Przedmiot:	Matematyka w projektowaniu sieci i systemów
Prowadzący:	Piotr Chołda piotr.cholda@agh.edu.pl
Kierunek:	Teleinformatyka
Semestr:	II sem. (zimowy) studiów magisterskich

Konspekt

Piotr Chołda

11 grudnia 2017

1 Podstawy teorii dualności

1.1 Dualność dla programowania liniowego LP

1. Dualne zadanie programowania liniowego — zadanie dualne do zadania programowania liniowego (*LP duality*).

2. Właściwości zadania/problemu pierwotnego/prymalnego (*primal problem*) i dualnego (*dual problem*).

3. Słaba dualność (*weak duality*).

4. Zasada dualności (*duality principle*) — silne twierdzenie o dualności (*strong duality* [*theorem*]).

5. Użycie dualności:

   - ograniczenia (*bounds*[1]) na rozwiązanie optymalne,
   - badanie wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany ograniczeń,
   - twierdzenie o odstępach swobodnych/komplemetarnych (*complementary slackness property*).

6. Wzajemna dualność problemów poszukiwania maksymalnego przepływu (*max flow*) i minimalnego rozcięcia (*min cut*).

1.2 Dualizacja Lagrange'a

7. Pojęcie relaksacji oraz jej właściwości.

8. Relaksacja Lagrange'a: funkcja Lagrange'a, zmienne dualne.

9. Dualizacja Lagrange'a (lagranżowska)[2]: funkcja dualna, definicja zadania dualnego z funkcją Lagrange'a (*Lagrangian dual*), słabe twierdzenie o dualności, odstęp dualności (*duality gap*), mnożniki Lagrange'a (*Lagrangian multipliers*).

[1] Proszę uważać na niebezpieczeństwo nieporozumienia związanego z polskim słowem „ograniczenie": np. w języku angielskim odróżnia się *constraint* oraz *bound* jako dwa różne pojęcia.

[2] Jeśli na wykładzie będziemy się posługiwać pojęciem dualizacji problemu innego niż LP, to będzie nam chodziło właśnie o ten typ dualności, tj. pozwalający usunąć pewne ograniczenia i przenieść je do funkcji celu.

10. Zadanie dualne do zadania programowania liniowego LP jako problem dualny Lagrange'a.
11. Zadanie dualne do zadania wypukłego i jego właściwości.

1.3 Zadania

1. Jaką najmniejszą wartość osiąga funkcja:

$$z = -10u_1 - 3u_2 + 6u_3 + 60u_4$$

określona na zbiorze opisanym następującymi ograniczeniami:

$$\begin{aligned} -u_1 + u_2 + u_3 + 4u_4 &\geq 5 \\ -2u_1 - u_2 - 3u_3 + u_4 &\geq 10 \\ u_i \geq 0, u_i \in \mathbb{R}, i &= 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

2. Proszę znaleźć wartość z^{opt} dla następującego zadania programowania matematycznego:

$$\begin{array}{rl} \max & z = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \\ \text{ograniczenia:} & 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -3 \\ & -2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \leq -3 \\ & x_i \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, 4) \end{array}$$

3. Proszę wykazać, że następujący zadania programowania matematycznego jest nieograniczony:

$$\min x_1 - 6x_2 + x_3.$$

Ograniczenia:

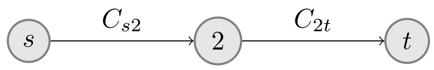
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\geq 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\geq 7 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0; x_1, x_2, x_3 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4. Proszę wykazać, że następujące zadanie programowania matematycznego jest nieograniczony:

$$\begin{array}{rl} \min & x_1 + x_2 \\ \text{ograniczenia:} & x_1 \geq 0 \end{array}$$

5. Dane jest zadanie optymalizacji liniowej:

$$\begin{array}{rl} \max & z = 3x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{ograniczenia:} & 4x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 \\ & x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3. \end{array}$$



Rysunek 1: Przykładowy graf ważony.

Jego rozwiązaniem optymalnym jest wektor $\mathbf{x} = [0 \quad 8 \quad 0]$. Proszę sprawdzić, w jakich granicach można zmieniać parametr q, aby poniższe zadanie:

$$\begin{aligned} &\max && z = 3x_1 + 3x_2 - x_3 \\ &\text{ograniczenia:} && 4x_1 + qx_2 + x_3 \leq 8 \\ & && x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

miało rozwiązanie optymalne $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{8}{q} & 0 \end{bmatrix}$.

6. Proszę sprawdzić, czy wektor $\mathbf{x} = [0 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 11]$ jest rozwiązaniem optymalnym poniższego zadania optymalizacji liniowej:

$$\begin{aligned} &\max && z = 2x_2 - 4x_3 + 3x_5 \\ &\text{ograniczenia:} && x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 19 \\ & && x_1 + 5x_2 - 5x_3 - x_4 + 2x_5 \leq -5 \\ & && x_1 - x_2 + 2x_3 + 10x_5 + x_6 \leq 17 \\ & && x_i \geq 0, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 6. \end{aligned}$$

7. Mamy dane dwa różne zadania programowania matematycznego:

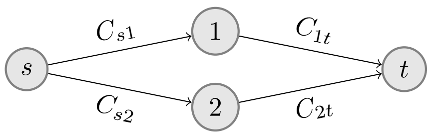
$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \ldots, m; x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n \right\}, \tag{1}$$

$$\max \left\{ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j : \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} u_i b_i; x_j \in \{0, 1\}, j = 1, \ldots, n \right\}, \tag{2}$$

gdzie: a_{ij}, b_i, c_j i u_i to pewne stałe wybrane ze zbioru $\mathbb{R}$, natomiast x_j to zmienne. Jedno z powyższych zadań stanowi relaksację drugiego. Które, dlaczego i ewentualnie przy spełnieniu jakich warunków dodatkowych?

8. Proszę pokazać, formułując odpowiednie zadania dla grafu ważonego przedstawionego na rys. 1, że zadaniem dualnym do problemu poszukiwania maksymalnego przepływu między węzłami s i t jest faktycznie problem poszukiwania minimalnego przekroju/rozcięcia.

9. Proszę pokazać, formułując odpowiednie zadania dla grafu ważonego przedstawionego na rys. 2, że zadaniem dualnym do problemu poszukiwania minimalnego przekroju/rozcięcia między węzłami s i t jest faktycznie problem poszukiwania przepływu maksymalnego.



Rysunek 2: Przykładowy graf ważony.