Konspekt

Piotr Chołda

3 kwietnia 2018

1 Podstawowe pojęcia teorii grafów

1.1 Podstawowe definicje teorii grafów

1. Graf jako abstrakcja sieci telekomunikacyjnej lub komputerowej.

2. Matematyczny opis **grafu prostego**:

   - $G = (V, E)$ (graf jest zbiorem, ale typowo używamy reprezentacji graficznej — uwaga na związane z nią pułapki!; możliwe też inne podejście — algebraiczne),
   - V: wierzchołki (*vertex, pl. vertices*), w praktyce sieciowej nazywane węzłami (*nodes*); rząd grafu (*order*),
   - E: krawędzie (*edge*), $e = \{v, w\} \in E$, $v, w \in V$, $v \neq w$, w praktyce sieciowej nazywane łączami (*links*); rozmiar grafu (*size*),
   - wierzchołki mogą być połączone/sąsiednie (*adjacent*, *neighboring*, *connected*), natomiast wierzchołki i krawędzie — incydentne (*incident*).

3. Stopień węzła (*degree*) $deg(v)$:

   - $|E| = \frac{1}{2}\sum_{v \in V} deg(v)$[1],
   - średni stopień węzła: $\mathbb{E}[deg] = \frac{1}{|V|}\sum_{v \in V} deg(v_i) = 2\frac{|E|}{|V|}$,
   - lemat o uściskach dłoni (o podawaniu rąk, *handshaking theorem*).

4. Macierze podstawowe dla tzw. algebraicznej teorii grafów: macierz sąsiedztwa (*adjacency matrix*) $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $deg(v_i) = \sum_{j=1}^{|V|} a_{ij}$; macierz incydencji (*incidence matrix*).

5. Trasa/marszruta/łańcuch w grafie (*walk*); liczba tras (o określonej długości) między węzłami w grafie może być wyliczona z macierzy $\mathbf{A}$.

6. Ścieżka/droga w grafie (*path*):

   - $< v, w >$ jest n-tką wierzchołków $< v = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n = w >$, takich że $\{v_i, v_{i+1}\}$ jest krawędzią w grafie i krawędzie nie powtarzają się,
   - długość ścieżki jako liczba krawędzi związanych z taką n-tką $(n-1)$.

[1] Czasami tę zależność utożsamia się z lematem o uściskach dłoni.

7. Cykl (*cycle*) w grafie.
8. Odległość wierzchołków w grafie (*distance*), $dist(i, j)$ (długość najkrótszej ścieżki między wierzchołkami, *shortest path*).
9. Średnica grafu (*diameter*), $d(G)$ (największa odległość).
10. Podgraf (*subgraph*).
11. Spójność grafu (*connectivity*):
    - graf spójny (*connected graph*),
    - składowa spójności/komponent/klaster ((*connected*) *component*, *cluster*),
    - zbiór rozspajający (*edge partition set*), rozcięcie/przekrój rozdzielający (*edge cut*), most (*bridge*),
    - spójność (liczba spójności) krawędziowa $\lambda(G)$ (*edge connectivity*),
    - zbiór separujący (*vertex partition set*), separator (*vertex cut*), przegub tj. wierzchołek rozspajający (*articulation point*, *cut vertex*),
    - spójność (liczba spójności) wierzchołkowa $\kappa(G)$ (*vertex connectivity*),
    - zależność ogólna: $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq deg_{\min} \leq \frac{2|E|}{|V|}$,
    - twierdzenia Mengera.

1.2 Wyróżnione rodzaje grafów

1. Wyróżnione typy grafów:
    - pełny (*full mesh*, *complete graph*) K_n,
    - cykliczny (*cyclic*) C_n,
    - liniowy (*linear*) P_n,
    - dwudzielny (*bipartite*) $G(V_1 \cup V_2, E)$, graf pełny dwudzielny $K_{n,m}$,
    - gwiazda (*star*) $K_{1,n-1}$,
    - hiperkostka/hipersześcian (*hypercube*) Q_n.
2. Drzewo (*tree*) T_n:
    - pojęcie liścia (*leaf*, pl. *leaves*; *pendant*),
    - las (*forest*),
    - $n - 1$: liczba krawędzi drzewa o n wierzchołkach,
    - drzewo binarne (*binary tree*), ograniczenie na średnicę drzewa binarnego.
3. Drzewo rozpinające (spinające, *spanning tree*).
4. Graf ważony (*weighted graph*), $G = (V, E, f)$, $f : E \to \mathbb{R}$. Siła (*strength*) węzła.
5. Cykl Eulera i grafy eulerowskie, twierdzenie Eulera, mosty królewieckie.

6. Cykl Hamiltona i grafy hamiltonowskie.

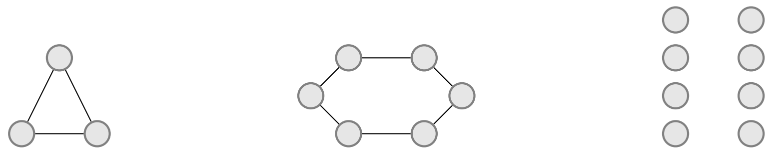
7. Problem komiwojażera (*travelling salesman problem*). Problem chińskiego listonosza (*Chinese postman/route inspection problem*).

8. Graf skierowany (digraf), pojęcie łuku (*arc*), $G = (V, A)$, $A \subseteq \{(x, y) : x, y \in V, x \neq y\}$.

9. Sieć jako digraf ważony, przepływność/przepustowość[2] (*capacity*), przepływ (*flow*), źródło przepływu (*source*), ujście/odpływ przepływu (*sink*), pojęcie łącza nasyconego (*saturated edge/link*).

1.3 Zadania

1. Które z grafów pokazanych na rysunku 1 są podgrafami grafu Petersena pokazanego na rysunku 2? Odpowiedź proszę uzasadnić na przykład umieszczając odpowiednie etykiety.



(a) (b) (c)

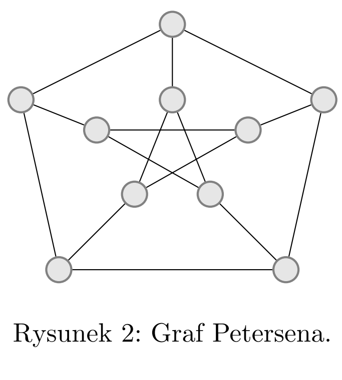
Rysunek 1: Grafy związane z zadaniem 1.

2. Jaka jest spójność krawędziowa grafu pełnego o 45 krawędziach?

3. Proszę narysować taki graf G, w którym minimalny stopień wierchołka wynosi k i spójności spełniają następujące relacje: $\kappa(G) < \lambda(G) < k$.

4. Proszę narysować graf, w którym istnieje dokładnie sześć cykli. Proszę podać jego średnicę.

[2] W języku polskim specjaliści od teorii grafów i optymalizacji często używają tych określeń zamiennie, ale należy pamiętać, że w języku angielskim *capacity* jest właściwością interfejsu (np. przepływność bitowa), natomiast *throughput* (przepustowość) to miara chwilowej jakości działania sieci.



Rysunek 2: Graf Petersena.

5. Czy hiperkostka Q_3 jest grafem dwudzielnym?

6. Czy hiperkostka Q_4 jest grafem eulerowskim?

7. Czy hiperkostka Q_3 jest grafem hamiltonowskim? Jeśli tak, to proszę podać sposób konstruowania cyklu hamiltonowskiego w takim grafie.

8. Jaka jest różnica wartości między spójnością wierzchołkową i spójnością krawędziową hiperkostki o 32 wierzchołkach?

9. Niech n będzie liczbą uzyskaną przez dodanie 10 do liczby reprezentowanej przez ostatnią cyfrą numeru własnego indeksu (np. dla numeru indeksu $xxxxx5$: $n = 15$). Proszę narysować graf prosty, który ma n wierzchołków, jest grafem spójnym i nie zawiera cykli. Proszę znaleźć gęstość tego grafu. Proszę nadać etykiety $1, \ldots, n$ poszczególnym wierzchołkom. Następnie proszę zmodyfikować ten graf, dodając do niego nowe krawędzie w taki sposób, żeby macierz sąsiedztwa $\mathbf{A}$ grafu po modyfikacji charakteryzowała się następującą właściwością: $\forall_{j=1,\ldots,n} \left(\mathbf{A}^2\right)_{jj} = X$ (wartość X proszę sobie wybrać według własnego uznania) i żeby graf zmodyfikowany też był grafem prostym.

1.4 Lektury

1.4.1 Materiał wykładu

Zagadnienia omówione w ramach tego wykładu są w dużym stopniu opisane w następującej pozycji:

- Robin J. Wilson. *Wprowadzenie do teorii grafów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000 (§ 1-3, § 5-7, § 9).

1.4.2 Bibliografia uzupełniająca

- LiYing Cui, Soundar Kumara, and Réka Albert. Complex Networks: An Engineering View. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 10(3):10–25, third quarter 2010: wprowadzenie podstawowych pojęć teorii grafów wraz z ich zastosowaniem w optymalizacji sieci.

- Robin J. Wilson. *Wprowadzenie do teorii grafów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000: zwięzłe wprowadzenie do teorii grafów.

- Piet Van Mieghem. *Graph Spectra for Complex Networks.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2011: rozdziały początkowe zawierają wiele ciekawych zależności opartych na tzw. algebraicznej teorii grafów.