

Konspekt

Piotr Cholda

26 kwietnia 2018

1 Programowanie dyskretne w zastosowaniach telekomunikacyjnych

1.1 Przykłady problemów programowania dyskretnego

1. Projektowanie topologiczne ze stałymi kosztami (TDFCM, *Topological Design with a Fixed Charge Model*), sformułowanie L-P:

- Indeksy:

- * $e = 1, 2, \dots, E$ łącza (które mogą być zainstalowane);
- * $d = 1, 2, \dots, D$ zapotrzebowania;
- * $p = 1, 2, \dots, P_d$ dopuszczalne ścieżki przepływów mogących realizować zapotrzebowanie d .

- Zmienne:

- * x_{dp} wielkość przepływu realizującego zapotrzebowanie d , korzystającego ze ścieżki p ,
- * y_e przepływność do zainstalowania na łączu e ,
- * $u_e = 1$ jeśli łącze e jest zainstalowane;
= 0, w przeciwnym przypadku (**binarna** zmienna decyzyjna).

- Stałe:

- * $\delta_{edp} = 1$ jeśli łącze e należy do ścieżki p realizującej zapotrzebowanie d ;
= 0 w przeciwnym przypadku;
- * h_d rozmiar zapotrzebowania d , które ma być zrealizowane;
- * ξ_e stały koszt użycia jednostki przepływności na łączu e ;
- * κ_e koszt „otwarcia” (tj. uruchomienia) łącza;
- * W wystarczająco duża wartość („duże W ”).

- Funkcja celu: $\min \mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \sum_e (\xi_e y_e + \kappa_e u_e)$.

- Ograniczenia:

- * $\sum_p x_{dp} = h_d \quad d = 1, 2, \dots, D$;
- * $\sum_d \sum_p \delta_{edp} x_{dp} = y_e \quad e = 1, 2, \dots, E$;
- * $y_e \leq W u_e \quad e = 1, 2, \dots, E$;
- * \mathbf{y} and \mathbf{x} — nieujemne ciągle oraz \mathbf{u} — binarne.

Przedmiot: Matematyczne narzędzia komputerowe w zastosowaniach telekomunikacyjnych
 Prowadzący: Piotr Cholda piotr.cholda@agh.edu.pl
 Kierunek: Elektronika i Telekomunikacja
 Specjalność: Sieci i usługi
 Semestr: I sem. (letni) studiów magisterskich

2. Problem poszukiwania minimalnego drzewa rozpinającego (*minimum spanning tree*).
3. Zapis z użyciem programowania matematycznego różnych klasycznych zadań optymalizacji:
 - Problem plecakowy (*knapsack problem*) i jego warianty.
 - Problem poszukiwania minimalnego drzewa Steinera.
 - Problem komiwojażera (*travelling salesman*).
 - Problem minimalnego kolorowania prawidłowego grafu.
 - Problem przydziału.

1.2 Liniowe programowanie dyskretne

1. Programowanie całkowitoliczbowe IP/ILP (*Integer [Linear] Programming*):
 - $\max \mathbf{c}\mathbf{x}$,
 - s.t.:
 - * $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ (ograniczenia liniowe, *linear constraints*),
 - * $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$,
 - * $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$ (ograniczenia całkowitoliczbowe, *integrality constraints*).
2. Programowanie całkowitoliczbowe MIP/MILP (*Mixed Integer [Linear] Programming*):
 - $\max \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{d}\mathbf{y}$,
 - s.t.:
 - * $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y} \leq \mathbf{b}$ (ograniczenia liniowe),
 - * $\mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}$,
 - * $\mathbf{y} \in \mathbb{R}$,
 - * $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}$ (ograniczenia całkowitoliczbowe).

1.3 Podstawy teorii złożoności

1. Notacja Landaua, \mathcal{O} (*big-O*).
2. Klasy złożoności: wielomianowa, logarytmiczna, wykładnicza.
3. Klasy problemów: rozwiązywalne wielomianowo \mathcal{P} (*deterministic polynomial*), weryfikowalne wielomianowo \mathcal{NP} (*non-deterministic polynomial*), \mathcal{NP} -zupełne; zagadnienie $\mathcal{P} \stackrel{?}{=} \mathcal{NP}$.

1.4 Rozwiązywanie problemów programowania dyskretnego

1. Pojęcie relaksacji, pojęcie relaksacji liniowej LR (*linear relaxation*), relacja między rozwiązaniem problemu MIP a jego relaksacją liniową LR.

2. Metody rozwiązywania problemów IP, MIP: metoda podziałów i ograniczeń (*branch-and-bound*, B&B), poszukiwanie ograniczeń za pomocą relaksacji liniowej:

• Metoda B&B dla zmiennych binarnych:

```

1: procedure BBB( $N_U, N_0, N_1$ )
2:                                     ▷ Minimalizujemy funkcję celu
3:   solve( $N_U, N_0, N_1, \mathbf{x}, \mathbf{u}, F^{LR}\{N_U, N_0, N_1\}$ )
4:                                     ▷  $\mathbf{x}$  jest elementem przestrzeni rozwiązań ( $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ )
5:                                     ▷ Znajdź rozwiązanie LR{ $N_U, N_0, N_1$ }
6:   if  $N_U = \emptyset \parallel \forall_{i \in N_U}: x_i \in \mathbb{B}$  (jest binarne) then
7:     if  $F^{LR}\{N_U, N_0, N_1\} < F^{\text{best}}$  then
8:        $F^{\text{best}} \leftarrow F^{LR}\{N_U, N_0, N_1\}$ 
9:        $\mathbf{x}^{\text{best}} \leftarrow \mathbf{x}$ 
10:       $\mathbf{u}^{\text{best}} \leftarrow \mathbf{u}$ 
11:      ▷ Znaleziono najlepsze dotychczasowe rozwiązanie
12:      binarne: zachowaj je
13:    end if
14:  else
15:    ▷ W aktualnie uzyskanym rozwiązaniu pewne zmienne
16:    przyjmują wartości niebinarne, są to zmienne zawarte w zbiorze
17:     $N_U$ 
18:    if  $F^{LR}\{N_U, N_0, N_1\} \geq F^{\text{best}}$  then
19:      ▷ Ograniczanie (bounding, rozwiązanie
20:      problemu zrelaksowanego jest gorsze niż rozwiązanie optymalne
21:      uzyskane do tej pory)
22:    return
23:  else
24:    Wybierz pewne  $e \in N_U$ , takie że  $x_e$  jest ułamkowe
25:    BBB( $N_U - \{e\}, N_0 \cup \{e\}, N_1$ )
26:    BBB( $N_U - \{e\}, N_0, N_1 \cup \{e\}$ )
27:    ▷ Podział (ustal pewne wartości jako stałe binarne
28:    i rozwiąż dwa bliźniacze podproblemy)
29:  end if
30: end if
31: end procedure

```

• Metoda B&B dla zmiennych całkowitych:

```

1: procedure BBI( $\Omega$ )
2:   solve( $\Omega, F(\Omega), \mathbf{x}'(\Omega), \mathbf{x}''(\Omega)$ )
3:                                     ▷ Znajdź rozwiązanie P( $\Omega$ )
4:   if int( $\mathbf{x}'(\Omega)$ ) then
5:     ▷  $\mathbf{x}'$  zawiera tylko elementy całkowite
6:     if  $F(\Omega) < F^{\text{best}}$  then
7:        $F^{\text{best}} \leftarrow F(\Omega)$ 
8:        $\mathbf{x}^{\text{best}} \leftarrow (\mathbf{x}'(\Omega), \mathbf{x}''(\Omega))$ 
9:     end if
10:  else
11:    if  $F(\Omega) \geq F^{\text{best}}$  then
12:      ▷ Ograniczanie
13:    return

```

Przedmiot: Matematyczne narzędzia komputerowe w zastosowaniach telekomunikacyjnych
Prowadzący: Piotr Cholda piotr.cholda@agh.edu.pl
Kierunek: Elektronika i Telekomunikacja
Specjalność: Sieci i usługi
Semestr: I sem. (letni) studiów magisterskich

```

14:         else
15:                                     ▷ Podział
16:         Wybierz indeks  $j$  pewnego niecałkowitego elementu
            $\mathbf{x}'(\Omega)$ 
17:         BBI( $(\Omega - \{d_j(\Omega) \leq x_j \leq g_j(\Omega)\}) \cup \{d_j(\Omega) \leq x_j \leq \lfloor x'_j(\Omega) \rfloor\}$ )
18:         BBI( $(\Omega - \{d_j(\Omega) \leq x_j \leq g_j(\Omega)\}) \cup \{\lceil x'_j(\Omega) \rceil \leq x_j \leq g_j(\Omega)\}$ )
19:         end if
20:     end if
21: end procedure

```

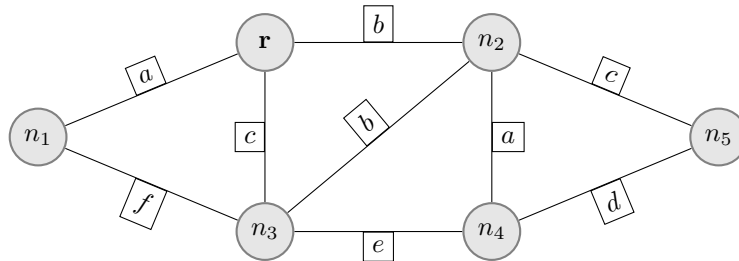
1.5 Zadania

1. Poniżej przedstawiono fragment pewnego sformułowania problemu optymalizacyjnego:

- Indeksy:
 - * $e = 1, 2, \dots, E$ pierwszy typ indeksu (np. łuki);
 - * $v = 1, 2, \dots, V$ drugi typ indeksu (np. węzły);
 - * $d = 1, 2, \dots, D$ trzeci typ indeksu (np. zapotrzebowania).
- Stałe:
 - * a_{ev} pewna wartość binarna.
- Zmienne:
 - * u_{ed} zmienna binarna;
 - * w_{ed} zmienna binarna;
 - * x_{ed} zmienna całkowitoliczbowa nieujemna;
 - * z_{ed} zmienna całkowitoliczbowa nieujemna;
 - * y_{ed} zmienna całkowitoliczbowa nieujemna.
- Ograniczenia:
 - * $w_{ed}u_{ed} > 0$ $e = 1, 2, \dots, E, d = 1, 2, \dots, D$;
 - * $a_{ev} \text{ XOR } u_{ed} < 1$ $e = 1, 2, \dots, E, v = 1, 2, \dots, V, d = 1, 2, \dots, D$;
 - * $\frac{x_{ed}}{y_{ed} + z_{ed}} = 49$ $e = 1, 2, \dots, E, d = 1, 2, \dots, D$;
 - * $x_{ed}y_{ed} \geq 2$ $e = 1, 2, \dots, E, d = 1, 2, \dots, D$

W zamysle sformułowanie miało stanowić fragment zadania liniowego programowania matematycznego ze zmiennymi całkowitoliczbowymi MILP — ale tak nie jest (dlaczego?). Proszę poprawić to sformułowanie w taki sposób, aby bez zmiany sensu faktycznie było to sformułowanie typu MILP (nie skupiamy się tutaj na znaczeniu sformułowania, tylko na jego poprawności z punktu widzenia modelowania matematycznego).

2. Na rys. 1 dany jest graf prosty ważony (wartości wag w prostokąciach należy zastąpić wartościami reprezentowanymi przez cyfry numeru własnego indeksu, gdzie numer indeksu to $fedcba$). Proszę znaleźć drzewo najkrótszych ścieżek z korzenia \mathbf{r} , a następnie sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania tego drzewa (indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu). Jeśli to potrzebne, każdą krawędź grafu prostego można zastąpić parą łuków przeciwnie skierowanych o tej samej wadze.



Rysunek 1: Przykładowy graf ważony

- Na rys. 1 dany jest graf prosty ważony (wartości wag w prostokąciach należy zastąpić wartościami reprezentowanymi przez cyfry numeru własnego indeksu, gdzie numer indeksu to *fedcba*). Proszę znaleźć minimalne rozcięcie między n_1 i n_5 , a następnie sformułować w postaci zadania programowania liniowego LP problem poszukiwania tego minimalnego rozcięcia (indeksy, stałe, zmienne, funkcję celu i ograniczenia proszę dobrać dla tego konkretnego grafu). Jeśli to potrzebne, każdą krawędź grafu prostego można zastąpić parą luków przeciwnie skierowanych o tej samej wadze.
- Niech x_{ij} przyjmuje wartość 1, jeśli ruter i jest fizycznie połączony z ruterem j (w przeciwnym przypadku x_{ij} przyjmuje wartość 0). Niech w naszej sieci będzie N ruterów. Jak można zinterpretować poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi zajmującemu się konfiguracją ruterów?

$$\begin{aligned} x_{ii} &= 0 & i &= 1, 2, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N x_{ij} &\leq 5 & i &= 1, 2, \dots, N \\ \sum_{j=1}^N x_{ij} &\geq 1 & i &= 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

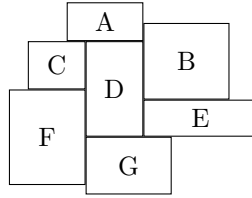
- W każdym z N interesujących nasze przedsiębiorstwo miast instalujemy rutery. Niech x_{ij} przyjmuje wartość 1, jeśli nasze przedsiębiorstwo instaluje rutery produkowane przez firmę oznaczoną indeksem i w mieście indeksowanym za pomocą j (w przeciwnym przypadku x_{ij} przyjmuje wartość 0). Na rynku mamy P firm produkujących rutery. Jak można zinterpretować poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi zajmującemu się instalacją ruterów?

$$\sum_{i=1}^P x_{ij} \geq 2 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

- W każdym z P interesujących nas miast nasze przedsiębiorstwo instaluje koncentratory. Niech x_{ij} oznacza liczbę klientów przyłączonych do koncentratora w mieście indeksowanym za pomocą j , ale tylko takich klientów, którzy wykupili klasę obsługi QoS oznaczaną indeksem i . Nasze przedsiębiorstwo obsługuje N typów klas obsługi. Jak można zinterpretować poniższe ograniczenia, tłumacząc je inżynierowi instalującemu koncentratory?

$$\sum_{i=2}^N x_{ij} = x_{1j} \quad j = 1, 2, \dots, P$$

- Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych,



Rysunek 2: Przykład sieci „komórkowej”.

funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: projektuje się sieć komórkową, przy czym obszar objęty siecią dzieli się na wiele komórek, z których każda ma kształt prostokątny¹, jak przykładowo pokazano na rys. 2. Taki sposób podziału obszaru jest z góry zadany i traktujemy go jako daną wejściową do problemu: sąsiedztwo jest opisane za pomocą stałych a_{ij} ($i, j = 1, \dots, N; i \neq j$), które przyjmują wartość 1 gdy komórki i, j ze sobą sąsiadują (w przeciwnym przypadku — 0). Do obsługi ruchu jest wymagane przydzielenie jednego zestawu częstotliwości w każdej z komórek. Ze względu na unikanie interferencji zakłada się, że nie wolno w sąsiadujących komórkach używać tego samego zestawu częstotliwości (np. gdyby komórki były rozmieszczone jak na rysunku, komórkom A i C należałoby przydzielić różne zestawy częstotliwości; ale już komórkom B i C można byłoby przydzielić te same zestawy częstotliwości). Załóżmy, że interesujący nas obszar podzielono na N komórek, a operator może wykorzystać M różnych zestawów częstotliwości. Operator chciałby użyć do pokrycia obszaru jak najmniej różnych zestawów częstotliwości. Proszę dodatkowo podać (jako funkcje N oraz M): (a) liczbę zmiennych całkowitoliczbowych, (b) liczbę ograniczeń równościowych oraz (c) liczbę ograniczeń nierównościowych występujących w tym problemie. Czy można z góry przewidzieć, jakie jest ograniczenie górne wymaganej liczby różnych zestawów częstotliwości?

8. Proszę zinterpretować (tzn. napisać, jaką dokładnie sytuację ma modelować) poniższe sformułowanie „łącze-ścieżka” (L-P). Sformułowanie dotyczy pewnego problemu optymalnego projektowania sieci.

- Indeksy:

- * $e = 1, 2, \dots, E$ łącza;
- * $d = 1, 2, \dots, D$ zapotrzebowania;
- * $p = 1, 2, \dots, P_d$ dopuszczalne ścieżki przepływów mogących realizować zapotrzebowanie d .

- Stałe:

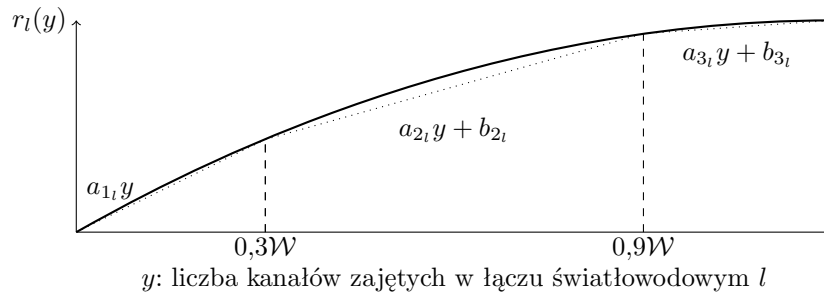
- * $\delta_{edp} = 1$ jeśli łącze e należy do ścieżki p realizującej zapotrzebowanie d ;
 $= 0$ w przeciwnym przypadku;
- * h_d referencyjny rozmiar zapotrzebowania d , które może być zrealizowane;

¹Stosujemy to uproszczenie na potrzeby zadania, w praktyce komórka ma inny kształt.

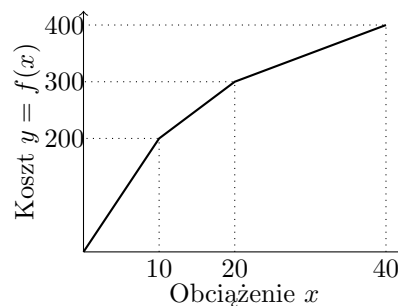
- * ξ_e koszt dodania jednostki przepływności na łączu e ;
- * α pewna wartość stała (należy m.in. zinterpretować jej znaczenie).
- Zmienne:
 - * x_{dp} ciągła wielkość przepływu realizującego zapotrzebowanie d , korzystającego ze ścieżki p ;
 - * y_e ciągła wielkość przepływności przydzielonej do zainstalowania na łączu e ;
 - * β pewna zmienna ciągła (należy m.in. zinterpretować jej znaczenie).
- Funkcja celu: $\max \beta$.
- Ograniczenia:
 - * $\sum_p x_{dp} \geq \beta h_d \quad d = 1, 2, \dots, D;$
 - * $\sum_d \sum_p \delta_{ep} x_{dp} = y_e \quad e = 1, 2, \dots, E;$
 - * $\sum_e \xi_e y_e \leq \alpha.$

Następnie proszę: (a) zmodyfikować to sformułowanie w taki sposób, żeby uwzględniało fakt, iż w sieci zainstalowana przepływność łączy może przyjmować tylko wartości dyskretne (kombinacje 100, 200 lub 500 jednostek przepływności); (b) zapisać ten problem używając sformułowania o charakterze dowolnej (tj. zwykłej lub zagregowanej, można sobie którąś wybrać) postaci „węzeł-łączy” (N-L); będzie to zapewne wymagało dodania kolejnych stałych, zmiennych i ograniczeń (może być też konieczna modyfikacja istniejących ograniczeń).

9. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujące zagadnienie projektowania sieci opisane werbalnie. Jest to zagadnienie znalezienia tras dla przepływów (tj. routingu) z przydziałem zasobów optycznych oraz maksymalizacją zysku (*routing and wavelength assignment for maximizing revenue*). Mamy daną topologię sieci optycznej składającą się ze zbioru łączy światłowodowych \mathcal{L} i węzłów optycznych \mathcal{V} , przy czym w ramach każdego łącza mamy do dyspozycji jedno włókno światłowodowe, w którym możemy transmitować dane za pomocą kanałów optycznych, z których każdy używa jednej z \mathcal{W} nośnych dostępnych we włóknie (tzn. używamy systemu WDM). Z góry zadano \mathcal{S} : zbiór zapotrzebowań między różnymi parami węzłów sieci. Każde zapotrzebowanie ma określony rozmiar strumienia, który powinien być przenoszony na jego potrzeby, przy czym jego wielkość to wielokrotność całkowita przepływności charakterystycznej dla pojedynczego kanału (tzn. wielokrotność może być $1, 2, \dots$). Wielkość tej wielokrotności podaje się za pomocą wartości stałej t_s ($s \in \mathcal{S}$). Zakłada się, że nie wszystkie zapotrzebowania muszą być zrealizowane w 100% (a nawet niektóre nie muszą być zrealizowane w ogóle), ale nigdy nie przydziela się żadnemu zapotrzebowaniu ułamkowej przepływności kanału. Operator zarabia na każdym zajęтым kanale r_l ($l \in \mathcal{L}$) jednostek monetarnych. Po sformułowaniu problemu w takiej wersji, proszę uwzględnić, że funkcja zysku związana z użyciem kanałów w pojedynczym włóknie jest opisywana za



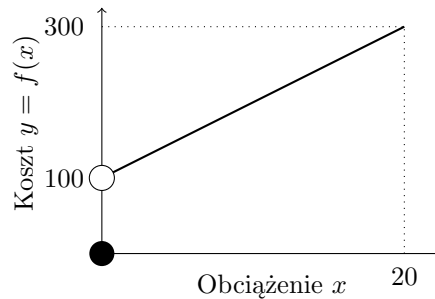
Rysunek 3: Przykładowa funkcja opisująca zysk.



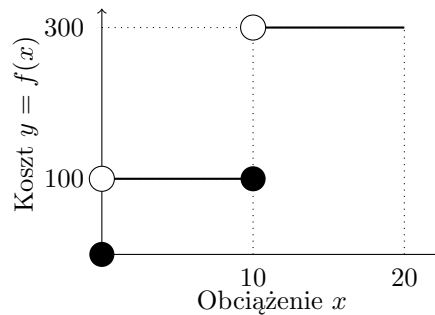
Rysunek 4: Przykładowa funkcja opisująca taryfę wklęsłą przedziałami liniową.

pomocą zależności nieliniowej pokazanej na rys. 3 (parametry a_{i_l} oraz b_{i_l} mogą być różne dla różnych łączy). Na potrzeby opracowania sformułowania można wprowadzić wszystkie niezbędne zmienne i stałe (jeśli nie podano ich wyżej). Sformułowanie może być typu L-P lub N-L (proszę sobie wybrać dowolnie). Czy rozwiązanie problemu zawsze istnieje?

10. Proszę sformułować zbiór równości/nierówności (być może dobierając również jakieś zmienne pomocnicze, np. całkowitoliczbowe, albo jakieś stałe) opisujących relację między zmienną x , oznaczającą obciążenie łącza ($0 \leq x \leq 40$), a wartością $y = f(x)$, tj. kosztem użycia takiego łącza w zależności od tego obciążenia (dysponując tymi równościami/nierównościami powinniśmy być w stanie po podstawieniu konkretnej wartości x obliczyć odpowiednią wartość y). Ograniczenia mają być adekwatne do opisu problemu liniowego programowania matematycznego ze zmiennymi całkowitoliczbowymi MILP, w którym minimalizuje się funkcję celu zależną od kosztu użycia łącza. Sama zależność między y a x jest przedstawiona na rys. 4.
11. Proszę sformułować zbiór równości/nierówności (być może dobierając również jakieś zmienne pomocnicze, np. całkowitoliczbowe, albo jakieś stałe) opisujących relację między zmienną x , oznaczającą obciążenie łącza ($0 \leq x \leq 20$), a wartością y , tj. kosztem użycia takiego łącza w zależności od tego obciążenia (dysponując tymi równościami/nierównościami powinniś-



Rysunek 5: Przykładowa funkcja opisująca taryfę liniową z dodatkowym kosztem instalacji/dzierżawy.



Rysunek 6: Przykładowa funkcja opisująca taryfę skokową.

my być w stanie po podstawieniu konkretnej wartości x obliczyć odpowiednią wartość y). Ograniczenia mają być adekwatne do opisu problemu liniowego programowania matematycznego ze zmiennymi całkowitoliczbowymi MILP, w którym minimalizuje się funkcję celu zależną od kosztu użycia łącza. Sama zależność między y a x jest przedstawiona na rys. 5. Jest to taryfa liniowa z dodatkowym kosztem instalacji/dzierżawy przy niezerowym obciążeniu.

12. Proszę sformułować zbiór równości/nierówności (być może dobierając również jakieś zmienne pomocnicze, np. całkowitoliczbowe, albo jakieś stałe) opisujących relację między zmienną x , oznaczającą obciążenie łącza ($0 \leq x \leq 20$), a wartością y , tj. kosztem użycia takiego łącza w zależności od tego obciążenia (dysponując tymi równościami/nierównościami powinniśmy być w stanie po podstawieniu konkretnej wartości x obliczyć odpowiednią wartość y). Ograniczenia mają być adekwatne do opisu problemu liniowego programowania matematycznego ze zmiennymi całkowitoliczbowymi MILP, w którym minimalizuje się funkcję celu zależną od kosztu użycia łącza. Sama zależność między y a x jest przedstawiona na rys. 6. Niniejszą taryfę można nazwać taryfą skokową (z dwojakim ryczałtem).
13. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisaniem indeksów, stałych, zmiennych,

Przedmiot: Matematyczne narzędzia komputerowe w zastosowaniach telekomunikacyjnych
Prowadzący: Piotr Cholda piotr.cholda@agh.edu.pl
Kierunek: Elektronika i Telekomunikacja
Specjalność: Sieci i usługi
Semestr: I sem. (letni) studiów magisterskich

funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: pewien amerykański operator sieci rozległych dysponuje dwoma odrębnymi sieciami na Zachodnim i Wschodnim Wybrzeżu USA. Postanowił je połączyć ze sobą i oczywiście chce zrobić to jak najtaniej. Na Zachodnim Wybrzeżu dysponuje ruterami rozmieszczonymi w następujących miastach: Seattle, San Francisco i Los Angeles. Natomiast routery na Wschodnim Wybrzeżu znajdują się w Nowym Yorku, Waszyngtonie i Atlancie. Zdecydowano, że obie sieci zostaną połączone za pomocą jednego transkontynentalnego kabla optycznego, który będzie korzystał ze wzmacniacza umieszczonego albo w Chicago albo w Dallas. Kabel optyczny będzie z jednej strony podłączony do rutera na Zachodnim Wybrzeżu, a z drugiej — do rutera na Wschodnim Wybrzeżu. Operator jest w stanie oszacować KO_{ij} , tj. koszt położenia odcinka kabla między miastem i oraz miastem j (innego rodzaju koszty nie interesują nas w tym problemie).

14. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisanem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: w celu skonstruowania pewnego systemu naziemnego dla łączności satelitarnej wybrano m potencjalnych lokalizacji anten. Do dyspozycji mamy p typów anten. Chcemy umieścić anteny co najwyżej trzech różnych typów, przy czym zakładamy, że w każdej lokalizacji będzie co najwyżej jedna antena określonego typu. Niech BW_i oznacza dostępną przepływność „w dół” realizowaną za pomocą pojedynczej anteny typu i . Niech KO_i oznacza wyrażony w złotych koszt instalacji pojedynczej anteny typu i . Ani przepływność „w dół” dla anteny ani jej koszt nie zależą od miejsca instalacji, a tylko od typu anteny. Anten typu i mamy dostępnych w magazynie MA_i i nie możemy liczyć na dodatkowe dostawy. Chcemy zbudować system, którego ogólny koszt jest jak najmniejszy i w którym sumaryczna przepływność „w dół” nie jest mniejsza niż B .
15. Proszę sformułować w postaci problemu programowania matematycznego LP lub MILP (z wyraźnym rozpisanem indeksów, stałych, zmiennych, funkcji celu i ograniczeń) następujący problem projektowania sieci opisany werbalnie: w celu skonstruowania pewnego systemu naziemnego dla łączności satelitarnej wybrano n potencjalnych lokalizacji anten. W każdej lokalizacji ma zostać zainstalowana jedna antena. W przypadku każdej instalowanej anteny trzeba zdecydować, jakiego będzie typu. Istnieje m typów anten. Niech BW_i oznacza dostępną przepływność „w dół” realizowaną za pomocą pojedynczej anteny typu i . Niech KO_i oznacza wyrażony w złotych koszt instalacji pojedynczej anteny typu i . Ani przepływność „w dół” dla anteny ani jej koszt nie zależą od miejsca instalacji, a tylko od typu anteny. System ma być zbudowany za nie więcej niż BU złotych. Anten typu i mamy dostępnych w magazynie MA_i i nie możemy liczyć na dodatkowe dostawy. Chcemy zbudować system, w którym sumaryczna przepływność „w dół” jest jak największa.
16. Poniżej zdefiniowano problem optymalizacyjny (z użyciem sformułowania zagregowanego typu węzeł-łączy, A/N-L) służący do znalezienia przepływów w sieciach oraz parametrów konfiguracyjnych. (a) O jakiego rodzaju konfigurację chodzi? (b) Proszę zinterpretować znaczenie stałych i zmien-

optyczne przenoszące do 40 kanałów optycznych. Każdy kanał optyczny ma przepływność maksymalną 10 Gb/s. W sieci nie występuje konwersja długości fal, z których korzystają kanały optyczne, w związku z tym dane przenoszone między wybraną parą węzłów przez cały czas używają tych samych częstotliwości optycznych (np. jeśli zdecydujemy się przemieścić ruch z węzła a do węzła b w taki sposób, że opuszcza on węzeł a w kanałach optycznych λ_7 i λ_{15} , to w takim razie ruch ten używa kanałów λ_7 i λ_{15} na całej swojej ścieżce do węzła b). Operator dysponuje pewnym budżetem, z którego musi sfinansować transmitowanie danych. Budżet wynosi 100 000 PLN. Długość dowolnego łącza (n, m) (gdzie: $n, m \in V$, $n \neq m$ i $(n, m) \in E$) jest równa $|n - m| \times 100$ km. Koszt transmisji 10 Gb/s ruchu na odległość 100 km to 1000 PLN.

18. Proszę podać zarys algorytmu, który znajdzie najkrótsze ścieżki między wszystkimi parami wierzchołków w digrafie ważonym (można oprzeć się na znanym algorytmie, a nawet użyć go jako podprocedury). Proszę oszacować złożoność tego algorytmu wyrażoną za pomocą zmiennej opisującej wielkość problemu, w tym przypadku będzie to liczba wierzchołków digrafu.
19. Proszę rozwiązać poniższy problem, ewentualnie przynajmniej podać przedział, w którym mieści się optymalna wartość z (szerokość przedziału nie może przekraczać 10% wartości optimum):

- $\max z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$
- s.t.: $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12,5$
- $x_i \in \mathbb{Z} \quad x_i \geq 0 \quad j = 1, 2, 3$

20. Proszę rozwiązać za pomocą metody podziałów i ograniczeń (B&B) następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{ograniczenia:} & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

21. Proszę rozwiązać za pomocą metody podziałów i ograniczeń (B&B) następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{ograniczenia:} & -2x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

22. Proszę rozwiązać poniższy problem, ewentualnie przynajmniej podać przedział, w którym mieści się optymalna wartość z (szerokość przedziału nie może przekraczać 10% wartości optimum):

Przedmiot: Matematyczne narzędzia komputerowe w zastosowaniach telekomunikacyjnych
 Prowadzący: Piotr Cholda piotr.cholda@agh.edu.pl
 Kierunek: Elektronika i Telekomunikacja
 Specjalność: Sieci i usługi
 Semestr: I sem. (letni) studiów magisterskich

- $\max z = 2x_1 + x_2 + 3x_3$
- s.t.: $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12,5$
- $x_i \in \mathbb{Z} \quad x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$

23. Proszę rozwiązać za pomocą metody podziałów i ograniczeń (B&B) następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 - 2x_2 \\ \text{ograniczenia:} & -4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array}$$

24. Proszę rozwiązać za pomocą metody podziałów i ograniczeń (B&B) następujący problem programowania matematycznego:

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ \text{ograniczenia:} & -2x_1 - 2x_2 \leq -1 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}^+ \end{array}$$

1.6 Lektury

1.6.1 Materiał wykładu

Zagadnienia omówione w ramach tego wykładu są w dużym stopniu opisane w następującej książce:

- Michał Pióro and Deepankar Medhi. *Routing, Flow and Capacity Design in Communication and Computer Networks*. Morgan Kaufmann Publishers—Elsevier, San Francisco, CA, 2004: chapter 4.3, 5.2, 5.5–5.6, 6.1–6.4, appendix B.
- Poompat Saengudomlert. *Optimization for Communications and Networks*. CRC Press/Science Publishers, Boca Raton, FL, 2012: chapter 4.1–4.2.

1.6.2 Bibliografia uzupełniająca

- Fedor V. Fomin and Petteri Kaski. Exact Exponential Algorithms. *Communications of the ACM*, 56(3):80–88, March 2013: trudności w rozwiązywaniu klasycznych zadań definiowanych na grafach.
- Michael Sipser. *Wprowadzenie do teorii obliczeń*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, Poland, 2009: podręcznik nt. zagadnień związanych z oceną złożoności.
- Laurence A. Wolsey. *Integer Programming*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, 1998: bardzo dobry podręcznik nt. programowania całkowitoliczbowego.