

# Rozwiązywanie równań dynamiki Newtona z automatyczną kontrolą błędów i doboorem kroku czasowego

*B. Szafran, projekt 2, 2021/2022*

## 1 problem

Wyliczymy orbitę ciała o parametrach ruchu zbliżonych do komety Halleya. W chwili początkowej kometa znajduje się peryhelium orbity (0,0.586 au) i porusza się z prędkością (54600 m/s,0). Słońcu przypisujemy masę  $M = 1.989 \times 10^{30}$  kg i unieruchamiamy je w początku układu odniesienia. Stała grawitacji  $G = 6.6741 \times 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/kg/s<sup>2</sup>. jednostka astronomiczna au=149 597 870 700 m. Ruch ciała w potencjale Słońca opisują równania:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y \quad (2)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -G \frac{M}{r^3} x = a_x \quad (3)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -G \frac{M}{r^3} y = a_y \quad (4)$$

$$(5)$$

## 2 jawny schemat Eulera

$$x_{n+1} = x_n + (v_x)_n \Delta t \quad (6)$$

$$y_{n+1} = y_n + (v_y)_n \Delta t \quad (7)$$

$$(v_x)_{n+1} = (v_x)_n - G \frac{M}{r_n^3} x_n \Delta t \quad (8)$$

$$(v_y)_{n+1} = (v_y)_n - G \frac{M}{r_n^3} y_n \Delta t \quad (9)$$

### 2.1

Obliczyć tor komety jawnym schematem Eulera dla 3 jej obrotów dookoła Słońca. Narysować  $y(x)$ , oraz  $y(t)$ . Krok czasowy przyjąć tak mały, na jaki komputer pozwoli przy rachunkach trwających nie dłużej niż kilka minut w czasie rzeczywistym. **30 pkt.**

### 3 Metoda RK4 dla autonomicznego układu równań zwyczajnych pierwszego rzędu

- $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$
- $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3, u^4)^T$ ,
- $\mathbf{f} = (f^1, f^2, f^3, f^4)^T$

$$u^1 \equiv x \quad f^1 \equiv v_x \quad (10)$$

$$u^2 \equiv y \quad f^2 \equiv v_y \quad (11)$$

$$u^3 \equiv v_x \quad f^3 \equiv a_x \quad (12)$$

$$u^4 \equiv v_y \quad f^4 \equiv a_y \quad (13)$$

$$(14)$$

- liczymy  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1})$ , następnie kolejno
- $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_1)$
- $\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2}\mathbf{k}_2)$
- $\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n-1} + \Delta t\mathbf{k}_3)$
- $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_{n-1} + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$

Uwaga: wzory te są rozpisane szczegółowo na slajdzie 22 prezentacji z [wykładu](#).

#### 3.1

Wygenerować wykresy takie jak w zad.1 z RK4 z takim samym krokiem czasowym jakiego użyliśmy poprzednio. **30 pkt.**

### 4 Automatyczny dobór kroku czasowego

Idea: Ustalamy tolerowany błąd *tol.* porównujemy wyniki pojedynczego kroku  $\Delta t$  z dwoma krokami  $\Delta t/2$  Oznaczenia:  $W(\Delta t)$  - przepis metody różnicowej,  $u(t_{k+1})$  - wynik dokładny,  $u_{k+1}$  - wynik różnicowy dla kroku  $\Delta t$ ,  $u'_{k+1}$  - wynik różnicowy dla kroku  $\Delta t/2$

1. rachunek z krokiem  $\Delta t$   $u_{k+1} = u_k + W(\Delta t)$ ,
2. rachunek z krokiem  $\Delta t/2$ : 2 kroki aby dojść do chwili  $t + \Delta t$
3. pierwszy krok  $u'_{k+1/2} = u_k + W(\Delta t/2)$
4. drugi krok  $u'_{k+1} = u'_{k+1/2} + W(\Delta t/2)$

5. oszacowanie błędu:  $\epsilon \equiv \frac{u'_{k+1} - u_{k+1}}{2^n - 1}$  ( $n = 1$  dla Eulera,  $n = 4$  dla RK4)
6. jeśli  $|\epsilon| \leq \text{tol}$  akceptujemy krok, przyjmujemy wyliczone wartości  $u_k := u'_{k+1}$  i pozwalamy czasowi płynąć  $t := t + \Delta t$
7. ustalamy nowy krok czasowy:  $\Delta t(\text{nowy}) = c\Delta t \left(\frac{\text{tol}}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ , z parametrem bezpieczeństwa  $c$ , np.  $c = 0.9$  (adjustację  $\Delta t$  wykonujemy niezależnie od tego czy zaakceptowaliśmy krok czy nie)
8. wracamy do punktu 1

## 5 Metoda Eulera z automatycznym doбором kroku czasowego

Zastosować metodę doboru kroku dla schematu Eulera. Monitorujemy błędy w  $x$  oraz  $y$ . Jako  $\epsilon$  przyjmujemy większy z błędów na  $x$  i  $y$ . Wygenerować rysunek jak w zadaniu 1 dla  $\text{tol} = 1000$  metrów, oraz dla mniejszej wartości (100m lub 10m, na ile komputer pozwoli). **20 pkt**

## 6 dobór kroku dla RK4

Powtórzyć działania z poprzedniego punktu dla RK4 oraz  $\text{tol} = 1000$  metrów oraz mniejszej, przyjętej w zadaniu 5. **20 pkt**