

Konspekt

Piotr Cholda

15 grudnia 2017

1 Relaksacje i teoria dualności jako wsparcie rozwiązywania problemów projektowania sieci

1.1 Zastosowanie metod opartych na teorii dualności do rozwiązywania problemów projektowania sieci

1. Generacja ścieżek (*path generation*) oparta na metodzie generacji kolumn (*column generation*), problem nadrzędny (*master problem*) i problem pomocniczy oparty na kosztach dualnych (*pricing problem*).
2. Metoda dekompozycji Bendersa generacji wierszy (*row generation*) w rozwiązywaniu problemów projektowania sieci, problem nadrzędny (*master problem*) i problem pomocniczy sprawdzenia spełnialności (*feasibility test problem*).

1.2 Zadania

1. Projektowanie szerokopasmowej sieci dostępowej można przedstawić następująco (zapis jest celowo nadmiarowy): w pewnej lokalizacji między centralą a grupą klientów instaluje się węzeł pośredniczący, do którego od centrali doprowadza się kabel światłowodowy, a potem od niego rozprowadza sygnał za pomocą kabli miedzianych do klientów (np. z użyciem techniki xDSL). Węzeł pośredniczący dokonuje konwersji optyczno-elektrycznej i pracuje jako koncentrator. Użycie jak najkrótszego segmentu złożonego z kabli miedzianych byłoby korzystne dla klienta, ponieważ im krótszy taki segment, tym większa przepływność, ale z punktu widzenia operatora sensowne jest użycie jak nadłuższych odcinków już dawno położonej infrastruktury miedzianej (w związku z użyciem istniejącej infrastruktury pomijamy tutaj koszty położenia kabli). Przy założonej przepływności, którą ma uzyskać każdy klient, długość okablowania miedzianego łączącego węzeł pośredniczący z klientem nie może być dłuższa niż R km. Z punktu widzenia topologii fizycznej sieć złożona z wierzchołków reprezentujących centralę, węzeł pośredniczący (węzły pośredniczące) oraz klientów jest drzewem. Problem polega na znalezieniu takiego umiejscowienia węzłów pośredniczących obsługujących wszystkich klientów, że pojedynczy węzeł pośredniczący może obsłużyć wszystkich przyłączonych klientów, tj.

- nie są oni od niego zbyt oddaleni (bo wtedy infrastruktura międziana nie zapewni im odpowiedniej przepływności) oraz
- węzeł pośredniczący dysponuje odpowiednimi urządzeniami nadawczo-odbiorczymi obsługującymi sygnał w kierunku klienta (typy urządzeń nie różnią się techniką transmisji, a tylko liczbą interfejsów i ceną).

Oznaczenia: S — zbiór klientów; J — zbiór potencjalnych lokalizacji węzłów pośredniczących; $J_s \subseteq J$ — zbiór lokalizacji, które znajdują się nie dalej niż R km od klienta s ; T_j — zbiór typów urządzeń nadawczych dostępnych w węzle pośredniczącym, gdyby go ulokowano w lokalizacji j ; dla każdego typu urządzenia $t \in T_j$ określa się:

- q_{jt} — liczbę klientów, których takie urządzenie może obsłużyć;
- c_{jt} — koszt takiego urządzenia.

Problem jest modelowany jako zadanie optymalizacji liniowej:

$$\min \sum_{j \in J} \sum_{t \in T_j} c_{jt} y_{jt} \quad (1)$$

$$\forall s \in S : \sum_{j \in J_s} x_{sj} = 1 \quad (2)$$

$$\forall j \in J : \sum_{s \in S: j \in J_s} x_{sj} \leq \sum_{t \in T_j} q_{jt} y_{jt} \quad (3)$$

$$\forall j \in J : \sum_{t \in T_j} y_{jt} \leq 1 \quad (4)$$

$$\forall s \in S \forall j \in J_s : x_{sj} \in \{0, 1\}; \quad \forall j \in J \forall t \in T_j : y_{jt} \in \mathbb{Z}$$

Proszę:

- podać znaczenie zmiennych x_{sj} i y_{jt} ;
- zinterpretować znaczenie funkcji celu (1), ograniczeń równościowych (2) i ograniczeń nierównościowych (3)-(4);
- opisać metodę, za pomocą której będzie można dokładnie rozwiązać ten problem optymalizacyjny;
- określić, czy i ewentualnie jak relaksacja liniowa ograniczenia (4) wpłynie na rozwiązanie optymalne;
- zdualizować ograniczenia (3);
- stwierdzić, czy w znalezionej topologii wierzchołek reprezentujący węzeł pośredniczący może być liściem i jaki jest jego stopień;
- określić, który węzeł może być traktowany jako korzeń drzewa opisującego topologię takiej sieci dostępowej;
- podać przykład konkretnych danych, dla których ten problem nie będzie miał rozwiązania.

(Uwaga: zapis „ $s \in S : \bigcirc$ ” użyty w (3) oznacza „wszystkie takie s należące do zbioru S , że warunek \bigcirc jest spełniony”.)

2. RWA (*Routing and Wavelength Assignment*), tj. problem routingu i przydziału kanałów optycznych w sieci WDM (*Wavelength Division Multiplexing*, w której długość fali służy do zwielokrotnienia liczby kanałów optycznych w poszczególnych łączach światłowodowych) można przedstawić następująco: połączenie między węzłami używa kanałów optycznych zestawionych z nośnych oferowanych przez łącza światłowodowe stanowiące ścieżkę między tymi węzłami w topologii sieci, \mathcal{L} — zbiór łącz światłowodowych (między poszczególnymi węzłami sieci optycznej); \mathcal{W} — zbiór numerów nośnych optycznych dostępnych na każdym z łącz światłowodowych (w każdym łączu jest dostępnych tyle samo nośnych, każda używa innej częstotliwości); \mathcal{S} — zbiór połączeń (każde jest nawiązywane między pewną parą węzłów w sieci); t^s — wielkość zapotrzebowania (wyrażona w liczbie kanałów optycznych) dla każdego połączenia $s \in \mathcal{S}$; r^s — opłata (wyrażana monetarnie) wnoszona przez klienta operatorowi za kupno jednego kanału optycznego w połączeniu $s \in \mathcal{S}$; α_l — koszt (wyrażany monetarnie) użycia pojedynczego kanału optycznego na łączu $l \in \mathcal{L}$; \mathcal{P}^s — zbiór przeliczonych wcześniej ścieżek, które mogą służyć do przeniesienia kanałów optycznych realizujących połączenie $s \in \mathcal{S}$; \mathcal{P}_l — zbiór przeliczonych wcześniej ścieżek, które używają łącza światłowodowego $l \in \mathcal{L}$; \mathcal{P} — zbiór wszystkich przeliczonych wcześniej ścieżek, które mogą służyć do realizacji połączeń; x_w^p — zmienne problemu. Problem jest modelowany jako następujące zadanie optymalizacji:

$$\begin{aligned} & \max z \\ & \forall l \in \mathcal{L} \forall w \in \mathcal{W} : \sum_{p \in \mathcal{P}_l} x_w^p \leq 1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\forall s \in \mathcal{S} : \sum_{p \in \mathcal{P}^s} \sum_{w \in \mathcal{W}} x_w^p \leq t^s \quad (6)$$

$$\forall p \in \mathcal{P} \forall w \in \mathcal{W} : x_w^p \in \{0, 1\}$$

Proszę: (i) podać znaczenie zmiennych x_w^p ; (ii) zapisać matematycznie wartość funkcji celu z , która ma służyć do maksymalizacji zysku operatora tej sieci; (iii) wytłumaczyć sens ograniczeń nierównościowych (5)-(6); (iv) znaleźć liczbę zmiennych i ograniczeń, wyrażonych za pomocą $|\mathcal{L}|$, $|\mathcal{W}|$, $|\mathcal{S}|$ i $|\mathcal{P}|$; (v) zdecydować, czy rozwiązanie zawsze istnieje (a jeśli nie, to podać przykład konkretnych danych, dla których rozwiązania nie ma); (vi) sprawdzić, czy to jest sieć z konwersją długości fali (tj. czy połączenie, dla którego $t^s = 1$, może korzystać z różnych długości fal jako nośnych optycznych kanałów); (vii) zdualizować ograniczenia (6).

3. Dany jest następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{aligned} & \max && 2x_1 + x_2 \\ \text{ograniczenia:} & && -2x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & && 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & && -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & && 2x_1 \leq 3 \\ & && x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned} \quad (7)$$

Proszę znaleźć rozwiązanie problemu dualnego opartego na relaksacji Lagrange'a, w której zrelaksowane jest tylko ograniczenie oznaczone jako (7).

4. Proszę porównać otrzymane z zastosowaniem dwóch różnych typów relaksacji ograniczenia dolne dla rozwiązania optymalnego następującego problemu programowania matematycznego:

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_1 - x_2 \\ \text{ograniczenia:} & x_1 - x_2 \geq -1 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & 6x_1 + x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

1.3 Lektury

1.3.1 Materiał wykładu

Zagadnienia omówione w ramach tego wykładu są w dużym stopniu opisane w następujących książkach:

- Michał Pióro and Deepankar Medhi. *Routing, Flow and Capacity Design in Communication and Computer Networks*. Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2004: chapter 5.1.2, 5.2.2-5.2.3, 5.4, appendix A.5-A.7.
- Poompat Saengudomlert. *Optimization for Communications and Networks*. CRC Press/Science Publishers, Boca Raton, FL, 2012: chapter 2.4-2.7, 3.4, 4.4.

1.3.2 Lektura obowiązkowa

1.3.3 Bibliografia uzupełniająca

- Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows. Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1993: między innymi metoda generacji kolumn, ale też inne zastosowania relaksacji i dualizacji.
- Marco E. Lübbecke and Jacques Desrosiers. Selected Topics in Column Generation. *Operations Research*, 53(6):1007–1023, November/December 2005: przegląd zagadnień związanych z generacją kolumn w LP oraz ILP.
- Jaudelice C. de Oliveira and Caterina Scoglio. Lagrange Relaxation Based Algorithm for DiffServ/MPLS Network Dimensioning with QoS Guarantees. In *Proc. IEEE International Conference on Communications ICC 2004*, Paris, France, June 20-24, 2004: przykład użycia relaksacji Lagrange'a z aplikacją metody subgradientów do poszukiwania rozwiązania problemu sieciowego.
- Michał Pióro and Deepankar Medhi. *Routing, Flow and Capacity Design in Communication and Computer Networks*. Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2004: podstawowe problemy projektowania sieci z zastosowaniem metod opartych na dualizacji.

Przedmiot: Matematyka w projektowaniu sieci i systemów
Prowadzący: Piotr Cholda piotr.cholda@agh.edu.pl
Kierunek: Teleinformatyka
Semestr: II sem. (zimowy) studiów magisterskich
.....

- Poompat Saengudomlert. *Optimization for Communications and Networks*. CRC Press/Science Publishers, Boca Raton, FL, 2012: użycie teorii dualności w rozwiązywaniu problemów projektowania sieci.
- Laurence A. Wolsey. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1998: podręcznik nt. programowania całkowitoliczbowego, również z metodami rozwiązywania (dekompozycje, generacja kolumn).