# Konspekt

Piotr Chołda

18 kwietnia 2018

## 1 Programowanie liniowe w zastosowaniach telekomunikacyjnych

### 1.1 Optymalizacja z użyciem programowania liniowego LP (*linear programming*)

1. Programowanie liniowe: postać ogólna zadania.
2. Programowanie liniowe: postać standardowa zadania (*standard form*):
   - MIN:
     - ⋆ $z = \sum_{j=1,2,\ldots,n} c_j x_j$
   - S.t.:
     - ⋆ $\sum_{j=1,2,\ldots,n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, 2, \ldots, m;$
     - ⋆ $x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, n;$
     - ⋆ $x_j \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

   i jej sformułowanie macierzowe[1]:
   - MIN:
     - ⋆ $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ (często pomija się oznaczanie transpozycji, ponieważ zazwyczaj wiadomo, o co chodzi; dlatego pisze się też: $z = \mathbf{cx}$).
   - S.t.:
     - ⋆ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$;
     - ⋆ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

   można to zapisać kompaktowo: $z = \max\{\mathbf{cx} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$.
3. Sprowadzanie dowolnego zadania programowania liniowego do postaci standardowej.
4. Programowanie liniowe: postać kanoniczna/normalna zadania (*canonical form*).

[1] W tym przypadku wektor oznacza dla nas „wektor kolumnowy", np. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

5. Zależność między funkcją celu i ograniczeniami dla programowania liniowego — różne możliwości nt. istnienia rozwiązań:
   - istnieje **jedno** rozwiązanie dopuszczalne, które oczywiście jest optymalne;
   - istnieje **nieskończenie wiele** rozwiązań dopuszczalnych, w tym **jedno** jest optymalne;
   - istnieje **nieskończenie wiele** rozwiązań dopuszczalnych, w tym **nieskończenie wiele** optymalnych;
   - problem jest nierozwiązywalny (*infeasible*), tj. sprzeczny (założenia/ograniczenia są sprzeczne i zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest pusty): **zero** rozwiązań dopuszczalnych;
   - problem jest nieograniczony (*unbounded*): dla każdego rozwiązania dopuszczalnego można znaleźć inne rozwiązanie dopuszczalne o jeszcze lepszej wartości funkcji celu — **nieskończenie wiele** rozwiązań dopuszczalnych, ale **zero** rozwiązań optymalnych.
6. Kombinacja wypukła (*convex combination*). Twierdzenie Caratheodory'ego o powłokach wypukłych podzbiorów przestrzeni euklidesowych.
7. Graficzny sposób rozwiązywania zadań programowania liniowego dla prostych problemów.
8. Podstawowy sposób rozwiązywania zadań programowania liniowego (George Dantzig 1947 — metoda sympleks lub sympleksów albo algorytm sympleksowy, *simplex algorithm*).

## 1.2 Proste problemy alokacji zasobów i wymiarowania

1. Pojęcie projektowania z użyciem tzw. przepływów wielotowarowych (*multicommodity flows*).
2. Problemy wymiarowania (*dimensioning*) a problemy przydzielania (rozmieszczania/ustanawiania) zasobów (*resource allocation*), sieć zwymiarowana (*capacitated*) a sieć niezwymiarowana (*uncapacitated*). Problemy przydzielania zasobów są jednocześnie problemami rozpływu ruchu/przepływów, czyli problemami trasowania/rutingu.
3. Najprostszy problem wymiarowania: rozmieszczenia zasobów z jednoczesnym wymiarowaniem sieci (*Uncapacitated Flow Allocation* [*and Dimensioning*] *Problem*), tj. rozmieszczanie przepływów w sieci bez narzuconych przepływności i z dopuszczalnymi przepływnościami ciągłymi; problem programowania liniowego LP:
   - Indeksy:
     - ⋆ $e = 1, 2, \ldots, E$ łuki;
     - ⋆ $v = 1, 2, \ldots, V$ węzły;
     - ⋆ $d = 1, 2, \ldots, D$ zapotrzebowania/żądania (*demands*), zapotrzebowanie z węzła $v_1$ do węzła $v_2$ nie musi być identyczne z zapotrzebowaniem z węzła $v_2$ do węzła $v_1$.

- Stałe:
  - ⋆ $h_d$ rozmiar zapotrzebowania $d$, które ma być zrealizowane (*volume of demand*);
  - ⋆ $\xi_e$ koszt **zakupu** (np. wydzierżawienia, być może zainstalowania) jednostki przepływności na łączu $e$ (*unit/marginal cost of link*), np. $\xi_4 = 2 \times 10^{-6}$ €/b/s;
  - ⋆ $s_d$ węzeł źródłowy (źródło) dla zapotrzebowania $d$;
  - ⋆ $t_d$ węzeł docelowy (ujście) dla zapotrzebowania $d$;
  - ⋆ $a_{ev} = 1$ jeśli łuk $e$ rozpoczyna się w węźle $v$; 0, w przeciwnym przypadku;
  - ⋆ $b_{ev} = 1$ jeśli łuk $e$ kończy się w węźle $v$; 0, w przeciwnym przypadku.
- Zmienne:
  - ⋆ $x_{ed} \geq 0$ wielkość przepływu realizującego zapotrzebowanie $d$ na łuku $e$ (***continuous*** *flow realizing/satisfying demand d on arc e*), wartość ciągła ($x_{ed} \in \mathbb{R}$);
  - ⋆ $y_e$ wielkość przepływności przydzielonej do użycia (np. wydzierżawienia, zainstalowania) na łączu $e$ (***continuous*** *capacity to be installed on arc e*), wartość ciągła.
- Funkcja celu (*objective*, *goal function*): min $\sum_e \xi_e y_e$ (minimalizacja kosztu instalacji/użycia przepływności).
- Ograniczenia (*constraints*, będziemy też pisać *s.t.*, *subject to*):
  - ⋆ $\sum_e a_{ev} x_{ed} - \sum_e b_{ev} x_{ed} = \begin{cases} h_d & \text{jeśli } v = s_d \\ 0 & \text{jeśli } v \neq s_d, v \neq t_d \\ -h_d & \text{jeśli } v = t_d \end{cases}$

    dla wszystkich zapotrzebowań i WĘZŁÓW [NODEs]: $d = 1, 2, \ldots, D$, $v = 1, 2, \ldots, V$ (*flow conservation law*); jednocześnie są to ograniczenia związane z realizacją zapotrzebowania (*demand constraints*);
  - ⋆ $\sum_d x_{ed} = y_e$ dla wszystkich ŁUKÓW/ŁĄCZY [LINKs]: $e = 1, 2, \ldots, E$; ograniczenia na przepływność (*capacity constraints*);
  - ⋆ **wszystkie** zmienne są **nieujemne i ciągłe** (*non-negative continuous*).
- Zapis ograniczeń $\sum_d x_{ed} = y_e \quad e = 1, 2, \ldots, E$ często (tj. w różnych książkach, artykułach itd.) występuje w formie $\forall_{e \in \{1,\ldots,E\}} \sum_d x_{ed} = y_e$, a więc oznacza $E$ różnych ograniczeń.
- Zamiast pisać $\sum_e a_{ev} x_{ed}$ moglibyśmy napisać również $\sum_{i \in N: e=(v,i) \in A} x_{ed}$, gdzie $N$ to zbiór węzłów ($N = \{1, 2, \ldots, V\}$), natomiast $A$ to zbiór łuków ($A = \{1, 2, \ldots, E\}$). Właśnie takie podejście będziemy preferować w przypadku implementacji problemów z użyciem programu CPLEX.

4. Problem przydzielenia/ustanowienia przepływów w sieci z zadanymi przepływnościami (CFAP, *Capacitated Flow Allocation Problem*):
   - Indeksy: (jak poprzednio).

- Stałe:
  - ⋆ $h_d$ (jak poprzednio);
  - ⋆ $s_d$ (jak poprzednio);
  - ⋆ $t_d$ (jak poprzednio);
  - ⋆ $a_{ev}$ (jak poprzednio);
  - ⋆ $b_{ev}$ (jak poprzednio);
  - ⋆ $\xi_e$ koszt **użycia** (wcześniej zainstalowanej) jednostki przepływności na łączu $e$;
  - ⋆ $c_e$ przepływność zainstalowana na łączu $e$.
- Zmienne:
  - ⋆ $x_{ed}$ (jak poprzednio),
  - ⋆ $y_e$ (jak poprzednio).
- Funkcja celu: min $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \xi_e y_e$ (ale jeśli chcemy tylko znaleźć przepływy, co wcale nie musi być zadaniem trywialnym, to funkcja celu może być dowolna, bo może nas interesować jedynie znalezienie rozwiązania dopuszczalnego).
- Ograniczenia:
  - ⋆ $\sum_e a_{ev} x_{ed} - \sum_e b_{ev} x_{ed} = \begin{cases} h_d & \text{jeśli } v = s_d \\ 0 & \text{jeśli } v \neq s_d, v \neq t_d \\ -h_d & \text{jeśli } v = t_d \end{cases}$
    $d = 1, 2, \ldots, D$, $v = 1, 2, \ldots, V$;
  - ⋆ $\sum_d x_{ed} = y_e$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E$
  - ⋆ $y_e \leq c_e$ $\quad e = 1, 2, \ldots, E$;
    (zmienne $y_e$ są używane pomocniczo, żeby bardziej kompaktowo zapisać funkcję celu)
  - ⋆ wszystkie zmienne są nieujemne i ciągłe.

5. Różne sposoby formułowania problemów projektowania sieci dotyczących alokacji zasobów dla przepływów za pomocą LP: sformułowanie typu węzeł-łącze (N-L, *node-link formulation*), sformułowanie typu łącze-ścieżka (L-P, *link-path formulation*, ewent. *arc-flow formulation*). Przedtem używaliśmy sformułowania N-L:

   - Indeksy: $d$, $e$, $v$...
   - Zmienne: $x_{ed}$,...
   - Ograniczenia:
     - ⋆ dla wszystkich WĘZŁÓW [NODEs]: $v = 1, 2, \ldots, V$, ...;
     - ⋆ dla wszystkich ŁUKÓW/ŁĄCZY [LINKs]: $e = 1, 2, \ldots, E$;
     - ⋆ ...

6. Problem CFAP w sformułowaniu łącze-ścieżka L-P:

   - Indeksy:
     - ⋆ $e = 1, 2, \ldots, E$ łącza/łuki;
     - ⋆ $d = 1, 2, \ldots, D$ zapotrzebowania;

- ⋆ $p = 1, 2, \ldots, P_d$ dopuszczalne ścieżki przepływów mogących realizować zapotrzebowanie $d$ (*candidate paths for flows realizing demand* $d$), ścieżkę dopuszczalną o konkretnym numerze $p$ dla konkretnego zapotrzebowania $d$ oznaczamy jako $\mathcal{P}_{dp}$ (np. $\mathcal{P}_{101,72}$ oznacza 72. ścieżkę dopuszczalną dla zapotrzebowania nr 101).

- Stałe:
  - ⋆ $\delta_{edp}$ $= 1$ jeśli łącze $e$ należy do ścieżki $p$ realizującej zapotrzebowanie $d$; w przeciwnym przypadku 0 ($\delta_{edp} = 1 \Leftrightarrow e \in \mathcal{P}_{dp}$);
  - ⋆ $h_d$ (jak poprzednio);
  - ⋆ $\xi_e$ (jak poprzednio);
  - ⋆ $c_e$ (jak poprzednio).
- Zmienne:
  - ⋆ $x_{dp}$ wielkość przepływu składowego realizującego zapotrzebowanie $d$, korzystającego ze ścieżki $p$;
  - ⋆ $y_e$ (jak poprzednio).
- Funkcja celu: min $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \xi_e y_e$.
- Ograniczenia:
  - ⋆ $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} = y_e$ dla każdego z łączy [LINKs] $e = 1, 2, \ldots, E$;
  - ⋆ $y_e \leq c_e$ dla każdego z łączy [LINKs] $e = 1, 2, \ldots, E$;
  - ⋆ $\sum_p x_{dp} = h_d$ $d = 1, 2, \ldots, D$ ograniczenia związane z realizacją zapotrzebowania na różnych ŚCIEŻKACH [PATHs] (*demand constraints*);
  - ⋆ wszystkie zmienne są nieujemne i ciągłe.

7. Ścieżki dopuszczalne:
   - W rzeczywistości mamy do czynienia z $p(d) = 1, 2, \ldots, P_d$, czyli dokładnie należałoby pisać $x_{d,p(d)}$, np. $x_{101,72(101)}$ czyli wielkość przepływu mającego realizować zapotrzebowanie nr 101 na dopuszczalnej dla tego przepływu ścieżce nr 72.[2]
   - Pojedyncza ścieżka dla określonego zapotrzebowania $d$ i numeru ścieżki $p$ to po prostu podzbiór łączy: $\mathcal{P}_{dp} \subseteq \{1, 2, \ldots, E\}$.
8. „Właściwość $D + E$" rozwiązania problemu CFAP (właściwość jest dobrze widoczna przy sformułowaniu L-P). Warto pamiętać, że powyżej użyto nadmiarowej liczby ograniczeń: moglibyśmy zapisywać funkcję celu jako $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \sum_d \xi_e \delta_{edp} x_{dp}$, a ograniczenia typu LINK po prostu jako $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} \leq c_e$ (nie musimy w ogóle używać zmiennych $y_e$).
9. Problem UFAP w sformułowaniu L-P:
   - Indeksy i stałe: (jak poprzednio).
   - Zmienne:

[2] Ale nie będziemy tak pisać na wykładzie, bo indeksowanie indeksów jest zaciemniające (i nie ma sensu w przypadku sformułowania w postaci ogólnej). Za to w sytuacji opracowywania problemów za pomocą oprogramowania typu CPLEX takie indeksowanie jest konieczne. W zapisie ogólnym pomijamy również przecinki między indeksami.

- ⋆ $x_{dp}$ (jak poprzednio);

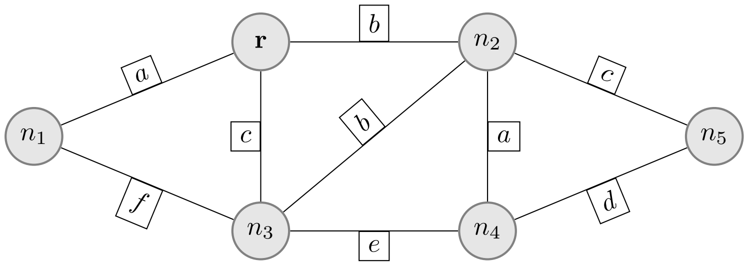
- Funkcja celu: min $\mathbf{F}(\mathbf{y}) = \sum_e \xi_e y_e$.
- Ograniczenia:
  - ⋆ $\sum_p x_{dp} = h_d$ $d = 1, 2, \ldots, D$;
  - ⋆ $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} \leq y_e$ $e = 1, 2, \ldots, E$ (tutaj mogłaby też być równość, to jest po prostu wyliczenie obciążenia łączy);
  - ⋆ **wszystkie** zmienne są **nieujemne i ciągłe**.

10. Wady i zalety różnych sformułowań:

- Sformułowanie N-L musi używać łuków, podczas gdy L-P może używać tylko nieskierowanych łączy. Można tak zrobić, jeśli przyjmuje się, że połączenia realizujące zapotrzebowania są dwukierunkowe (*bi-directional*), tj. używają tych samych łączy (każde łącze odpowiada parze przeciwnie skierowanych łuków o tych samych parametrach kosztowych i przepływnościowych) i są symetryczne (tj. w obu kierunkach jest ta sama wartość zapotrzebowania).
- W sformułowaniu L-P mamy wprost wyznaczone różne przepływy dla rozwiązania optymalnego (ważne z punktu widzenia zarządzania), a w N-L mamy je podane nie wprost i trzeba przetworzyć wynik, żeby uzyskać dane potrzebne do zarządzania siecią (tj. konfigurację przepływów między źródłem i ujściem zapotrzebowania): dla każdego zapotrzebowania należy rozwiązać problem poszukiwania maksymalnego przepływu z wartościami przepływności dopuszczalnych na łukach $e$ równych optymalnym wartościom zmiennych $x_{ed}$.
- W sformułowaniu L-P nie musimy używać wszystkich możliwych ścieżek (które w N-L występują nie wprost), np. można ograniczyć długość dopuszczalnych ścieżek (ważne w sieciach optycznych).
- W sformułowaniu L-P zapotrzebowanie $d$ wcale nie musi dotyczyć pary węzłów, a „ścieżka" $\mathcal{P}_{dp}$ może być np. drzewem o wielu liściach albo cyklem, albo może nawet być niespójnym zbiorem krawędzi (z jakichś powodów może nam to być potrzebne w przypadku konkretnego problemu, który jest bardziej złożony niż problem poszukiwania najprostszego rozpływu ruchu między punktami).
- Poszukiwanie dopuszczalnych ścieżek dla sformułowania L-P jest niezależne od rozwiązywania problemu optymalnego i może okazać się żmudne.
- Problemy podane w sformułowaniu L-P można łatwiej zdekomponować i uprościć sobie rozwiązywanie problemu.

## 1.3 Zadania

- Pewien problem optymalizacyjny zadano w następujący sposób:
  - ⋆ funkcja celu: min $z = 2x_1 + 2x_2$
  - ⋆ ograniczenia:
    - ∗ $x_1 \leq 5$




Rysunek 1: Przykładowy graf ważony

  * $x_2 \leq 5$
  * $Ax_1 + Bx_2 \leq C$

Proszę podać takie przykładowe wartości $A$, $B$ i $C$ ($A, B, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$), że ten problem nie będzie miał rozwiązania.

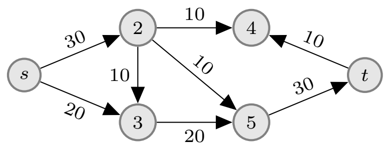
- Na rys. 1 dany jest graf prosty ważony (wartości wag w prostokącikach należy zastąpić wartościami reprezentowanymi przez cyfry numeru własnego indeksu, gdzie numer indekstu to $fedcba$). Proszę znaleźć drzewo najkrótszych ścieżek z korzenia **r**, a następnie sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania tego drzewa (indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu). Jeśli to potrzebne, każdą krawędź grafu prostego można zastąpić parą łuków przeciwnie skierowanych o tej samej wadze.

- Na rys. 1 dany jest graf prosty ważony (wartości wag w prostokącikach należy zastąpić wartościami reprezentowanymi przez cyfry numeru własnego indeksu, gdzie numer indekstu to $fedcba$). Proszę znaleźć minimalne rozcięcie między $n_1$ i $n_5$, a następnie sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania tego minimalnego rozcięcia (indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu). Jeśli to potrzebne, każdą krawędź grafu prostego można zastąpić parą łuków przeciwnie skierowanych o tej samej wadze.

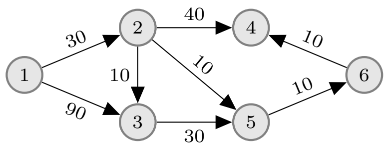
- Niech $x_{ij}$ przyjmuje wartość 1, jeśli ruter $i$ jest fizyczne połączony z ruterem $j$ (w przeciwnym przypadku $x_{ij}$ przyjmuje wartość 0). Niech w naszej sieci będzie $N$ ruterów. Jak można zinterpretować poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi zajmującemu się konfiguracją ruterów?

$$\begin{array}{ll} x_{ii} = 0 & i = 1, 2, \ldots, N \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq 5 & i = 1, 2, \ldots, N \\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij} \geq 1 & i = 1, 2, \ldots, N \end{array}$$

- W każdym z $N$ interesujących nasze przedsiębiorstwo miast instalujemy rutery. Niech $x_{ij}$ przyjmuje wartość 1, jeśli nasze przedsiębiorstwo instaluje rutery produkowane przez firmę oznaczoną indeksem $i$ w mieście indeksowanym za pomocą $j$ (w przeciwnym przypadku $x_{ij}$ przyjmuje wartość 0). Na rynku mamy $P$ firm produkujących rutery. Jak można zinterpretować




Rysunek 2: Digraf ważony związany z zadaniem 1.3




Rysunek 3: Digraf ważony związany z zadaniem 1.3

poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi zajmującem się instalacją ruterów?

$$\sum_{i=1}^{P} x_{ij} \geq 2 \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

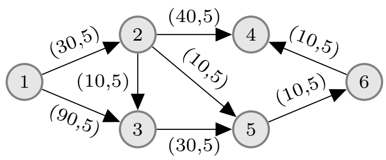
- W każdym z $P$ interesujących nas miast nasze przedsiębiorstwo instaluje koncentratory. Niech $x_{ij}$ oznacza liczbę klientów przyłączonych do koncentratora w mieście indeksowanym za pomocą $j$, ale tylko takich klientów, którzy wykupili klasę obsługi QoS oznaczaną indeksem $i$. Nasze przedsiębiorstwo obsługuje $N$ typów klas obsługi. Jak można zinterpretować poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi instalującemu koncentratory?

$$\sum_{i=2}^{N} x_{ij} = x_{1j} \qquad j = 1, 2, \ldots, P$$

- Dany jest digraf ważony, w którym wagi oznaczają przepływności łączy reprezentowanych przez łuki (rys. 2). Proszę podać wielkość przepływu maksymalnego między wierzchołkami $s$ oraz $t$, a następnie sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania tego przepływu (indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu).

- Dany jest digraf ważony (reprezentujący sieć), w którym wagi oznaczają koszty jednostkowe użycia przepływności na łączach (rys. 3). Proszę sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania najtańszego rozpływu ruchu, jeśli w sieci istnieją dwa zapotrzebowania: pierwsze między węzłami 1 i 6, a drugie między węzłami 2 i 4. Wolumen ruchu, który ma być przenoszony na potrzeby każdego z zapotrzebowań to 10. Proszę użyć sformułowania typu N-L (węzeł-łącze); indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu. Jakie jest rozwiązanie optymalne tego problemu?

- Dany jest digraf ważony, w którym wagi podane w nawiasie oznaczają: pierwsza z nich — koszt jednostkowy użycia przepływności na łukach,




Rysunek 4: Digraf ważony związany z zadaniem 1.3

druga z nich — przepływność dostępną na łączu (rys. 4). Proszę sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania najtańszego rozpływu ruchu, jeśli w sieci istnieją dwa zapotrzebowania: pierwsze między węzłami 1 i 6, a drugie między węzłami 2 i 4. Wolumen ruchu, który ma być przenoszony na potrzeby każdego z zapotrzebowań to 10. Proszę użyć sformułowania typu L-P (łącze-ścieżka); indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu. Jakie jest rozwiązanie optymalne tego problemu?

## 1.4 Lektury

### 1.4.1 Materiał wykładu

Zagadnienia omówione w ramach tego wykładu są w dużym stopniu opisane w następującej książce:

- Deepankar Medhi and Karthikeyan Ramasamy. *Network Routing. Algorithms, Protocols, and Architectures.* Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2007: chapter 4.
- Michał Pióro and Deepankar Medhi. *Routing, Flow and Capacity Design in Communication and Computer Networks.* Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2004: chapter 4.1, 4.4-4.6, 5.1.1, 5.1.3, 5.1.4., appendix C.3.

### 1.4.2 Bibliografia uzupełniająca

- Michał Pióro and Deepankar Medhi. *Routing, Flow and Capacity Design in Communication and Computer Networks.* Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2004: podstawowe problemy projektowania sieci.
- Poompat Saengudomlert. *Optimization for Communications and Networks.* CRC Press/Science Publishers, Boca Raton, FL, 2012: przegląd problemów optymalizacyjnych w sieciach telekomunikacyjnych i komputerowych.