Dr Adam Ćmiel (A4 p.120, tel. 31-72, cmiel@agh.edu.pl ; http://home.agh.edu.pl/~cmiel/

Podręczniki:

- Furdzik Z., Maj-Kluskowa J., Kulczycka A., Sękowska M.: Nowoczesna matematyka dla inżynierów .Część I Algebra, Wydawnictwa AGH
- Białas S., Ćmiel A., Fitzke A. Matematyka dla studiów inżynierskich Cz. I Algebra i geometria. Wyd. AGH2005, SU1679
- Białas S., Macierze. Wybrane problemy ,Wyd . AGH2006
- Gewert M., Skoczylas Z. Algebra 1 i 2. Ofic.wyd. GIS (dla studentów Pol.Wrocł.)
  Definicje twierdzenia i wzory , Przykłady i zadania, Kolokwia i egzaminy

Zbiory zadań:

- Przybyło S., Szlachtowski A., Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna

Elementy logiki matematycznej

Logika matematyczna zajmuje się zdaniami logicznymi. Zdanie logiczne, to zdanie gramatyczne orzekające, któremu można przypisać jedną z dwóch ocen (wartość) **Prawda** (*TRUE*, 1); **Fałsz** (*FALSE*, 0) (czyli zdania logiczne podlegają wartościowaniu). Nie są zdaniami logicznymi zdania pytające i rozkazujące.

Funktory logiczne (spójniki):

- jednoargumentowe (wystarczy jedno zdanie)

  negacja - $\sim$ - (nieprawda, że ...)

- dwuargumentowe (wymagają dwóch zdań) np.

  koniunkcja - $\wedge$ - (...i...)
  alternatywa - $\vee$ - (...lub...)
  implikacja - $\Rightarrow$ - (jeżeli ..., to...)
  równoważność - $\Leftrightarrow$ - (...wtedy i tylko wtedy, gdy...)

p	*~p*
1	0
0	1

p	*q*	*p∧q*	*p∨q*	*p⇒q*	*p⇔q*
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Prawa logiczne (tautologie) – zawsze prawdziwe

1. pr. podwójnego przeczenia $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
2. pr. wyłączonego środka $p \vee \sim p$ (z dwóch zdań przeciwnych przynajmniej jedno jest prawdziwe)
3. pr. sprzeczności $\sim (p \wedge \sim p)$ (z dwóch zdań przeciwnych przynajmniej jedno jest fałszywe)
4. pr. kontrapozycji $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
5. pr. przemienności koniunkcji $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
6. pr. przemienności alternatywy $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
7. pr. de Morgana: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$;
   $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
8. pr. zaprzeczania implikacji $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
9. pr. „nie wprost” $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \{(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p\}$

10. pr. rozdzielności koniunkcji względem alternatywy $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
11. pr. rozdzielności alternatywy względem koniunkcji $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Warunek konieczny (WK) **i wystarczający** (WW):

$p \Rightarrow q$ p jest warunkiem wystarczającym dla q, a q jest warunkiem koniecznym dla p.

$p \Leftrightarrow q$ p jest warunkiem koniecznym i wystarczającym dla q.

Kwadrat logiczny:

$p \Rightarrow q$ tw. proste
$q \Rightarrow p$ tw. odwrotne (do prostego)
$\sim p \Rightarrow \sim q$ tw. przeciwne
$\sim q \Rightarrow \sim p$ tw. przeciwstawne

Formy (funkcje) zdaniowe – zdania orzekające, którym nie można przypisać określonej wartości logicznej, gdyż zawierają zmienną przebiegającą pewien zbiór X (zwany dziedziną formy zdaniowej), jednak, gdy przyjmiemy zamiast zmiennej dowolny element dziedziny, to forma zdaniowa staje się zdaniem logicznym.
Uwaga. Każde równanie jest formą zdaniową

Kwantyfikatory: $\forall$- dla każdego

$\exists$ - istnieje

- $\sim\forall_{x\in X}\ p(x) \Leftrightarrow \exists_{x\in X}\ \sim p(x)$
- $\sim\exists_{x\in X}\ p(x) \Leftrightarrow \forall_{x\in X}$ v $\sim p(x)$
- $\forall_{x\in X}\ [p(x)\wedge q(x)] \Leftrightarrow [\forall_{x\in X}\ p(x) \wedge \forall_{x\in X}\ q(x)]$
- $\exists_{x\in X}\ [p(x)\vee q(x)] \Leftrightarrow [\exists_{x\in X}\ p(x) \vee \exists_{x\in X}\ q(x)]$
- $[\forall_{x\in X}\ p(x) \vee \forall_{x\in X}\ q(x)] \Rightarrow \forall_{x\in X}\ [p(x) \vee q(x)]$
- $\exists_{x\in X}\ [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow [\exists_{x\in X}\ p(x) \wedge \exists_{x\in X}\ q(x)]$

Zasada indukcji matematycznej

$$\{T(n_0) \wedge (\forall_{n\geq n_0} T(n) \Rightarrow T(n+1))\} \Rightarrow \forall_{n\geq n_0} T(n)$$

Elementy teorii mnogości

Zbiór, przynależność do zbioru – to pojęcia pierwotne, (niedefiniowane).
Sposoby określania konkretnych zbiorów:

- wypisanie elementów,
- podanie warunku przynależności.

np. $A = \{x \in X : p(x)\}$
$B = \{x \in X : q(x)\}$

Analogie mnogościowo-logiczne

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} = \{x \in X : p(x) \vee q(x)\}$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \vee x \in B\} = \{x \in X : p(x) \vee q(x)\}$$
$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \in X : p(x) \wedge \sim q(x)\}$$
$$A' = \{x : x \notin A\} = \{x \in X : \sim p(x)\}$$
$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall_{x \in X} : p(x) \Rightarrow q(x))$$
$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow (\forall_{x \in X} : p(x) \Leftrightarrow q(x))$$

Tożsamości ułatwiające dowody twierdzeń z kwantyfikatorami

- $\forall_{x \in X}\ p(x) \Leftrightarrow \{x : \in X : p(x)\} = X$
- $\exists_{x \in X}\ p(x) \Leftrightarrow \{x : \in X : p(x)\} \neq \emptyset$

Iloczyn kartezjański zbiorów

Intuicja Para uporządkowana (x,y) to zbiór dwuelementowy w którym określono kolejność elementów

Formalna mnogościowa definicja Kuratowskiego pary uporządkowanej

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

Definicja ta spełnia podstawowy warunek : $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

Niech A i B będą dwoma niepustymi zbiorami

Def: Iloczynem kartezjańskim zbiorów $A,B\neq\phi$; nazywamy zbiór

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$$

czyli zbiór par uporządkowanych, takich, że pierwszy element pary należy do pierwszego zbioru, a drugi element do drugiego zbioru.

Przykład. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{\bullet,*\}$, $A\times B=\{(1, \bullet),(2, \bullet),(3, \bullet),(1, *),(2, *),(3, *)\}$

Uwagi o mnogościowej definicji pary (*a*,*b*)

Para to ciąg 2-elementowy → ciąg to funkcja na zbiorze N → funkcja to relacja prawostronnie jednoznaczna → relacja to podzbiór iloczynu kartezjańskiego → iloczyn kartezjański to zbiór par

Uwaga. Elementy teorii relacji: w szczególności relacje równoważności, relacje porządkujące i pojęcia związane z porządkiem oraz funkcje i pojęcia związane z funkcjami zostaną omówione na wykładzie z analizy matematycznej.