

Konspekt

Piotr Cholda

19 października 2017

1 Poszukiwanie najkrótszej ścieżki w grafie

1.1 Przykładowe problemy optymalizacji kombinatorycznej na grafach

1. Problem poszukiwania najkrótszej ścieżki w grafie.
2. Algorytm Dijkstry (algorytm etykietowania/cechowania wierzchołków), założenia związane ze stosownością tego algorytmu, złożoność algorytmu $\mathcal{O}(|V|^2)$, wersja algorytmu poszukiwania drzewa najkrótszych ścieżek:
 - 1: **procedure** DIJKSTRA($G = (V, A, d)$, $r \in V$)
 - 2: ▷ r : korzeń
 - 3: ▷ Dla wierzchołków, które nie są sąsiednie, przyjmujemy $d_{ij} = \infty$:
 $(i, j) \notin A \Rightarrow d_{ij} = \infty$
 - 4: ▷ Inicjalizacja:
 - 5: $\mathcal{S} \leftarrow \{r\}$
 - 6: $predecessor(r) = 0$
 - 7: ▷ \mathcal{S} : zbiór ocechowanych wierzchołków (dla których znaleziono najkrótszą ścieżkę z wierzchołka r)
 - 8: $\mathcal{S}' \leftarrow V \setminus \{r\}$
 - 9: ▷ \mathcal{S}' : zbiór nieocechowanych wierzchołków
 - 10: **for all** $j \in \mathcal{S}'$ **do**
 - 11: $D_{rj} \leftarrow d_{rj}$
 - 12: **if** $D_{rj} < \infty$ **then**
 - 13: $predecessor(j) = r$
 - 14: **end if**
 - 15: **end for**
 - 16: ▷ Pętla główna:
 - 17: **while** $\mathcal{S}' \neq \emptyset$ **do**
 - 18: $k \leftarrow \arg \min_{m \in \mathcal{S}'} \{D_{rm}\}$
 - 19: $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{k\}$
 - 20: $\mathcal{S}' \leftarrow \mathcal{S}' \setminus \{k\}$
 - 21: ▷ Sprawdzić polepszenie dotychczasowej najkrótszej ścieżki:
 - 22: ▷ \mathcal{N}_k^- jest zbiorem następników k (pęciem wyjściowym dla k , forward star), $\mathcal{N}_k^- = \{j \in V : (k, j) \in A\}$
 - 23: **for all** $j \in \mathcal{N}_k^- \cap \mathcal{S}'$ **do**
 - 24: **if** $D_{rk} + d_{kj} < D_{rj}$ **then**
 - 25: $D_{rj} \leftarrow D_{rk} + d_{kj}$

```

26:         predecessor(j) = k
27:     end if
28: end for
29: end while
30: end procedure
  
```

3. Algorytm Bellmana-Forda, założenia związane ze stosowalnością tego algorytmu
4. Różnica między scentralizowanym i zdecentralizowanym alg. Bellmana-Forda:
5. Zmodyfikowany algorytm Dijkstry (dla sieci z ujemnymi wagami łączy, ale bez cykli negatywnych). Pojęcie cyklu negatywnego.

```

1: procedure DIJKSTRANEGETIVE( $i, G = (V, A, d)$ )
2:                                     ▷  $i$ : korzeń
3:                                     ▷ Nie mogą istnieć w grafie cykle negatywne
4:                                     ▷ Inicjalizacja:
5:    $S \leftarrow \{i\}$ 
6:   ▷  $S$ : zbiór odcachowanych wierzchołków (dla których znaleziono
   najkrótszą ścieżkę z wierzchołka  $i$ )
7:    $S' \leftarrow V \setminus \{i\}$ 
8:   ▷  $S'$ : zbiór nieocachowanych wierzchołków
9:   for all  $j \in S'$  do
10:      $D_{ij} \leftarrow d_{ij}$ 
11:     ▷ Dla wierzchołków, które nie są sąsiednie, przyjmujemy
 $d_{ij} = \infty, (i, j) \notin A \Rightarrow d_{ij} = \infty$ 
12:   end for
13:                                     ▷ Pętla główna:
14:   while  $S' \neq \emptyset$  do
15:     Znaleźć  $k = \arg \min_{m \in S'} \{D_{im}\}$ 
16:      $S \leftarrow S \cup \{k\}$ 
17:     predecessor( $k$ ) =  $i$ 
18:      $S' \leftarrow S' \setminus \{k\}$ 
19:     ▷  $\mathcal{N}_k^-$  jest zbiorem następników  $k$  (pęciem wyjściowym dla  $k$ ,
forward star),  $\mathcal{N}_k^- = \{j : (k, j) \in A\}$ 
20:     for all  $j \in \mathcal{N}_k^-$  do
21:       if  $D_{ij} > D_{ik} + d_{kj}$  then
22:          $D_{ij} \leftarrow D_{ik} + d_{kj}$ 
23:          $S \leftarrow S \setminus \{i\}$ 
24:          $S' \leftarrow S' \cup \{i\}$ 
25:       end if
26:       for all  $k : predecessor(k) \in S'$  do
27:          $S \leftarrow S \setminus \{k\}$ 
28:          $S' \leftarrow S' \cup \{k\}$ 
29:       end for
30:     end for
31:   end while
32: end procedure
  
```

Przedmiot: Projektowanie sieci telekomunikacyjnych
Prowadzący: Piotr Cholda piotr.cholda@agh.edu.pl
Kierunek: Elektronika i Telekomunikacja
Specjalność: Sieci i usługi
Semestr: II sem. (zimowy) studiów magisterskich

6. Algorytm Bhandari'ego poszukiwania najkrótszej pary ścieżek rozłącznych.

1.2 Zadania

- Proszę podać przykład takiego grafu ważonego z wyróżnionym wierzchołkiem r , w którym: (a) drzewo najkrótszych ścieżek o korzeniu r oraz (b) najkrótsze drzewo rozpinające uzyskane za pomocą algorytmu Prima (przy starcie z wierzchołka r) nie są ze sobą tożsame.

1.3 Lektury

1.3.1 Materiał wykładu

Zagadnienia omówione w ramach tego wykładu są w dużym stopniu opisane w następujących książkach:

- Wayne D. Grover. *Mesh-Based Survivable Networks. Options and Strategies for Optical, MPLS, SONET, and ATM Networks*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, 2004: section 4.10.
- Deepankar Medhi and Karthikeyan Ramasamy. *Network Routing. Algorithms, Protocols, and Architectures*. Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2007: chapter 2.
- Michał Pióro and Deepankar Medhi. *Routing, Flow and Capacity Design in Communication and Computer Networks*. Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2004: appendix C.1-C.2.
- Maciej M. Sysło, Narsingh Deo, and Janusz S. Kowalik. *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999: rozdział 3.3.
- Robin J. Wilson. *Wprowadzenie do teorii grafów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000: § 8.

1.3.2 Bibliografia uzupełniająca

- Ramesh Bhandari. *Survivable Networks. Algorithms for Diverse Routing*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1999: przegląd różnych algorytmów przydatnych w projektowaniu sieci (niezawodnych).
- Maciej M. Sysło, Narsingh Deo, and Janusz S. Kowalik. *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1999: podstawy teoretyczne do naszego kursu.
- Leonardo Taccari. Integer Programming Formulations for the Elementary Shortest Path Problem. *European Journal of Operational Research*, 252(1):122–130, July 1, 2016: problemy maksymalnego przepływu.
- Robin J. Wilson. *Wprowadzenie do teorii grafów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000: zwięzłe wprowadzenie do teorii grafów, trochę algorytmów.