_3}{\partial (v_x)_{n+1}} & \frac{\partial F_3}{\partial (v_y)_{n+1}} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_{n+1}} & \frac{\partial F_4}{\partial y_{n+1}} & \frac{\partial F_4}{\partial (v_x)_{n+1}} & \frac{\partial F_4}{\partial (v_y)_{n+1}} \end{pmatrix}_\mu \begin{pmatrix} x_{n+1}^{\mu+1} - x_{n+1}^{\mu} \\ y_{n+1}^{\mu+1} - y_{n+1}^{\mu} \\ (v_x)_{n+1}^{\mu+1} - (v_x)_{n+1}^{\mu} \\ (v_y)_{n+1}^{\mu+1} - (v_y)_{n+1}^{\mu} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}_\mu \tag{20}$$

- $x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{2}\left((v_x)_{n+1} + (v_x)_n\right)$
- $(v_x)_{n+1} = (v_x)_n + \frac{\Delta t}{2}\left((a_x)_{n+1} + (a_x)_n\right)$
- $y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{2}\left((v_y)_{n+1} + (v_y)_n\right)$
- $(v_y)_{n+1} = (v_y)_n + \frac{\Delta t}{2}\left((a_y)_{n+1} + (a_y)_n\right)$
- $a_x = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}x$
- $a_y = -\frac{GM}{(x^2+y^2)^{3/2}}y$
- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}(a_x) & -\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial y}(a_x) & 1 & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}(a_y) & -\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial y}(a_y) & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu} \begin{pmatrix} x_{n+1}^{\mu+1} - x_{n+1}^{\mu} \\ y_{n+1}^{\mu+1} - y_{n+1}^{\mu} \\ (v_x)_{n+1}^{\mu+1} - (v_x)_{n+1}^{\mu} \\ (v_y)_{n+1}^{\mu+1} - (v_y)_{n+1}^{\mu} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} \quad (21)$$

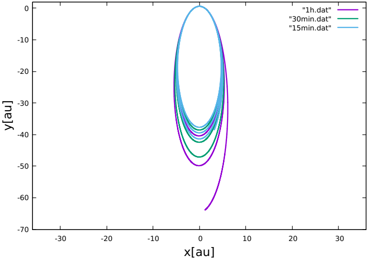
wyniki metody trapezów ze stałym *dt*

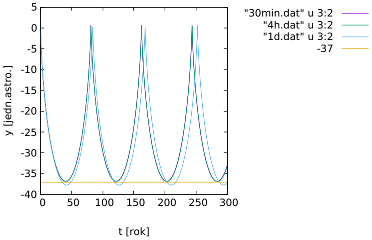
ciało w potencjale radialnym
schemat Eulera
orbity
kontrola kroku czasowego

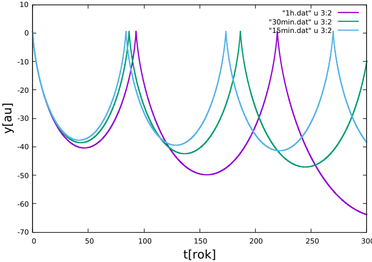
- metoda trapezów



- metoda Eulera

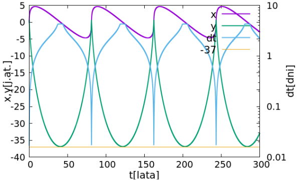


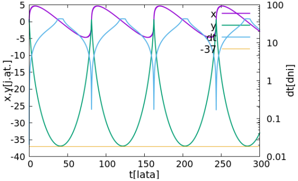




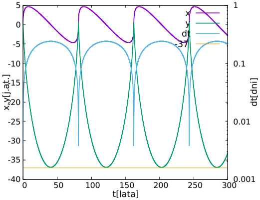
wyniki metody trapezów z doborem kroku czasowego

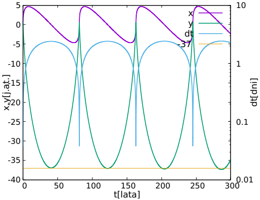
- metoda trapezów od góry tol 1m, 1000m





- metoda Eulera od góry 1m, 100m





- przy tej samej tolerancji (1m) schemat trapezów stawia znacznie dłuższe kroki ($\simeq$ 10)
- rachunek wzoru trapezów przy tej samej tolerencji jest jakościowo lepszy
- w Eulerach - błędy się akumulują (ten sam znak błędu w każdym kroku).

RK4

- metoda trapezów: niejawna drugiego rzędu dokładności
- metody Rungego Kutty (początek XXw): metody jawne wysokiej dokładności
- $\frac{du}{dt} = f$

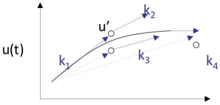
klasyczna formuła RK4:
$$u_n = u_{n-1} + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_{n-1}, u_{n-1})$$

$$k_2 = f(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, u_{n-1} + \frac{\Delta t k_1}{2})$$

$$k_3 = f(t_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}, u_{n-1} + \frac{\Delta t k_2}{2})$$

$$k_4 = f(t_{n-1} + \Delta t, u_{n-1} + \Delta t k_3)$$



4 wywołania *f* na krok,
błąd lokalny $O(\Delta t^5)$

-

RK4 dla autonomicznego układu równań

- $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3, u^4)^T, \mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T$
-

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) \qquad \frac{dy}{dt} = v_y(t) \tag{22}$$
$$\frac{dv_x}{dt} = -G\frac{M}{r^3}x = a_x \qquad \frac{dv_y}{dt} = -G\frac{M}{r^3}y = a_y$$

$$u^1 \equiv x \qquad u^2 \equiv y \tag{23}$$
$$u^3 \equiv v_x \qquad u^4 \equiv v_y$$

$$f^1 \equiv v_x \qquad f^2 \equiv v_y \tag{24}$$
$$f^3 \equiv a_x \qquad f^4 \equiv a_y$$

- $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1})$ następnie kolejno
- $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_1)$
- $\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_2)$
- $\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \Delta t\mathbf{k}_3)$
- $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{6}\left(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4\right)$

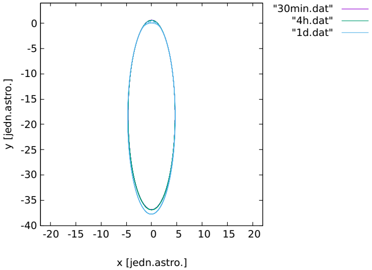
$$k_{1,1} = v_x(t),\ k_{1,2} = v_y(t),\ k_{1,3} = a_x[x(t), y(t)],\ k_{1,4} = a_y[x(t), y(t)]$$
$$k_{2,1} = v_x(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{1,3},\ k_{2,2} = v_y(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{1,4}$$
$$k_{2,3} = a_x\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{1,1},\ y(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{1,2}\right)$$
$$k_{2,4} = a_y\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{1,1},\ y(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{1,2}\right).$$
$$k_{3,1} = v_x(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{2,3},\ k_{3,2} = v_y(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{2,4}$$
$$k_{3,3} = a_x\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{2,1},\ y(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{2,2}\right)$$
$$k_{3,4} = a_y\left(x(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{2,1},\ y(t) + \frac{\Delta t}{2}k_{2,2}\right).$$

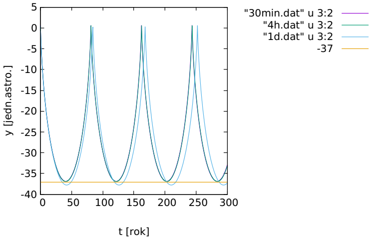
$$k_{4,1} = v_x(t) + \Delta t k_{3,3},\ k_{4,2} = v_y(t) + \Delta t k_{3,4}$$
$$k_{4,3} = a_x\left(x(t) + \Delta t k_{3,1},\ y(t) + \Delta t k_{3,2}\right),\ k_{4,4} = a_y\left(x(t) + \Delta t k_{3,1},\ y(t) + \Delta t k_{3,2}\right)$$

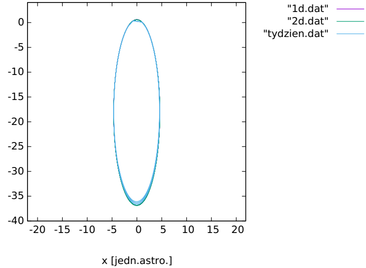
$$x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{6}\left(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}\right)$$
$$v_x(t+\Delta t) = v_x(t) + \frac{\Delta t}{6}\left(k_{1,3} + 2k_{2,3} + 2k_{3,3} + k_{4,3}\right)$$

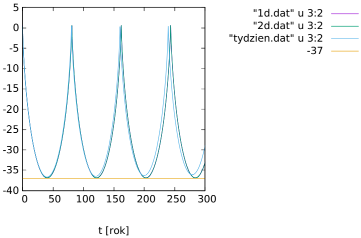
```
subroutine wykonajkrok(dt,dx,vox,voy,xo,yo)
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension xk(4,4),uk(4,4),u(4)

uk(1,1)=xo
uk(1,2)=yo
uk(1,3)=vox
uk(1,4)=voy

xk(1,1)=uk(1,3)
xk(1,2)=uk(1,4)
xk(1,3)=ax(uk(1,1),uk(1,2))
xk(1,4)=ay(uk(1,1),uk(1,2))

xk(2,1)=uk(1,3)+xk(1,3)*dt/2
xk(2,2)=uk(1,4)+xk(1,4)*dt/2
xk(2,3)=ax(uk(1,1)+dt/2*xk(1,1),uk(1,2)+dt/2*xk(1,2))
xk(2,4)=ay(uk(1,1)+dt/2*xk(1,1),uk(1,2)+dt/2*xk(1,2))

xk(3,1)=uk(1,3)+xk(2,3)*dt/2
xk(3,2)=uk(1,4)+xk(2,4)*dt/2
xk(3,3)=ax(uk(1,1)+dt/2*xk(2,1),uk(1,2)+dt/2*xk(2,2))
xk(3,4)=ay(uk(1,1)+dt/2*xk(2,1),uk(1,2)+dt/2*xk(2,2))

xk(4,1)=uk(1,3)+xk(3,3)*dt
xk(4,2)=uk(1,4)+xk(3,4)*dt
xk(4,3)=ax(uk(1,1)+dt*xk(3,1),uk(1,2)+dt*xk(3,2))
xk(4,4)=ay(uk(1,1)+dt*xk(3,1),uk(1,2)+dt*xk(3,2))

do 1 i=1,4
u(i)=uk(1,i)+dt/6*(xk(1,i)+xk(4,i)+2*xk(2,i)+2*xk(3,i))
1 continue
xo=u(1)
yo=u(2)
vox=u(3)
voy=u(4)
end
```

wyniki metody RK4 ze stałym *dt*

- metoda trapezów
- 

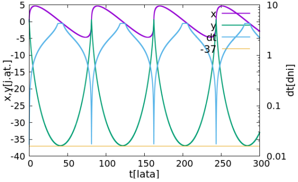
- 

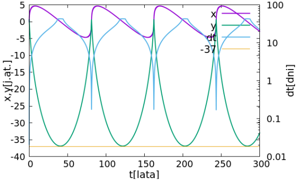
- metoda RK4
- 

- 

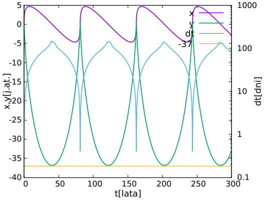
wyniki metody trapezów z doborem kroku czasowego

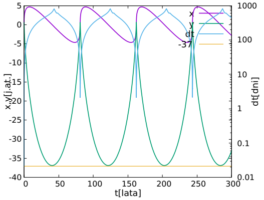
- metoda trapezów od góry tol 1m, 1000m



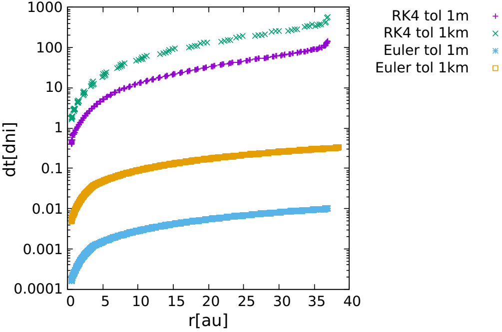


- metoda RK4 od góry 1m, 1000m





krok czasowy w RK4 i metodzie Eulera



- rekomendacja: jeśli problem nie jest *sztywny*, wybierajmy metodę RK4
- jeśli problem wykazuje sztywność - wybierajmy metodę trapezów