Konspekt

Piotr Chołda

5 grudnia 2017

1 Podstawy teorii złożoności oraz metody rozwiązywania zadań programowania dyskretnego

1.1 Podstawy teorii złożoności

1. Notacja Landaua, $\mathcal{O}$ (*big-O*).

2. Klasy złożoności: wielomianowa, logarytmiczna, wykładnicza.

3. Klasy problemów:

   - rozwiązywalne wielomianowo $\mathcal{P}$ (*deterministic polynomial*);
   - weryfikowalne wielomianowo $\mathcal{NP}$ (*non-deterministic polynomial*);
   - $\mathcal{NP}$-zupełne ($\mathcal{NPC}$, $\mathcal{NP}$*-complete*), redukowalność w czasie wielomianowym (*polynomial reducability*), problem spełnialności (*satisfiability problem*), twierdzenie Cooka-Levina;
   - $\mathcal{NP}$-trudne ($\mathcal{NP}$*-hard*);
   - zagadnienie $\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$.

1.2 Rozwiązywanie problemów programowania dyskretnego

4. Problem liniowego programowania dyskretnego z macierzą unimodularną opisującą ograniczenia.

5. Pojęcie relaksacji, pojęcie relaksacji liniowej LR (*linear relaxation*), relacja między rozwiązaniem problemu MIP a jego relaksacją liniową LR.

6. Metody rozwiązywania problemów IP, MIP: metoda podziałów i ograniczeń (*branch-and-bound*, B&B), poszukiwanie ograniczeń za pomocą relaksacji liniowej:

   - Metoda B&B dla zmiennych binarnych:

     procedure BBB(N_U, N_0, N_1)
     ▷ Minimalizujemy funkcję celu
     `solve`($N_U, N_0, N_1, \mathbf{x}, \mathbf{u}, F^{LR}\{N_U, N_0, N_1\}$)
     ▷ $\mathbf{x}$ jest elementem przestrzeni rozwiązań ($\mathbf{x} \in \mathbf{X}$)
     ▷ Znajdź rozwiązanie $\mathbf{LR}\{N_U, N_0, N_1\}$
     if $N_U = \emptyset \quad || \quad \forall_{i \in N_U}\colon x_i \in \mathbb{B}$ (jest binarne) **then**

if $F^{LR}\{N_U, N_0, N_1\} < F^{\text{best}}$ **then**
$F^{\text{best}} \leftarrow F^{LR}\{N_U, N_0, N_1\}$
$\mathbf{x}^{\text{best}} \leftarrow \mathbf{x}$
$\mathbf{u}^{\text{best}} \leftarrow \mathbf{u}$
▷ Znaleziono najlepsze dotychczasowe rozwiązanie binarne: zachowaj je
end if
else
▷ W aktualnie uzyskanym rozwiązaniu pewne zmienne przyjmują wartości niebinarne, są to zmienne zawarte w zbiorze N_U
if $F^{LR}\{N_U, N_0, N_1\} \geq F^{\text{best}}$ **then**
▷ Ograniczanie (*bounding*, rozwiązanie problemu zrelaksowanego jest gorsze niż rozwiązanie optymalne uzyskane do tej pory)
return
else
Wybierz pewne $e \in N_U$, takie że x_i jest ułamkowe
BBB$(N_U - \{e\}, N_0 \cup \{e\}, N_1)$
BBB$(N_U - \{e\}, N_0, N_1 \cup \{e\})$
▷ Podział (ustal pewne wartości jako stałe binarne i rozwiąż dwa bliźniacze podproblemy)
end if
end if
end procedure

- Metoda B&B dla zmiennych całkowitych:

procedure BBI(Ω)
`solve`$(\Omega, F(\Omega), \mathbf{x}'(\Omega), \mathbf{x}''(\Omega))$
▷ Znajdź rozwiązanie $\mathbf{P}(\Omega)$
if `int`$(\mathbf{x}'(\Omega))$ **then**
▷ $\mathbf{x}'$ zawiera tylko elementy całkowite
if $F(\Omega) < F^{\text{best}}$ **then**
$F^{\text{best}} \leftarrow F(\Omega)$
$\mathbf{x}^{\text{best}} \leftarrow (\mathbf{x}'(\Omega), \mathbf{x}''(\Omega))$
end if
else
if $F(\Omega) \geq F^{\text{best}}$ **then**
▷ Ograniczanie
return
else
▷ Podział
Wybierz indeks j pewnego niecałkowitego elementu $\mathbf{x}'(\Omega)$
BBI$\big((\Omega - \{d_j(\Omega) \leq x_j \leq g_j(\Omega)\}) \cup \{d_j(\Omega) \leq x_j \leq \lfloor x'_j(\Omega) \rfloor\}\big)$
BBI$\big((\Omega - \{d_j(\Omega) \leq x_j \leq g_j(\Omega)\}) \cup \{\lceil x'_j(\Omega) \rceil \leq x_j \leq g_j(\Omega)\}\big)$
end if
end if
end procedure

7. Heurystyczne rozwiązanie problemu plecakowego oparte na zliczaniu ilo-

razów współczynników użyteczności i wag.

1.3 Zadania

- Proszę podać zarys algorytmu, który znajdzie najkrótsze ścieżki między wszystkimi parami wierzchołków w digrafie ważonym (można oprzeć się na znanym algorytmie, a nawet użyć go jako podprocedury). Proszę oszacować złożoność tego algorytmu wyrażoną za pomocą zmiennej opisującej wielkość problemu, w tym przypadku będzie to liczba wierzchołków digrafu.

- Proszę rozwiązać poniższy problem, ewentualnie przynajmniej podać przedział, w którym mieści się optymalna wartość z (szerokość przedziału nie może przekraczać 10% wartości optimum):

  ⋆ max $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

  ⋆ s.t.: $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12{,}5$

  ⋆ $x_i \in \mathbb{Z} \quad x_i \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$

- Proszę rozwiązać za pomocą metody podziałów i ograniczeń (B&B) następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{ograniczenia:} \quad & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Proszę rozwiązać za pomocą metody podziałów i ograniczeń (B&B) następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{ograniczenia:} \quad & -2x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

- Proszę rozwiązać poniższy problem, ewentualnie przynajmniej podać przedział, w którym mieści się optymalna wartość z (szerokość przedziału nie może przekraczać 10% wartości optimum):

  ⋆ max $z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$

  ⋆ s.t.: $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12{,}5$

  ⋆ $x_i \in \mathbb{Z} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$

- Proszę rozwiązać za pomocą metody podziałów i ograniczeń (B&B) następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{ograniczenia:} \quad & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Proszę rozwiązać za pomocą metody podziałów i ograniczeń (B&B) następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ \text{ograniczenia:} \quad & -2x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

1.4 Lektury

1.4.1 Materiał wykładu

Zagadnienia omówione w ramach tego wykładu są w dużym stopniu opisane w następujących książkach:

- Michał Pióro and Deepankar Medhi. *Routing, Flow and Capacity Design in Communication and Computer Networks*. Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2004: chapter 5.2, 6.4, appendix B.
- Poompat Saengudomlert. *Optimization for Communications and Networks*. CRC Press/Science Publishers, Boca Raton, FL, 2012: chapter 4.1-4.2.

1.4.2 Bibliografia uzupełniająca

- Jens Clausen. Branch and Bound Algorithms — Principles and Examples, March 1999. University of Copenhagen Technical Report: omówienie różnego rodzaju algorytmów typu „podziały i ograniczenia".
- Fedor V. Fomin and Petteri Kaski. Exact Exponential Algorithms. *Communications of the ACM*, 56(3):80–88, March 2013: trudności w rozwiązywaniu klasycznych zadań definiowanych na grafach.
- Eugene L. Lawler and David E. Wood. Branch-and-Bound Methods: A Survey. *Operations Research*, 14(4):699–719, July/August 1966: klasyczny tekst opisujący działanie algorytmów należących do paradygmatu „podziały i ograniczenia".
- Michael Sipser. *Wprowadzenie do teorii obliczeń*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, Poland, 2009: podręcznik nt. zagadnień związanych z oceną złożoności.

- Laurence A. Wolsey. *Integer Programming.* John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1998: bardzo dobry podręcznik nt. programowania całkowitoliczbowego.