Pochodna Frecheta (pochodna mocna)

Z rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej wiemy, że dla funkcji różniczkowalnych prawdziwe jest twierdzenie o przedstawieniu przyrostu funkcji. Możliwość odpowiedniego przedstawienia przyrostu funkcji, może być wykorzystana jako alternatywny sposób zdefiniowania różniczkowalności. To podejście do różniczkowalności można łatwo uogólnić na funkcje wielu zmiennych.

Def. Funkcja $f: R^k \supset Ot(\mathbf{x},\delta) \ni \mathbf{x} \to f(\mathbf{x}) \in R$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x}$ jeżeli istnieją stałe $A_1,...,A_k$ takie, że dla dostatecznie małych przyrostów $\mathbf{h}=(h_1,...,h_k)$

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})=A_1h_1+...+A_kh_k+r(\mathbf{x},\mathbf{h}) \text{, przy czym } \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{r(\mathbf{x},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0 .$$

Wyrażenie $A_1h_1+...+A_kh_k$ można zapisać w postaci macierzowej $\mathbf{A}\,\mathbf{h}$, gdzie $\mathbf{A}=[A_1,...,A_k]$, $\mathbf{h}=\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}$.

Pochodną funkcji f w punkcie x nazywamy odwzorowanie liniowe $\mathbf{L}: R^n \to R$ reprezentowane przez macierz **A**, czyli warunek różniczkowalności można zapisać

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})=\mathbf{L}\,\mathbf{h}+r(\mathbf{x},\mathbf{h}) \text{, przy czym } \lim_{\mathbf{h}\to 0}\frac{r(\mathbf{x},\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}=0 .$$

Fakty :

- jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x}$, to jest ona ciągła w punkcie $\mathbf{x}$
- jeżeli f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}$, to f ma w $\mathbf{x}$ pochodne kierunkowe w dowolnym kierunku, więc ma także pochodne cząstkowe, przy czym $A_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$
- jeżeli f ma w $Ot(\mathbf{x},\delta)$ pochodne cząstkowe **ciągłe** w $\mathbf{x}$, to f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}$
- jeżeli f jest różniczkowalna, to $f'_{\mathbf{k}}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})k_i$ w zapisie macierzowym $f'_{k}(x)=\mathbf{Ak}$

Uzasadnienia powyższych faktów

Tw. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x}$, to jest ona ciągła w punkcie $\mathbf{x}$.

Jest to natychmiastowa konsekwencja definicji różniczkowalności

Pochodne cząstkowe i kierunkowe a różniczkowalność.

f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x}$ $\Rightarrow$

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{k})-f(\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot t\mathbf{k}+r(x,t\mathbf{k}) \qquad /:t \quad r(\mathbf{x},t\mathbf{k})=o(\|t\mathbf{k}\|)$$

$$\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{k})-f(\mathbf{x})}{t}=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\cdot\mathbf{k}+\frac{r(\mathbf{x},t\mathbf{k})}{t}$$

$$\left|\frac{r(\mathbf{x},t\mathbf{k})}{t}\right|=\frac{|r(\mathbf{x},t\mathbf{k})|}{\|t\mathbf{k}\|}\|\mathbf{k}\|\to 0 \text{, gdy } t\to 0 \Rightarrow f'_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})=\mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{k}$$

Niech $\mathbf{e}_i$- i-ty wektor bazy kanonicznej

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f'_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{x}) = [A_1,\dots,A_k]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \leftarrow \{\text{i-te miejsce}\} = A_i$$

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}\, f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x})\right]$$ - gradient funkcji f w punkcie $\mathbf{x}$

Ogólnie dla $\mathbf{f}: R^k \supset D \to R^m$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x})\end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{m} f_j(\mathbf{x})\bar{\mathbf{e}}_j \qquad \mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\dots,\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}),\dots,\frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{m\times k}$$

Pokazano więc fakt: Jeżeli funkcja $\mathbf{f}: R^k \supset D \to R^m$, $\mathbf{x}\in D$ - otwarty, jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{x}\in D$, to istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{x})$, $j=1,\dots,m$ $i=1,\dots,n$.

Twierdzenie odwrotne nie zachodzi, tzn. istnienie pochodnych cząstkowych nie gwarantuje różniczkowalności (a nawet nie gwarantuje ciągłości)

Tw.(**Warunek wystarczający różniczkowalności**) Jeżeli funkcja $f: R^k \supset D \to R$ (D-otwarty, $\mathbf{x}\in D$) ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_j}: \mathbf{x}\in D \to \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ $(j=1,\dots,k)$ w D, **ciągłe** w $\mathbf{x}$, to f jest różniczkowalna w $\mathbf{x}$.

Dow: dla k=2

$$\mathbf{x} = (x_1,x_2) \quad \mathbf{h} = (h_1,h_2) \qquad f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = f(x_1+h_1,x_2+h_2) - f(x_1,x_2) =$$

$$f(x_1+h_1,x_2+h_2) - f(x_1,x_2+h_2) + f(x_1,x_2+h_2) - f(x_1,x_2) =$$

z tw. Lagrange'a o wartości średniej

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}_1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{c}_2)h_2 =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})h_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right)h_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{c}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})\right)h_2$$

Wystarczy pokazać, że $r(\mathbf{x},\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|)$ czyli, że

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right| \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{c}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})\right| \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Jest to prawda, gdyż

$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{c}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\right| = 0$ i $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{c}_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x})\right| = 0$ z ciągłości pochodnych cząstkowych w $\mathbf{x}$ a wyrażenia $\frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ i $\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ są ograniczone,

Interpretacja geometryczna pochodnej

Niech $f: X \supset D \to Y$. Zbiór punktów $W = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in X \times Y : \mathbf{x} \in D \subset X\}$ nazywamy **wykresem funkcji** $f: X \supset D \to Y$.

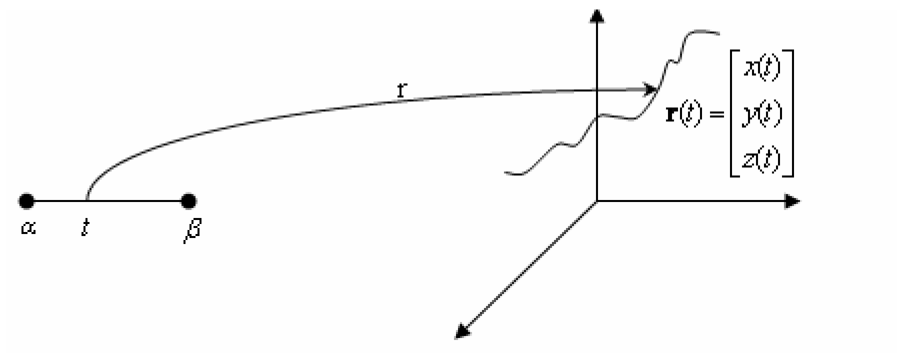
Fakt. Jeżeli funkcja $f: X \supset D \to Y$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a}\in D$ to wektor $s\in X\times Y$ jest styczny do wykresu W funkcji f w punkcie $(\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wektor $\mathbf{h}\in X$ taki, że

$$s=(\mathbf{h}, f'(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h})$$

Tw. Jeżeli funkcja $\mathbf{f}: X \supset E \to Y$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{a}\in E$, to hiperpłaszczyzna w $X\times Y$ o równaniu $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{f}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ jest hiperpłaszczyzną styczną do wykresu funkcji $\mathbf{f}$ w punkcie $(\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{a}))$.

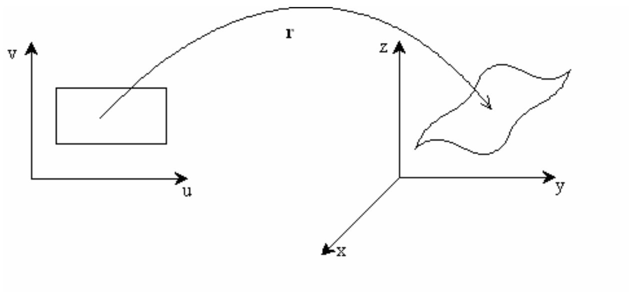
Przypadki szczególne

- $\mathbf{r}: [\alpha, \beta] \ni t \to \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \in R^3$ jest funkcją wektorową, którą interpretujemy jako opis parametryczny krzywej w R^3. Załóżmy, że funkcja ta jest różniczkowalna w punkcie $t_0\in[\alpha,\beta]$



Pochodna $\mathbf{r}'(t_0)$ jest odwzorowaniem liniowym ciągłym z R w R^3 reprezentowanym przez macierz $\mathbf{r}'(t_0) = \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \\ z'(t_0) \end{bmatrix}$. Prosta o równaniu parametrycznym $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t-t_0)$ jest styczną do krzywej $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ w punkcie $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$.

- $\mathbf{r}:[a,b]\times[c,d]\ni(u,v)\to\mathbf{r}(u,v)=\begin{bmatrix}x(u,v)\\ y(u,v)\\ z(u,v)\end{bmatrix}\in R^3$ jest funkcją wektorową, którą interpretujemy jako opis parametryczny powierzchni w R^3. Załóżmy, że funkcja ta jest różniczkowalna w punkcie (u_0,v_0)



Pochodna $\mathbf{r}'(u_0,v_0)$ jest odwzorowaniem liniowym ciągłym z R^2 w R^3 reprezentowanym przez macierz $\mathbf{r}'(u_0,v_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{bmatrix}_{(u_0,v_0)}$.

Płaszczyzna o równaniu parametrycznym $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0,v_0)+\mathbf{r}'(u_0,v_0)\begin{bmatrix}u-u_0\\ v-v_0\end{bmatrix}$, które można także zapisać w postaci:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u_0,v_0)+\mathbf{r}_u(u-u_0)+\mathbf{r}_u(v-v_0),$$

gdzie $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ oznaczają kolumny macierzy reprezentującej pochodną $\mathbf{r}'(u_0,v_0)$ jest płaszczyzną styczną do powierzchni $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$ w punkcie $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(u_0,v_0)$.

Po rozpisaniu na współrzędne w postaci równanie płaszczyzny stycznej przybiera postać

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\\ z_0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial u}\end{bmatrix}(u-u_0)+\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial v}\end{bmatrix}(v-v_0).$$

Po przemnożeniu obu stron równania $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\mathbf{r}_u(u-u_0)+\mathbf{r}_v(v-v_0)$ skalarnie przez wektor

$\mathbf{n}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$ ortogonalny do $\mathbf{r}_u$ i $\mathbf{r}_v$ rugujemy parametry u i v i otrzymujemy ogólną postać równania płaszczyzny stycznej

$$\mathbf{n}\circ(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)=0,\quad \text{gdzie } \mathbf{n}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v.$$

W szczególności jeśli powierzchnia jest wykresem funkcji 2 zmiennych $z=f(x_1,x_2)$, to można ją zapisać parametrycznie przyjmując $u=x_1$ i $v=x_2$. Wówczas

$\mathbf{r}_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix}$, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} \\ -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1 \end{bmatrix}$. Stąd płaszczyzna o równaniu

$z - b = A_1(x_1 - a_1) + A_2(x_2 - a_2)$,

gdzie $A_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)$, $A_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)$ $b = f(a_1, a_2)$ **jest styczna do powierzchni** o równaniu $z = f(x_1, x_2)$ w punkcie (a_1, a_2, b).

Przykłady

1. Napisać równanie prostej stycznej do krzywej $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \\ z(t) = \frac{t^2}{\pi} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$, $t \in R$ w punkcie $A(0,2,0)$.

Rozwiązanie. Punktowi $A(0,2,0)$ odpowiada parametr $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Ponadto $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Wobec tego poszukiwane równanie stycznej jest następujące $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$.

2. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z=x^2+y^2$ w punkcie $A(1,2,5)$.

Rozwiązanie. Ogólnie $z - z(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}{}_{(x_0, y_0)}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}{}_{(x_0, y_0)}(y - y_0)$. W rozważanym przypadku z-5=2(x-1)+4(y-2).