CAŁKA NIEOZNACZONA

$f: R \supset I \to R$, gdzie I – przedział (zbiór spójny)

Def. Funkcją pierwotną funkcji f nazywamy funkcję F taką, że $\forall_{x\in I}\ F'(x) = f(x)$.

Warunkiem koniecznym istnienia dla funkcji f funkcji pierwotnej jest posiadanie przez f własności Darboux (więc f nie może mieć nieciągłości I-go rodzaju). (zobacz Dodatek -na końcu tego wykładu)

Warunkiem wystarczającym istnienia dla funkcji f funkcji pierwotnej jest ciągłość funkcji f.

Łatwo pokazać, że

- jeżeli F jest funkcją pierwotną funkcji f, to $F+c$ również jest funkcją pierwotną funkcji f
- dwie funkcje pierwotne F_1 i F_2 funkcji f mogą się różnić jedynie o stałą c.

Def. Zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f na przedziale I nazywamy całką nieoznaczoną funkcji f na tym przedziale i oznaczamy $\int f(x)dx$.

Uwaga: funkcje e^{x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$ nie posiadają funkcji pierwotnych w klasie funkcji elementarnych.

Wzory podstawowe: (w przedziałach, w których f i F są określone)

$$\int 0dx = c = const \qquad \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c \qquad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \qquad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c$$

Prawdziwe są także następujące wzory

$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx$$

Uwaga. Pochodna całki (czyli zbioru funkcji pierwotnych), to zbiór pochodnych poszczególnych funkcji pierwotnych- wszystkie te pochodne są równe f wiec dla prostoty piszemy f
Suma całek jest rozumiana jako algebraiczna suma zbiorów.

Metody całkowania

I. **Przez części**: (bezpośrednio z wzoru na różniczkowanie iloczynu)

Tw. Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne w I, to $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

Przykład $\int xe^x dx = \begin{vmatrix} f(x)=x & f'(x)=1 \\ g'(x)=e^x & g(x)=e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x + c$

Wzory rekurencyjne (wyprowadzane z całkowania przez części):

(R) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} \quad n \ge 2$$

(S) $$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

(C) $$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx$$

Dow. (R) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} - \int \frac{x}{2}\frac{2x}{(1+x^2)^n}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} f(x)=\dfrac{x}{2} & f'(x)=\dfrac{1}{2} \\ g'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^n} & g(x)=\dfrac{1}{-n+1}(1+x^2)^{-n+1} \end{vmatrix} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{x}{2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{1-n}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \left(1-\frac{1}{2n-2}\right)\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

II. **Przez podstawienie** (ze wzoru na różniczkowanie funkcji złożonej)

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Tw: (o całkowaniu przez postawienie $x=\varphi(t)$)

Jeżeli:

1° $\varphi : T \to X$ jest różniczkowalnym i wzajemnie jednoznacznym (bijektywnym) przekształceniem przedziału T na przedział X,

2° funkcja $f : X \to R$ ma funkcję pierwotną na przedziale X,

to: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, gdzie $t = \varphi^{-1}(x)$

Dowód. Funkcja $F(\varphi(t))$ będąca złożeniem funkcji różniczkowalnych jest różniczkowalna na T i prawdziwy jest wzór $[F(\varphi(t))]' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, skąd mamy $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c$ na przedziale T. Z założenia 2 mamy $\int f(x)dx = F(x) + c$ na przedziale X. Z założonej wzajemnej jednoznaczności φ, istnieje funkcja odwrotna $\varphi^{-1}: X \to T$. Po podstawieniu $t = \varphi^{-1}(x)$ do $F(\varphi(t))$ otrzymujemy $F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = F(x)$, więc $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, przy czym $t=\varphi^{-1}(x)$.

Tw. (o całkowaniu prze podstawienie $y = h(x)$)

Jeżeli:

1° $h : X \to Y$ jest różniczkowalnym odwzorowaniem przedziału X na Y,

2° funkcja $g : Y \to R$ ma funkcję pierwotną G na Y, to: $\int g(h(x))h'(x)dx = \int g(y)dy$, gdzie $y = h(x)$

Dowód. Podobnie jak poprzednio wystarczy zauważyć, że funkcja $G(h(x))$ jest funkcją pierwotną funkcji $g(h(x))h^{'}(x)$ na przedziale X, więc $\int g(h(x))h^{'}(x)dx = G(h(x))+c = \int g(y)dy$, gdzie $y=h(x)$.

Oba wyprowadzone wzory na całkowanie przez podstawienie, z pozoru identyczne, są jednak istotnie różne. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że rozważanym zagadnieniem jest wyznaczenie całki funkcji określonej na przedziale X, to w pierwszym przypadku wymagana jest odwracalność funkcji definiującej podstawienie (zwane wstecznym) a w drugim nie. Drugie podstawienie (w przód) wymaga natomiast specjalnej postaci funkcji podcałkowej.

Przykład $$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = \sin t \Leftrightarrow t = \arcsin x & x \in (-1;1) \\ dx = \cos t dt & t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \end{matrix} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt =$$

$$= \int \cos^2 t dt \overset{(\text{wzór C})}{=} \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\sin t \cos t + c \Big|_{t=arc\sin x} = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + c$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcja wymierna to funkcja $f(x) = \frac{L(x)}{M(x)}$, gdzie licznik i mianownik to wielomiany względnie pierwsze. Jeżeli stopień wielomianu L jest mniejszy od stopnia wielomianu M ($st(L)<st(M)$), to funkcję wymierną $\frac{L(x)}{M(x)}$ nazywamy **funkcją wymierną właściwą**.

Jeżeli $st(L)\geq st(M)$, to wykonując dzielenie wielomianów otrzymujemy następujące przedstawienie $\frac{L(x)}{M(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{M(x)}$ i $st(R)<st(M)$. Aby scałkować dowolną funkcję wymierną wystarczy pokazać jak całkować funkcję wymierną właściwą

Wiadomo z algebry, że funkcję wymierną właściwą można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju.

- $\frac{A}{(x-a)^k}$ - ułamek prosty I-go rodzaju
- $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}$, $\Delta = p^2 - 4q < 0$ - ułamek prosty II-go rodzaju

$$\frac{L(x)}{(x-a)^k (x^2+px+q)^n \dots} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \dots + \frac{B_1 x + C_2}{x^2+px+q} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

Przykład Rozłożyć na ułamki proste funkcję $\frac{5x^2-11x}{(x-1)^2(x^2+2)}$.

Z uwagi na postać mianownika rozkład jest następujący

$$\frac{5x^2-11x}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2},$$

skąd po przemnożeniu obu stron przez $(x\text{-}1)^2(x^2+2)$ otrzymujemy tożsamość (równość dla każdego x)

$5x^2-11x = A(x-1)(x^2+2)+ B(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)^2$,

stąd po uporządkowaniu otrzymujemy równoważną tożsamość

$5x^2-11x = (A+C)x^3+(-A+B-2C+D)x^2+(2A+C-2D)x +(-2A+2B+D)$.

Porównanie odpowiednich współczynników prowadzi do układu

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-2C+D=5 \\ 2A+C-2D=-11 \\ -2A+2B+D=0 \end{cases}$$

, którego rozwiązaniem jest $A=1$, $B=-2$, $C=-1$, $D=6$.

Stałe A,B,C i D można szybciej wyznaczyć wstawiając do tożsamości

$5x^2-11x=A(x-1)(x^2+2)+ B(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)^2$

miejsce zerowe dwumianu x-1 tzn. x=1 uzyskując proste równanie -6=3B, skąd natychmiast dostajemy B = -2. Wstawiając do powyższej równości B = -2 i grupując po lewej stronie wyrazy nie zawierające nieznanych stałych otrzymujemy

$7x^2-11x+4=A(x-1)(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)^2$.

Widać, że wielomian po prawej stronie jest podzielny przez dwumian (x-1). Wobec tego wielomian po lewej stronie również musi być podzielny przez ten dwumian, co oznacza że x=1 musi być pierwiastkiem tego wielomianu. Jest to pewna forma kontroli poprawności dotychczasowych obliczeń. Po wykonaniu dzielenia obu stron przez (x-1) otrzymujemy równość

$7x-4=A(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)$,

z której po podstawieniu x=1 otrzymujemy 3=3A ,więc A=1. Wstawiając uzyskaną stałą do powyższej równości, po zgrupowaniu wyrazów nie zawierających nieznanych stałych po lewej stronie otrzymujemy

$-x^2+7x-6= (Cx+D)(x-1)$.

Znowu widać, że skoro wielomian po prawej stronie jest podzielny przez (x-1), to wielomian po lewej stronie również musi być podzielny przez (x-1) (łatwo sprawdzić, że x=1 jest pierwiastkiem wielomianu po lewej stronie). Wykonując dzielenie obu stron przez (x-1) otrzymujemy

$-x+6=Cx+D$, skąd C=-1 i D=6.

Widać, że wykonując opisane operacje można wyznaczyć stałe $A_1,...,A_k$ związane z czynnikiem $(x\text{-}a)^k$.

Stałe $B_1,...,B_n,C_1,...,C_n$ związane z czynnikiem $(x^2+px+q)^n$ mogą być wyznaczone w ten sam sposób poprzez podstawienie do równości wielomianowej zespolonego pierwiastka równania $x^2+px+q=0$ i zastąpienie dzielenia wielomianów przez dwumian x-a dzieleniem przez trójmian x^2+px+q.

Innym sposobem wyznaczania nieznanych współczynników jest wykorzystanie faktu, że równość wielomianów pociąga za sobą równość ich pochodnych (które są wielomianami stopnia o 1 niższego niż wyjściowe wielomiany. Wracając do rozważanego wcześniej przykładu

$5x^2-11x=A(x-1)(x^2+2)+ B(x^2+2)+(Cx+D)(x-1)^2$

wstawiając x=1 otrzymujemy B = -2. Różniczkując obustronnie powyższą tożsamość otrzymujemy

$10x-11=A(x^2+2)+2\,Ax(x-1)+ 2Bx +C(x-1)^2 + 2Cx(x-1)$.

Obliczając wartości lewej i prawej strony dla x=1 otrzymujemy -1=3A-4 więc, tak jak poprzednio, A=1.

Biorąc pod uwagę możliwość przedstawienia funkcji wymiernej właściwej w postaci sumy ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju możemy sprowadzić całkowanie funkcji wymiernej do całkowania wielomianu i całkowania ułamków prostych.

Całkowanie ułamków prostych

I-rodzaju $$\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \begin{vmatrix} t=x-a \\ dt=dx \end{vmatrix} = \int \frac{A}{t^k}dt = A\int t^{-k}\,dt = \begin{cases} A\ln|x-a|+c & \text{dla } k=1 \\ \dfrac{A}{1-k}(x-a)^{1-k}+c & \text{dla } k\neq 1 \end{cases}$$

II-rodzaju $$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}dx = \tfrac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (C-\tfrac{Bp}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

$$= \tfrac{B}{2}I_1 + (C-\tfrac{Bp}{2})I_2,$$

$$I_1 = \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = \begin{Bmatrix} t=x^2+px+q \\ dt=(2x+p)dx \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} \ln(x^2+px+q)+c, & \text{dla } n=1 \\ \tfrac{1}{1-n}(x^2+px+q)^{1-n}+c, & \text{dla } n>1 \end{cases},$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}=\int\frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^n}=\left\{\begin{array}{c} t=\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \\ dx=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\,dt\end{array}\right\}=\left(\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^{2n-1}\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^n}.$$

Do ostatniej całki stosujemy wzór rekurencyjny (R)

Całkowanie funkcji wymiernych względem sinusa i cosinusa

$\int R(\sin x,\cos x)dx$, gdzie $R(u,v)$ jest funkcją wymierną zmiennych u i v

Całkę powyższej postaci można sprowadzić do całki funkcji wymiernej za pomocą tzw. **podstawienia uniwersalnego**

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\ ,\quad (-\pi<x<\pi)\ ,\quad \left\{\begin{array}{l} x=2\operatorname{arctg} t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right\}\qquad \sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\ ,\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

Stąd
$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ostatnia całka jest całką z funkcji wymiernej (złożenie funkcji wymiernych jest funkcją wymierną)

Przykład.
$$\int\frac{dx}{3\sin x+4\cos x}=\int\frac{1}{3\frac{2t}{1+t^2}+4\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\frac{-1}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{3}{2}t-1}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t+\frac{1}{2}}-\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t-2}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t+\frac{1}{2}}{t-2}\right|+c=$$

$$=\{\text{gdzie } t=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right|+c.$$

W pewnych szczególnych przypadkach obliczenia można uprościć stosując inne podstawienie:

1° $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ $\quad t=\cos x$

2° $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ $\quad t=\sin x$

3° $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ $\quad t=\operatorname{tg} x$

Przykład.
$$\int\frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{(1-\cos^2 x)\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}\left\{\begin{array}{c}\Re(u,v)=\frac{u^3}{1+v^2} \\ t=\cos x,\ dt=-\sin x\,dx\end{array}\right\}=\int\frac{t^2-1}{t^2+1}dt=\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}==$$

$$t-2\operatorname{arctg} t+c=\quad\{\text{gdzie } t=\cos x\}=\cos x - 2\operatorname{arctg}\cos x+c.$$

Obliczając tą całkę podstawieniem uniwersalnym otrzymujemy po nieco dłuższych rachunkach otrzymujemy

$$\int\frac{\sin^3 x dx}{1+\cos^2 x}=\left\{t=\operatorname{tg}\tfrac{x}{2}\right\}=\int\frac{8t^3}{(t^2+1)^2(t^4+1)}dt=\left\{u=t^2\right\}=\int\frac{4u}{(u+1)^2(u^2+1)}dt=\int\frac{-2}{(u+1)^2}+\frac{2}{(u^2+1)}dt=$$
$$=\frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}+2\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2\tfrac{x}{2})+c.$$

Wynik ten pozornie różni się od poprzedniego. Poprzez różniczkowanie można wykazać, że na dowolnym przedziale określoności obu funkcji, ich pochodne są identyczne. Ponadto, punkty osobliwe (punkty w których $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ jest nieokreślony) pojawiające się w ostatniej całce, są osobliwościami usuwalnymi, tzn. istnieją granice funkcji w tych punktach , więc można funkcję w naturalny sposób przedłużyć przyjmując wartości równe odpowiednim granicom.

Całkowanie pewnych funkcji niewymiernych

Całki postaci $\int \Re(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$, gdzie $\Re(u,v)$ jest funkcję wymierną argumentów u, v i $ad\text{-}bc\neq 0$ sprowadzamy do całki funkcji wymiernej przez podstawienie

$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, z którego wyznaczamy $x = \frac{t^n d-b}{-t^n c+a}$, $dx = \frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(-t^n c+a)^2}dt$.

Wobec tego $\int \Re(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx = \int \Re(\frac{t^n d-b}{-t^n c+a}, t)\frac{nt^{n-1}(ad-bc)}{(-t^n c+a)^2}dt$. Ostatnia całka jest całką funkcji wymiernej.

Przykład. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{dx}{(\sqrt[12]{2x-1})^4-(\sqrt[12]{2x-1})^3} = \left\{ \begin{array}{c} t = \sqrt[12]{2x-1} \\ x = \frac{t^{12}+1}{2},\ dx = 6t^{11}dt \end{array} \right\} = \int \frac{6t^8}{t-1}dt =$

$= 6\int (t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1})dt = 6(\frac{t^8}{8} + \frac{t^7}{7} \ldots \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|) + c$, gdzie $t = \sqrt[12]{2x-1}$.

Całki postaci $\int \Re(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, gdzie $\Re(u,v)$ jest funkcję wymierną argumentów u i v, sprowadzamy do całki funkcji wymiernej przez jedno z niewykluczających się wzajemnie **podstawień Eulera**:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}\,x$, gdy $a>0$,
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}$, gdy $c>0$,
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, gdy $\Delta>0$.

Przykład. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x^2+2x+4} = t-x,\quad x = \frac{t^2-4}{2(t+1)} \\ dx = \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2}dt,\ \sqrt{x^2+2x+4} = t - \frac{t^2-4}{2(t+1)} = \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{t^2-4}{2(t+1)}+2}{\frac{t^2+2t+4}{2(t+1)}} \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2}dt =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+4t}{(t+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int dt + \int \frac{dt}{t+1} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2} = \frac{1}{2}t + \ln|t+1| + \frac{3}{2}\frac{1}{t+1} + c$ {gdzie $t = x + \sqrt{x^2+2x+4}$} $=$

$= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+2x+4}) + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}| + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+4}} + c =$

$= \sqrt{x^2+2x+4} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+4}| + c$

Ten sam przykład $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+4}}dx = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x^2+2x+4} = xt-2,\quad x = \frac{4t+2}{t^2-1} \\ dx = \frac{-4(t^2+t+1)}{(t^2-1)^2}dt,\ \sqrt{x^2+2x+4} = \frac{2(t^2+t+1)}{t^2-1} \end{array} \right\} =$

$= -4\int \frac{t^2+2t}{(t^2-1)^2}dt = \int (\frac{-1}{t-1} + \frac{-3}{(t-1)^2} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2})dt =$

$= \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| + \frac{3}{t-1} - \frac{1}{t+1} + c$ {gdzie $t = \frac{\sqrt{x^2+2x+4}+2}{x}$}

Całka dwumienna $\int x^r\left(a+bx^s\right)^p dx$ $\quad r,s,p$ -wymierne

Całkę dwumienną potrafimy sprowadzić przez podane obok podstawienia do całki funkcji wymiernej tylko w trzech przypadkach

1. p całkowite, $\quad x=u^k$, gdzie k - wspólny mianownik ułamków r i s.
2. $\frac{r+1}{s}$ całkowite, $\quad a+bx^s=u^n$, gdzie n - mianownik ułamka p.
3. $\frac{r+1}{s}+p$ całkowite, $\quad \frac{a+bx^s}{x^s}=u^n$, gdzie n - mianownik ułamka p.

Przykład . $\int\sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}dx=\int x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{2}}dx=\left\{\frac{1-x}{x}=u^2, x=\frac{1}{u^2+1}, dx=\frac{-2udu}{(u^2+1)^2}\right\}=-2\int\frac{du}{u^2(u^2+1)}=$
$=-2\int\frac{du}{u^2}+2\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{2}{u}+2\operatorname{arctg}u+c\{\text{gdzie } u=\sqrt{\frac{1-x}{x}}\}=2\sqrt{\frac{x}{1-x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}+c$.

Dodatek

Przykład funkcji różniczkowalnej o nieciągłej pochodnej.

Niech $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x};\ x\neq 0\\ 0;\ x=0;\end{cases}$. Widać że $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0$.

Wobec tego $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x};\ x\neq 0\\ 0;\ x=0;\end{cases}$. Funkcja f jest wszędzie różniczkowalna natomiast jej pochodna f' nie jest ciągła w punkcie 0, gdyż granica $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ nie istnieje.

Twierdzenie. Pochodna funkcji różniczkowalnej na przedziale $[a,b]$ ma własność Darboux tzn.

$$f'(a)<\lambda<f'(b)\Rightarrow \exists c\in(a,b)\ \ f'(c)=\lambda.$$

Dowód. Rozważmy funkcję $g(x)=f(x)-\lambda x$ określoną na $[a,b]$. Widać, że

- $g'(a)=f'(a)-\lambda<0$, więc funkcja g jest malejąca w pewnym prawostronnym sąsiedztwie punktu a.
- $g'(b)=f'(b)-\lambda>0$, więc funkcja g jest rosnąca w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu b.

Wynika stąd że ciągła (bo różniczkowalna) funkcja g osiąga w pewnym punkcie $c\in(a,b)$ kres dolny (minimum globalne więc i lokalne) zbioru swoich wartości. Stąd z tw. Frermata $\exists c\in(a,b)\ \ g'(c)=0,$ co implikuje $\exists c\in(a,b)\ \ f'(c)=\lambda.$