

Rozdział 1

Opracowanie danych pomiarowych

Andrzej Zięba

Pomiary fizyczne mogą być dokonywane tylko ze skończoną dokładnością. Powodem tego jest niedoskonałość przyrządów pomiarowych i nieprecyzyjność naszych zmysłów biorących udział w obserwacjach. Podawanie samego tylko wyniku pomiaru jest niewystarczające, opracowanie pomiarów winno zawierać także miarę ich wiarygodności, czyli **niepewność pomiaru**. Z potrzeby rozwiązania powyższych problemów powstała teoria niepewności pomiaru (zwana wymiennie rachunkiem niepewności pomiaru). W tym opracowaniu przedstawiono jej najważniejsze rezultaty, ilustrowane przykładami.

Teoria niepewności pomiaru nie jest ścisłą teorią fizyczną, lecz raczej przybliżonym matematycznym opisem niedoskonałości eksperymentu. Jej metody i rezultaty nie ograniczają się do fizyki, lecz są takie same – lub bardzo podobne – dla wszystkich nauk doświadczalnych. Międzynarodowa społeczność naukowa od dawna dążyła do uzgodnienia terminologii i metod szacowania niepewności. Rezultatem jest dokument *Guide to Expression of Uncertainty in Measurement* opracowany przez Międzynarodową Organizację Normalizacyjną ISO w porozumieniu z szeregiem światowych organizacji naukowo–technicznych¹. Dokument ten, nazywany dalej *Przewodnikiem*, uważać należy za międzynarodową normę oceny niepewności pomiaru. Oficjalne tłumaczenie dokumentu na język polski² rozpoczęło wdrażanie jej postanowień w naszym kraju. Przedstawione w rozdziale 1 nazewnictwo, symbolika i metody obliczania niepewności są zgodne z zaleceniami *Przewodnika*. Stanowią umiejętność profesjonalną potrzebną wszystkim wykonującym pomiary.

Teoria niepewności pomiaru wykorzystuje zasady rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Podstawowe rezultaty tego działu matematyki, niezbędne dla dobrego rozumienia rachunku niepewności pomiaru, przedstawiono skrótowo w Dodatkach A, B i C. Na definicje, twierdzenia i wzory tam przedstawione będziemy się w tym rozdziale niejednokrotnie powoływać.

1.1 Co to jest niepewność pomiaru?

Ilościowy opis jakiegokolwiek zjawiska rozpocząć musimy od zdefiniowania charakteryzujących go miar.

Założmy, że x_i jest rezultatem kolejnego pomiaru wielkości fizycznej, której wartość rzeczywista x_0 jest znana. W praktyce wielkość x_0 można utożsamiać z wynikiem pomiaru za pomocą innej, znacznie dokładniejszej metody. Pierwszą miarą błędu, jaka się narzuca, jest różnica między daną wartością zmierzoną x_i i wartością rzeczywistą x_0 ,

$$\Delta x_i = x_i - x_0 \quad (1.1)$$

Taką wielkość nazywamy *błędem*, albo *różnicą między wartością zmierzoną i rzeczywistą*. Nie stanowi ona miary dokładności metody pomiarowej, gdyż podobny pomiar, ale wykonany innym przyrządem, w innym czasie i miejscu, da inną wartość. Zatem Δx_i jest liczbą losową, której wartości przewidzieć się nie da, podobnie jak nie można przewidzieć rezultatu rzutu kostką.

¹Zwięzłą informację na temat historii i obecnego statusu można znaleźć w internecie: <http://physics.nist.gov/Uncertainty>

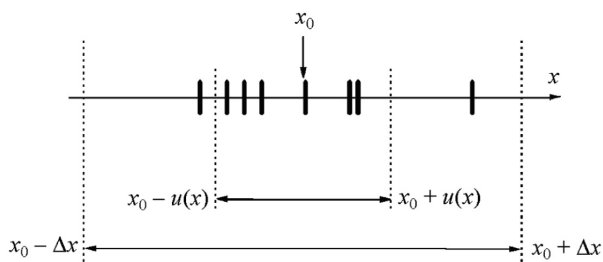
²Wyrażenie *Niepewności Pomiaru*. Przewodnik. Warszawa, Główny Urząd Miar 1999r.

Ale o rezultatach rzutu kostką można wiedzieć, że zawierają się w szeregu liczb całkowitych od 1 do 6. Podobnie, celem rachunku niepewności jest choćby przybliżone oszacowanie rozrzutu wyników pomiarów. *Przewodnik* przyjmuje definicję:

Niepewność pomiaru jest związanym z rezultatem pomiaru parametrem, charakteryzującym rozrzut wyników, który można w uzasadniony sposób przypisać wartości mierzonej.

Definicja sugeruje, że możliwe są różne miary niepewności. Dla określenia niepewności wykorzystujemy dwie miary: podstawową jest niepewność standardowa $u(x)$, drugą miarą przydatną w określonych sytuacjach jest niepewność maksymalna Δx .

Rysunek 1.1: Rozrzut wyników pomiaru i jego miary



W przypadku **niepewności maksymalnej** Δx staramy się określić przedział

$$x_0 - \Delta x < x_i < x_0 + \Delta x, \quad (1.2)$$

w którym mieszczą się wszystkie wyniki pomiaru x_i , aktualnie wykonane i przyszłe (rys. 1.1).

Niepewność maksymalna jest miarą deterministyczną, gdyż twierdzimy, że wartość prawdziwa zawarta jest *na pewno* w przedziale $x_0 \pm \Delta x$. Niepewność maksymalna jest stosowana w określonych sytuacjach, np. jako miara dokładności elektrycznych przyrządów pomiarowych.

Miarą dokładności pomiaru najpowszechniej stosowaną i uznaną za podstawową przez *Przewodnik* jest **niepewność standardowa**. Jej najkrótszą definicją jest zdanie:

Niepewność standardowa jest oszacowaniem odchylenia standardowego.

Skomentujmy kluczowe słowa tej definicji:

- (i) W przedstawionym sformułowaniu kryje się założenie, że rezultat pomiaru jest zmienną losową, której rozrzut charakteryzuje parametr zwany *odchyleniem standardowym*. Odchylenie standardowe zdefiniować można jako pierwiastek z średniej wartości kwadratu różnicy wartości zmierzonej i rzeczywistej. (Wzór A6a w Dodatku A, tamże podane są podstawowe informacje nt. własności tego parametru statystycznego).
- (ii) Dokładnej wartości odchylenia standardowego nie znamy, niepewność standardowa jest jego niezbyt dokładnym *oszacowaniem* (estymatorem, oceną).

Rysunek 1.1 porównuje graficznie obydwie miary niepewności. Niepewność standardowa u jest miarą średniego odchylenia wyników pomiarów od wartości rzeczywistej, zatem część wyników (z prawdopodobieństwem około 1/3) odchyła się od x_0 więcej niż $\pm u$.

W dalszym ciągu tekstu słowo „niepewność” bez przymiotnika „maksymalna” oznacza zawsze niepewność standardową. Symbol niepewności standardowej u (od ang. uncertainty) możemy wykorzystywać na trzy sposoby:

$$u \qquad u(x) \qquad u(\text{stężenie NaCl})$$

Oznaczenie $u(x)$ stosujemy, gdy trzeba określić, co jest wielkością mierzoną. Można się zżymać, że notacja z użyciem nawiasów wykorzystuje nieprawnie symbol funkcji matematycznej³. Zaletą wprowadzonej przez *Przewodnik* notacji jest przejrzystość i unikanie indeksów. Możliwość zapisu wielkości mierzonej w postaci słownej, jak przykładowe $u(\text{stężenie NaCl})$, ułatwia tworzenie dokumentacji pomiaru. Niepewność u posiada wymiar, taki sam jak wymiar wielkości mierzonej.

Niepewnością względną u_r ⁴ nazywamy stosunek niepewności (bezwzględnej) do wielkości mierzonej,

$$u_r(x) = \frac{u(x)}{x} \quad (1.3)$$

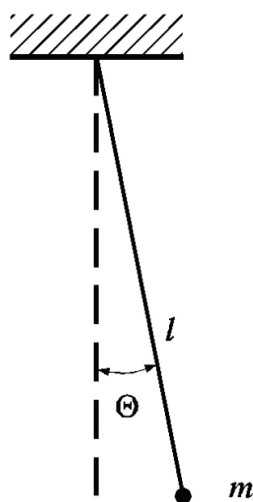
Niepewność względna jest wielkością bezwymiarową, często wyrażaną w %. Daje lepsze wyobrażenie o dokładności pomiaru niż niepewność bezwzględna u . Umożliwia też porównanie niepewności wielkości fizycznych posiadających różny wymiar.

Pojęciem jakościowym, związanym ze słowem niepewność jest *dokładność* (pomiaru). Zaletą tego słowa jest możliwość utworzenia przymiotnika: pomiar dokładniejszy, to pomiar o mniejszej niepewności.

Wprowadzenie do przykładów

Integralną częścią wykładu rachunku niepewności pomiaru są przykłady. Większość z nich (przykłady *1.1*, *1.2*, *1.3*, *1.5*, *1.6* i *1.7*) dotyczą jednego prostego eksperymentu: badania ruchu wahadła prostego. Wahadłem prostym (lub: matematycznym) nazywamy punkt materialny o masie m zawieszony na nieważkiej i nierozciągliwej nici o długości l (rys. *1.2*).

Rysunek 1.2: Wahadło proste



Praktyczną realizacją tego wyidealizowanego obiektu może być np. metalowa kula zawieszona na zwykłej nici krawieckiej. Gdy kąt wychylenia Θ jest mały, okres wahadła T_0 zależy tylko od jego długości l i przyspieszenia ziemskiego g ,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.4)$$

³Ponieważ $u(x)$ jest liczbą, a nie funkcją. Niemożliwe jest np. obliczenie pochodnej $\frac{d}{dx}u(x)$!

⁴*Przewodnik* nie określił symbolu dla niepewności względnej. W opracowaniu przyjęto symbol u_r (indeks r od ang. *relative*), zalecany przez amerykański National Institute of Standards and Technology (NIST), najważniejszy w świecie instytut metrologiczny. Patrz: <http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty>. Dla niepewności maksymalnej zastosowano tradycyjny symbol Δx .

1.2 Rodzaje błędów pomiaru

Według przyjętego w *Przewodniku* nazewnictwa słowo „błąd”, obok znaczenia ilościowego, określonego równaniem 1.1, może być używane w znaczeniu jakościowym.

Poniżej omówimy trzy rodzaje błędu, z jakimi spotykamy się przy wykonywaniu eksperymentów:

- 1) systematyczny,
- 2) przypadkowy,
- 3) grubo.

Przy **błędzie przypadkowym** obserwujemy rozrzut wyników pomiaru wokół wartości rzeczywistej (rys. 1.1). Wynik kolejnego pomiaru jest inny, przy czym występuje w przybliżeniu taka sama szansa uzyskania wyników tak większych, jak i mniejszych od x_0 .

Jakie są przyczyny statystycznego rozrzutu wyników pomiaru w fizyce klasycznej, gdzie większość zjawisk jest opisywana przez prawa deterministyczne? Najczęściej źródłem błędu przypadkowego jest niedokładność i przypadkowość działania ludzkich zmysłów. Wykonując kolejny pomiar człowiek wykona go nieco inaczej, stąd powstanie statystyczny rozrzut wyników. Na przykład wyniki pomiaru czasu spadania kulki z dwumetrowej wysokości przy użyciu stopera cechuje pewien rozrzut pomimo tego, że sam stoper chodzi równo. Źródłem statystycznego rozrzutu wyników pomiaru mogą być też szумы generowane w samym układzie pomiarowym i zakłócenia zewnętrzne. Tego typu przyczyny błędu przypadkowego występują raczej w pomiarach o wysokiej czułości.

Z **błędem systematycznym** mamy do czynienia, gdy przy powtarzaniu pomiaru występuje ta sama różnica między wartościami zmierzonymi a wartością rzeczywistą, natomiast rozrzut wyników poszczególnych pomiarów jest niewielki lub nie występuje w ogóle. Jeżeli np. za pomocą omomierza zmierzymy wartość opornika wzorcowego (będącego realizacją wartości rzeczywistej), to stwierdzimy występowanie systematycznej różnicy, takiej samej przy kolejnym powtarzaniu pomiaru.

Dawniej uważano, że miarą błędu systematycznego może być tylko niepewność maksymalna. *Przewodnik* traktuje błąd systematyczny jako zjawisko przypadkowe, gdyż nie znamy *a priori* jego wielkości i znaku. Tyle że wykonując pomiar jednym przyrządem, dysponujemy tylko jedną realizacją zmiennej losowej. Losową próbkę można jednak uzyskać, jeżeli pomiary wykonamy przy użyciu zbioru przyrządów tej samej dokładności – można w ten sposób uzyskać doświadczalny rozkład prawdopodobieństwa dla błędu uważanego za systematyczny (rys. 1.3).

Omówmy jeszcze jeden rodzaj błędu, którym teoria niepewności pomiaru po prostu się nie zajmuje. **Błąd grubo** to różnica między wynikiem pomiaru i wartością rzeczywistą, na ogół drastycznie duża, powstała na skutek nieumiejętności użycia danego przyrządu, pomyłek przy odczytywaniu i zapisie wyników itp.

Z przypadkiem występowania błędu grubego w serii pomiarów mamy do czynienia, gdy jeden z wyników odbiega znacznie od pozostałych. Przykład 1.1 ilustruje dwa z najróżniejszych możliwości popełnienia błędu grubego.

Przykład 1.1 Wahadło – błędy grube przy pomiarze okresu

Dla zmierzenia okresu wahadła zastosowano sekundomierz z odczytem cyfrowym (rys. 4, w rozdziale 2). Mierzono 9 razy czas trwania 50 okresów. Rezultaty spisano z okna przyrządu w postaci liczb:

103,88 104,16 105,26 104,03 103,90 103,97 103,85 104,02 103,85 104,02 103,92

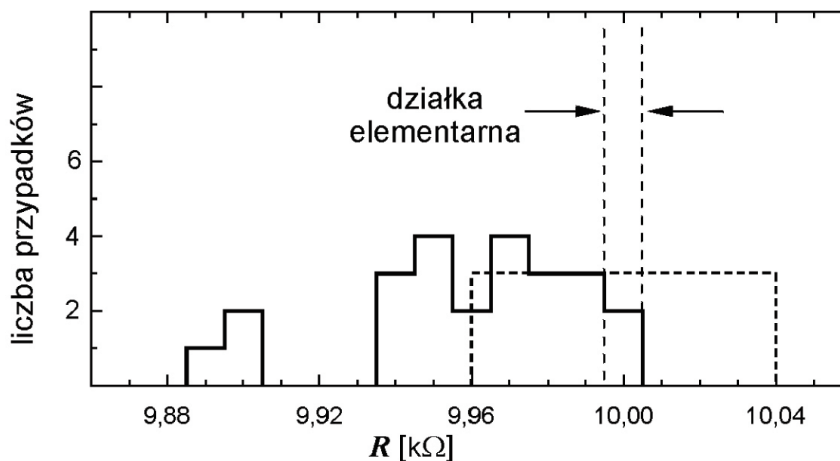
Obliczone na podstawie tych danych przyspieszenie ziemskie okazało się trzy razy za małe. Eksperymentator spojrzawszy na sekundomierz i zrozumiał: pierwsza cyfra w oknie (jedyńka) oznacza liczbę *minut*, czas 50 okresów wyrażony w sekundach wynosi:

63,88 64,16 65,26 64,03 63,90 63,97 63,85 64,02 63,92

Tak wykryto i poprawiono pierwszy błąd grubo.

Przyjrzenie się wynikom pokazuje, że 8 liczb skupia się w pobliżu 64 sekund, ale trzeci wynik, 65,26 s, jest o ponad sekundę większy. Zaczynamy podejrzewać, że zmierzaliśmy 51 okresów zamiast 50. Upewnia nas w tym przekonaniu fakt, że rezultat 65,26 s różni się od pozostałych o wartość zbliżoną do jednego okresu. Wątpliwy rezultat odrzucamy.

Rysunek 1.3: Rozkład wyników pomiaru opornika wzorcowego 10 kΩ za pomocą 24 multimetrów cyfrowych tej samej klasy dokładności z pracowni studenckich Wydziału Fizyki i Techniki Jądrowej AGH oraz Wydziału Matematyki i Fizyki UJ. Linia przerywana przedstawia histogram teoretyczny dla rozkładu jednostajnego o półszerokości równej niepewności maksymalnej ΔR deklarowanej przez producenta.



1.3 Ocena niepewności typu A

Pod tą nazwą kryją się metody wykorzystujące statystyczną analizę serii pomiarów. Najprostszym przypadkiem jest analiza serii n wyników pomiaru: $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$. Traktujemy je jako n realizacji zmiennej losowej o wartości oczekiwanej x_0 (utożsamianej z wartością rzeczywistą) oraz odchyleniu standardowym σ i stosujemy standardowe rezultaty teorii estymacji (Dodatek B). W większości przypadków najlepszym oszacowaniem x mierzonej wartości jest średnia arytmetyczna

$$x \equiv \bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i \quad (1.5)$$

We wzorze 1.5, jak i we wszystkich wzorach w rozdziale 1, znak sumy bez wskaźników oznacza sumowanie od $i = 1$ do n .

Miarą rozrzutu wyników pomiaru jest parametr statystyczny zwany *estymatorem odchylenia standardowego*,

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (1.6)$$

Wielkość s_x można by utożsamiać z niepewnością pomiaru, gdybyśmy za jego wynik przyjęli którąkolwiek z wartości x_i . Przy obliczaniu średniej następuje jednak częściowa kompensacja odchyłek różnych znaków, dzięki czemu jest ona bliższa wartości rzeczywistej x_0 niż wynik pojedynczego pomiaru. Ilościowo, *estymator odchylenia standardowego średniej* $s_{\bar{x}}$ jest \sqrt{n} razy mniejszy od estymatora s_x ,

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad (1.7)$$

Ponieważ za wynik pomiaru przyjmujemy średnią, niepewnością pomiaru $u(x)$ utożsamiamy z estymatorem odchylenia standardowego średniej, $u(x) \equiv s_{\bar{x}}$. Łącząc ze sobą wzory 1.6 i 1.9 otrzymujemy

$$u(x) \equiv s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (1.8)$$

Wielkości s_x oraz $s_{\bar{x}}$ nazywamy estymatorami dlatego, że choć obliczane z jednoznacznych wzorów, są równe prawdziwym wartościom odchylenia standardowego tylko w granicy $n \rightarrow \infty$. Gdy liczba pomiarów n jest skończona, odchylenie standardowe średniej – czyli niepewność pomiaru – znamy ze skończoną, niezbyt wielką dokładnością (tab. 1.1). Powtarzanie pomiaru przynosi zatem dwie korzyści: zmniejsza niepewność

Tabela 1.1: Względna niepewność oceny odchylenia standardowego s_x i $s_{\bar{x}}$ dla serii n pomiarów

Liczba pomiarów	2	3	4	5	6	8	10	100
Niepewność oceny	43 %	38 %	34 %	31 %	28 %	25 %	22 %	7 %

spowodowaną błędem przypadkowym i umożliwia oszacowanie niepewności. Na pytanie, ile pomiarów warto wykonywać, nie sposób odpowiedzieć jednoznacznie. Uważa się, że dla określenia odchylenia standardowego, trzeba wykonać co najmniej 5 ÷ 10 pomiarów. Pozwala to na ocenę niepewności z dokładnością rzędu 30 ÷ 20 % (por. tab. 1.1). Ponadto dla serii np. 9 pomiarów niepewność średniej jest 3-krotnie mniejsza od niepewności pojedynczego pomiaru. Na ogół nie opłaca się wykonywanie zbyt dużej liczby pomiarów, gdyż zwiększenie dokładności ze wzrostem n jest powolne.

Wykonywanie zupełnie małej liczby pomiarów, na przykład 2 lub 3, ma sens jako sprawdzian powtarzalności. Za wynik pomiaru przyjmujemy średnią arytmetyczną, ale dla uzyskania niepewności lepiej stosować ocenę typu B (podrozdz. 1.4).

Przykład 1.2 Obliczenie niepewności pomiaru okresu drgań wahadła (ciąg dalszy przykładu 1.1)

Po odrzuceniu wyniku $50T = 65,26$ s obciążonego błędem grubym i po podzieleniu pozostałych wartości przez 50 uzyskujemy osiem wartości okresu wahadła (w sekundach):

1,2776 1,2832 1,2806 1,2780 1,2794 1,2770 1,2804 1,2784

Wartości te przedstawiono w odpowiedniej skali na rysunku 1.1.

Schemat obliczeń średniej oraz niepewności standardowych pojedynczego pomiaru i średniej wygląda następująco:

$$T_0 = (1,2776 + 1,2832 + \dots + 1,2784)/8 = 1,27933 \text{ s},$$

$$s_{T_0} = \sqrt{\frac{(1,2776 - 1,27933)^2 + (1,2832 - 1,27933)^2 + \dots + (1,2784 - 1,27933)^2}{8 - 1}} = 0,0020 \text{ s},$$

$$u(T_0) = \frac{0,0020 \text{ s}}{\sqrt{8}} = 0,00071 \text{ s}.$$

Obliczenie T_0 oraz $u(T_0)$ za pomocą kalkulatora omówione jest w podrozdziale 1.11.

1.4 Ocena niepewności typu B.

Stosowana jest, gdy statystyczna analiza serii pomiarów nie jest możliwa. Na przykład dla błędu systematycznego lub gdy występuje błąd przypadkowy, ale dysponujemy tylko jednym rezultatem pomiaru. **Ocena niepewności typu B** opiera się na naukowym osądzie eksperymentatora wykorzystującym wszystkie informacje o pomiarze i źródłach jego niepewności.

Do oceny typu B wykorzystać można między innymi:

- dane z pomiarów poprzednich,
- doświadczenie i wiedzę na temat przyrządów i obiektów mierzonych,
- informacje producenta przyrządów,
- niepewności przypisane danym zaczerpniętym z literatury.

Gdy informacja ta jest dobra, dokładność oceny typu B jest porównywalna z dokładnością oceny typu A. (Ocena

statystyczna jest też niezbyt dokładna, por. tabela 1.1). W trudniejszych sytuacjach ocena typu B pozwala oszacować tylko rząd wielkości niepewności.

Najczęściej ocena typu B dotyczy określenia niepewności wynikających ze skończonej dokładności przyrządów. W wyniku rewolucji w miernictwie wynikającej z postępów elektroniki prawie wszystkie używane współcześnie przyrządy pomiarowe to albo proste przyrządy mechaniczne, albo też elektroniczne mierniki cyfrowe.

Proste przyrządy mechaniczne

Producenci przyrządów takich jak przymiar milimetrowy, suwmiarka czy termometr cieczowy na ogół nie określają ich dokładności. Powszechnie uważa się, że niesprecyzowana bliżej „dokładność” jest równa wartości najmniejszej działki skali, zwanej dalej **działką elementarną**. Jej wartość wynosi dla linijki 1 mm, suwmiarki 0,05 mm, śruby mikrometrycznej 0,01 mm, termometru lekarskiego 0,1 °C. Jako pierwsze przybliżenie dla niepewności standardowej przyjmujemy:

$$u(x) \approx \text{działka elementarna.} \quad (1.9)$$

Ocena ta może być skorygowana w górę lub w dół zgodnie z posiadaną wiedzą i doświadczeniem. Na przykład, jeżeli mierzymy linijką średnicę monety jednogroszowej i oceniamy „na oko” również dziesiąte części milimetra, to niepewność standardowa może zmniejszyć się do 0,2 mm. Z drugiej strony, przy pomiarze rozmiarów pokoju taśmą mierniczą, niepewność należy przyjąć większą niż 1 mm, choć skalę z podziałką milimetrową mamy na całej pięciometrowej taśmie.

Elektroniczne mierniki cyfrowe

W przyrządach z odczytem cyfrowym wartość odpowiadająca zmianie ostatniej cyfry, zwana umownie również działką elementarną, określa rozdzielczość przyrządu. Niepewność pomiaru jest większa i podawana jest przez producenta w instrukcji przyrządu. Pod nazwą „błąd graniczny”, „dokładność”, itp., kryje się niepewność maksymalna, definiowana najczęściej jako określony ułamek wielkości mierzonej plus ułamek zakresu,

$$\Delta x = C_1 \cdot x + C_2 \cdot \text{zakres} \quad (1.10)$$

Na przykład dla omomierzy z rysunku 1.3 $C_1 = 0,2\%$, $C_2 = 0,1\%$. Przy pomiarze 10 kΩ na zakresie 20 kΩ otrzymujemy $\Delta x = 0,04$ kΩ, równowartość 4 działek elementarnych.

Uzyskaną ze specyfikacji producenta niepewność maksymalną *Przewodnik* zaleca zamienić na niepewność standardową⁵ przy użyciu wzoru

$$u(x) = \frac{\Delta x}{\sqrt{3}} \quad (1.11)$$

Wzór 1.12 wynika z założenia, że (jeżeli nie mamy dodatkowych informacji) wynik pomiaru winien wystąpić z jednakowym prawdopodobieństwem w przedziale $\pm \Delta x$. Innymi słowy, zakładamy, że mamy do czynienia z rozkładem jednostajnym, dla którego odchylenie standardowe jest równe połowie szerokości rozkładu podzielonej przez $\sqrt{3}$ (Dodatek A, wzór A7).

Przykład 1.3 Ocena niepewności typu B dla pomiaru długości wahadła

Długość wahadła mierzymy przymiarem milimetrowym uzyskując wartość $l = 410$ mm. Przyjmujemy niepewność równą działce skali: $u(l) = 1$ mm. Ocena ta bierze pod uwagę trudność dobrego przyłożenia przymiaru do odcinka: środek kuli – punkt zawieszenia wahadła.

⁵Zmianę tę wykonujemy, gdy jest potrzebna, w szczególności w celu zastosowania prawa przenoszenia niepewności (podrozdział 1.5).

1.5 Prawo przenoszenia niepewności

Wiele wielkości fizycznych nie da się zmierzyć pojedynczym przyrządem, lecz wyznacza się metodą pomiaru pośredniego. Na przykład przyspieszenie ziemskie można wyznaczyć na podstawie pomiaru długości i okresu drgań wahadła. Przypuśćmy, że interesującą nas wielkość y obliczamy z wzoru funkcyjnego

$$y(x_1, \dots, x_k, \dots),$$

gdzie kolejne zmienne dadzą się zmierzyć bezpośrednio. Niepewności $u(x_1), \dots, u(x_k)$ wielkości mierzonych bezpośrednio „przenoszą się” na wielkość obliczaną y powodując, że jest ona obciążona skończoną niepewnością. Dlatego sposoby obliczania niepewności wielkości y noszą nazwę prawa przenoszenia niepewności (lub: prawa propagacji niepewności).

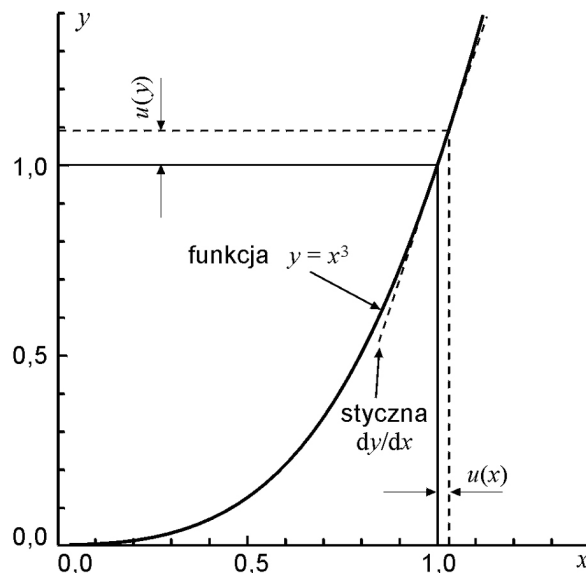
Funkcja jednej zmiennej

Analizę problemu rozpoczniemy od funkcji jednej zmiennej $y = f(x)$. Niepewność $u(x)$ jest mała w porównaniu z wartością mierzoną x , zatem niepewność y obliczyć można jako iloczyn pochodnej funkcji i niepewności $u(x)$,

$$u(y) = \frac{dy}{dx} u(x), \quad (1.12)$$

czyli jako różniczkę funkcji $y(x)$ (rys. 1.4). Prawo przenoszenia niepewności dla funkcji jednej zmiennej ilustruje przykład 1.4.

Rysunek 1.4: Ilustracja prawa przenoszenia niepewności



Przykład 1.4 Niepewność objętości kuli o znanej średnicy

Zmierzyliśmy średnicę D stalowej kulki suwmiarką, otrzymując wartość $D = 2,45$ mm z niepewnością $u(D) = 0,05$ mm. Objętość kuli obliczamy ze wzoru $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6}D^3 = 7,70$ mm³. Niepewność objętości kuli wynosi

$$u(V) = \frac{d}{dD} \left(\frac{\pi}{6} D^3 \right) u(D) = \frac{\pi}{2} D^2 u(D) = \frac{3,1416}{2} (2,45 \text{ mm})^2 \cdot 0,05 \text{ mm} = 0,47 \text{ mm}^3$$

Funkcja wielu zmiennych

W przypadku funkcji wielu zmiennych obliczamy za pomocą wzoru 1.12 różniczki cząstkowe dla kolejnych zmiennych x_1, \dots, x_k, \dots i tworzymy z nich sumę geometryczną⁶

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_k \left[\frac{\partial y}{\partial x_k} u(x_k) \right]^2} \quad (1.13)$$

Obliczoną wartość niepewności funkcji y **nazywamy niepewnością złożoną** i oznaczamy symbolem u_c lub $u_c(y)$ ⁷. Sumowanie geometryczne jest konsekwencją twierdzenia o wariancji sumy zmiennych losowych (Dodatek A, wzór A9), przy założeniu, że zmienne losowe są *nieskorelowane*. Warunek ten jest spełniony, jeżeli każda z wielkości x_k mierzona jest innym przyrządem.

Najprostszy przypadek prawa przenoszenia niepewności (bezwzględnej) zachodzi, gdy funkcja y jest sumą lub różnicą dowolnej liczby składników. Pochodne cząstkowe $\partial y / \partial x_k$ są równe jednościami i w rezultacie niepewność złożona jest sumą geometryczną niepewności poszczególnych składników:

$$y = x_1 + x_2 - x_3 + \dots \Rightarrow u_c(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2) + u^2(x_3) + \dots} \quad (1.14)$$

Przenoszenie niepewności względnej

Prawo przenoszenia niepewności przyjmuje postać szczególnie przejrzystą i wygodną do praktycznych obliczeń, gdy zamiast niepewności bezwzględnych obliczymy **złożoną niepewność względną** $u_{c,r}(y) = u_c(y)/y$. W tym celu równanie 1.13 dzielimy obustronnie przez y , a następnie, wewnątrz nawiasu kwadratowego, mnożymy i dzielimy przez x_k ,

$$\frac{u_c(y)}{y} = \sqrt{\sum_k \left[\frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x_k} u(x_k) \right]^2} = \sqrt{\sum_k \left[\frac{x_k}{y} \frac{\partial y}{\partial x_k} \frac{u(x_k)}{x_k} \right]^2}$$

Uzyskane wyrażenie zapisujemy w zwartej postaci

$$u_{c,r}(y) = \sqrt{\sum_k [w_k \cdot u_r(x_k)]^2} \quad (1.15)$$

wyrażającej prawo przenoszenia niepewności względnych:

Złożona niepewność względna $u_{c,r}(y) = u_c(y)/y$ jest sumą geometryczną niepewności względnych $u_r(x_k) = u(x_k)/x_k$ wielkości mierzonych bezpośrednio pomnożonych przez bezwymiarowe wagi w_k równe:

$$w_k = \left| \frac{x_k}{y} \frac{\partial y}{\partial x_k} \right| \quad (1.16)$$

Formuła 1.15 i 1.16 wydaje się bardziej skomplikowana niż 1.13. Rzecz w tym, że przy obliczaniu wag większość symboli skraca się (patrz przykład 1.5) i wyrażenia na wagi okazują się zdumiewająco proste (tab. 1.2).

W kolumnie „postać funkcji” symbol C oznacza nie tylko stałą, lecz również pozostałą część wzoru funkcyjnego nie zawierającą zmiennej x_k , stanowiącą zatem czynnik stały przy obliczaniu odpowiedniej pochodnej cząstkowej.

Najprostszy – a ważny w praktyce – przypadek prawa przenoszenia niepewności względnej zachodzi, gdy wielkość y jest iloczynem lub ilorazem wielkości mierzonych bezpośrednio. Wagi są wtedy równe jednościami (patrz pierwszy wiersz w tabeli 1.2. w konsekwencji złożona niepewność względna jest sumą geometryczną względnych niepewności czynników x_k :

⁶Suma geometryczna to pierwiastek z sumy kwadratów składników (co przedstawia wzór 1.14b)

⁷Indeks c pochodzi z ang. *combined uncertainty*

Tabela 1.2: Wartości wag we wzorze 1.15 i 1.16 dla najważniejszych funkcji.

Postać funkcji	$w = \left \frac{\partial y}{\partial x} \frac{x}{y} \right $
$y = Cx, y = \frac{C}{x}$	1
$y = Cx^n$	$ n $
$y = C\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}$
$y = Ce^{ax}$	ax
$y = C \ln ax$	$\frac{C}{y}$

$$y = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots}{x_3} \Rightarrow u_r(y) = \sqrt{u_r^2(x_1) + u_r^2(x_2) + u_r^2(x_3) + \dots} \quad (1.17)$$

Wnioskiem jakościowym z prawa przenoszenia niepewności jest określenie, która wielkość x_k daje największy przyczynek do niepewności złożonej. Jest to zwykle, ale nie zawsze, zmienna, której niepewność względna jest największa.

Przykład 1.5 Niepewność wartości przyspieszenia ziemskiego wyznaczonego z pomiaru okresu drgań i długości wahadła prostego.

Określiliśmy dla wahadła wartości i niepewności okresu drgań $T = 1279,33$ ms, $u(T) = 0,72$ ms i długości $l = 410$ mm, $u(l) = 1$ mm (przykłady 1.2 i 1.3). Przyspieszenie ziemskie obliczamy jako

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = \frac{4 \cdot 3,1416^2 \cdot 410 \text{ mm}}{(1,27933 \text{ s})^2} = 9890 \frac{\text{mm}}{\text{s}^2} = 9,890 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Uwaga. W obliczeniu zapisujemy tak wielkości liczbowe, jak i jednostki. Wynik zapisujemy z liczbą cyfr „dopasowaną” do przewidywanej niepewności pomiaru. W większości przypadków wystarcza zapis 4 cyfr znaczących!

Obliczenie niepewności złożonej za pomocą wzoru 1.13 wymaga obliczenia wyrażenia

$$u_c(g) = \sqrt{\left[\frac{4\pi^2}{T^2} u(l) \right]^2 + \left[\frac{8\pi^2 l}{T^3} u(T) \right]^2}$$

Stosując wzór 1.15 na niepewność względną otrzymujemy:

$$u_{c,r}(g) = \sqrt{\left[\frac{4\pi^2}{T^2} \frac{l}{\frac{4\pi^2 l}{T^2}} u_r(l) \right]^2 + \left[\frac{8\pi^2 l}{T^3} \frac{T}{\frac{4\pi^2 l}{T^2}} u_r(T) \right]^2} = \sqrt{[u_r(l)]^2 + [2u_r(T)]^2}$$

Uzyskane wagi, równe 1 i 2 odpowiednio dla l i T , można wypisać od razu korzystając z tabeli 1.2. Numeryczne obliczenia i zapis niepewności wykonujemy z dokładnością 2 cyfr znaczących (vide podrozdz. 1.7). Należy zestawić je w poniższej tabeli.

	x_k	$u(x_k)$	$u_r = u/x_k$	w_k	$w_k u_r(x_k)$
długość l	409 mm	1 mm	0,24 %	1	0,24 %
okres T	1279 ms	0,72 ms	0,056 %	2	0,11 %
Suma (geometryczna):					0,26 %

Z obliczonej niepewności względnej $u_{c,r}(g) = 0,26\%$ odzyskujemy niepewność bezwzględna

$$u_c(g) = 9,890 \cdot \frac{0,28\%}{100\%} = 0,028 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Porównanie przyczynków pochodzących od $u(l)$ i $u(T)$ pokazuje, że większym źródłem niepewności wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego jest niepewność pomiaru długości wahadła.

1.6 Niepewność rozszerzona

Własnością niepewności standardowej jest, że w przedziale od $x - u(x)$ do $x + u(x)$ wartość rzeczywista znajduje się z prawdopodobieństwem około 2/3 (dokładnie: 68 % dla rozkładu Gaussa, 58 % dla rozkładu jednostajnego). Niepewność standardowa jest miarą dokładności pomiarów, umożliwia porównywanie dokładności różnych metod pomiarowych, ta miara niepewności jest pokazywana na wykresach (o czym w podrozdziale 1.8).

Do wnioskowania o zgodności wyniku pomiaru z innymi rezultatami *Przewodnik* wprowadza pojęcie **niepewności rozszerzonej** U (ang. *expanded uncertainty*). Jak nazwa wskazuje, jest to „powiększona” niepewność standardowa, wybrana tak, by w przedziale $\pm U(y)$ znalazła się *przeważająca część* wyników pomiaru potrzebna do określonych zastosowań – w przemyśle, medycynie, ochronie środowiska. Wartość U obliczamy mnożąc niepewność złożoną przez bezwymiarowy **współczynnik rozszerzenia** k

$$U(x) = k \cdot u_c(x) \quad (1.18)$$

W zgodzie z międzynarodową praktyką do obliczenia U przyjmuje się umowną wartość $k = 2$. Wartości k inne niż 2 mogą być stosowane tylko w przypadku szczególnych zastosowań i winny być dyktowane przez ustalone i udokumentowane wymagania⁸. Wartości $k = 2$ odpowiada prawdopodobieństwo realizacji zmiennej losowej w przedziale $\pm U$ równe 95 % dla rozkładu Gaussa i 100 % dla jednostajnego (Dodatek A).

Typowe zastosowania niepewności rozszerzonej, to wnioskowanie o zgodności uzyskanego wyniku z wartością dokładną, względnie z inną wartością zmierzoną o znanej niepewności.

Porównanie z wartością dokładną (teoretyczną lub tabelaryczną)

Wartością teoretyczną jest wielkość, przeważnie bezwymiarowa, którą można określić bezbłędnie – lub z niepewnością pomijalnie małą – przy pomocy teorii. Przykładowo, za pomocą giętkiej taśmy mierniczej i okrągłej miednicy można wyznaczyć eksperymentalnie stosunek obwodu do średnicy koła. Wartość zmierzona można porównać z wartością teoretyczną $\pi = 3,1415927\dots$. Dokładne wartości *tabelaryczne* to m.in. stałe fizyczne, których wartości pochodzą z pomiaru, ale znane są z bardzo dużą dokładnością.

Wnioskowanie o zgodności (bądź niezgodności) wartości zmierzonej x i dokładnej x_0 polega na obliczeniu różnicy $x - x_0$ i porównaniu z wartością niepewności rozszerzonej. *Wartość zmierzona uznajemy za zgodną z wartością dokładną, jeżeli $|x - x_0| < U(x)$* . Uzyskanie wartości nie mieszczącej się w przedziale $\pm U$ wskazuje z reguły na występowanie nieuwzględnionego w naszej analizie błędu systematycznego lub grubego.

Porównanie wyników dwóch pomiarów

Wyniki dwu niezależnych pomiarów tej samej wielkości (np. współczynnika załamania szkła) mają z zasady różne wartości. Pojawia się pytanie: czy wielkości te rzeczywiście się różnią (bo mierzono różne gatunki szkła), czy też są równe „w granicach niepewności pomiaru”. Teoria niepewności pomaga odpowiedzieć na nie w sposób ilościowy.

Rachunek przebiega następująco. Do dyspozycji mamy dwie wartości zmierzone, x_1 i x_2 , oraz ich niepewności standardowe, $u(x_1)$ i $u(x_2)$. Zgodnie z prawem przenoszenia niepewności (wzór 1.14) różnica $x_1 - x_2$ posiada niepewność równą sumie geometrycznej $u(x_1)$ i $u(x_2)$. Niepewność rozszerzona wynosi zatem

⁸Dwa ostatnie zdania przytaczają oficjalne stanowisko NIST (por. str. 3)

$$U(x_1 - x_2) = k\sqrt{[u(x_1)]^2 + [u(x_2)]^2} \quad (1.19)$$

Wyniki pomiaru uważamy za zgodne ze sobą, jeżeli $|x_1 - x_2| < U(x_1 - x_2)$.

Przykład 1.6 Porównanie uzyskanej wartości przyspieszenia ziemskiego z wartością tabelaryczną

Uzyskaliśmy za pomocą wahadła prostego wartość $g = 9,866 \text{ m/s}^2$ z niepewnością $u(g) = 0,028 \text{ m/s}^2$. Wartość tabelaryczna dla Krakowa wynosi $g_0 = 9,811 \text{ m/s}^2$. Obliczamy różnicę

$$g - g_0 = 9,890 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 9,811 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,079 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Obliczamy niepewność rozszerzoną, przyjmując wartość $k = 2$,

$$U(g) = k \cdot u(g) = 2 \cdot 0,028 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0,056 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Uzyskana wartość jest niezgodna z wartością tabelaryczną. Celowo podajemy taki wynik, by przedyskutować możliwe przyczyny niezgodności i możliwości udoskonalenia pomiaru.

Różnica $g - g_0$ jest niewielka, co wskazuje, że błędów grubego nie popełniono. Raczej nieuniknione niepewności pomiaru zostały ocenione zbyt nisko. Na przykład, że przy pomiarze okresu mógł występować dodatkowy błąd systematyczny, którego nie można wykryć przez statystyczną analizę wyniku 8 pomiarów. Radykalne zmniejszenie $u(T)$ jest możliwe przez zastosowanie elektronicznego pomiaru czasu.

Również niepewność pomiaru długości mogła być oceniona zbyt optymistycznie, biorąc pod uwagę trudność określenia „na oko”, gdzie jest środek kuli. Sposobem podniesienia dokładności pomiaru l może być zmierzenie liniałem odległości punkt zawieszenia – górny punkt kuli i dodanie połowy średnicy kuli, zmierzonej przy użyciu suwmiarki.

1.7 Zapis niepewności pomiaru

Zalecane sposoby zapisu niepewności przedstawiamy na przykładzie. Przykład nasz wyróżnia zapis słowny (i), przy użyciu symboli (ii) i skrótowy (iii), ale stosować można dowolną kombinację przedstawionych elementów zapisu.

Niepewność standardowa

- (i) przyspieszenie ziemskie jest równe $9,866 \text{ m/s}^2$ z niepewnością $0,028 \text{ m/s}^2$;
- (ii) $g = 9,866 \text{ m/s}^2$; $u(g) = 0,028 \text{ m/s}^2$;
- (iii) $g = 9,866(28) \text{ m/s}^2$.

Niepewność rozszerzona

- (i) przyspieszenie ziemskie wynosi $9,866 \text{ m/s}^2$ z niepewnością rozszerzoną $0,056 \text{ m/s}^2$;
- (ii) $g = 9,866 \text{ m/s}^2$; $U(g) = 0,056 \text{ m/s}^2$;
- (iii) $g = (9,866 \pm 0,056) \text{ m/s}^2$.

Przykład ilustruje zasady zapisu niepewności zalecane przez *Przewodnik*.

- Niepewność zapisujemy z dokładnością dwu cyfr znaczących⁹. Stosujemy zwykle reguły zaokrąglania. Wartość mierzoną zaokrąglamy do tego samego miejsca co niepewność, w naszym przykładzie do 3 miejsca po przecinku. (Jeżeli ostatnią cyfrą jest zero, należy ją pozostawić, jako cyfrę znaczącą.)

⁹Przy zaokrągleniu do dwu cyfr znaczących maksymalna niepewność spowodowana zaokrągleniem wynosi od 5% do 0,5% (odpowiednio, dla cyfr 10 i 99). Taka dokładność wystarcza, gdyż ocena niepewności $u(g) = 0,028 \text{ m/s}^2$ ma dwie cyfry znaczące. Zera z przodu nie są cyframi znaczącymi – znikną przy zmianie jednostek ($u(g) = 28 \text{ mm/s}^2$)

- Przy zapisach skróconych (iii) 1.7 symbol \pm należy stosować do niepewności rozszerzonej, zapis z użyciem nawiasów do niepewności standardowej.

Dodatkowe uwagi na temat zapisu liczb i jednostek

Wyniki pomiarów i obliczeń najlepiej podawać w jednostkach, dla których wartość liczbowa zawarta jest w przedziale od 0,1 do 1000. Takie liczby są przyjazne dla człowieka – łatwe do wypowiedzenia i zapamiętania, zaś ich zapis wymaga najmniejszej liczby znaków drukarskich. Aby to umożliwić, wprowadzono przedrostki układu SI, takie jak: $p \equiv 10^{-12}$, $n \equiv 10^{-9}$, $\mu \equiv 10^{-6}$, $m \equiv 10^{-3}$, $k \equiv 10^3$, $M \equiv 10^6$, $G \equiv 10^9$, ... (nie wymieniliśmy wszystkich). Dołączyć je można do każdej jednostki posiadającej własny symbol (m, s, A, W, F, Hz etc.).

Gdy jednostka układu SI jest kombinacją symboli (np. kg/m^3 , V/m , $\text{W}/(\text{K}\cdot\text{m})$ – jednostki gęstości, natężenia pola elektrycznego i przewodności termicznej), przedrostki można dołączyć do każdego symbolu. Przykładowo, zapis gęstość rtęci jako $13,6 \text{ g/cm}^3$ jest bardziej przyjazny niż $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

1.8 Wykresy zależności fizycznych

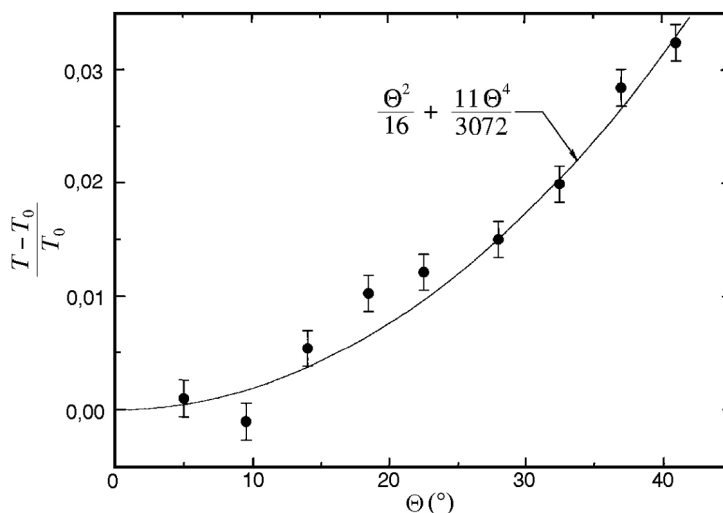
Istotą metodologii fizyki jest eksperyment i jego teoretyczna interpretacja. W wykresach obrazujących zależności funkcyjne dwu lub więcej zmiennych odzwierciedla się to w wyraźnym zaznaczeniu zarówno *punktów doświadczalnych*, jak i interpretującej przebieg zjawiska *krzywej teoretycznej*.

Sporządzanie wykresów stanowi ważną umiejętność, przydatną w innych naukach doświadczalnych. Przedstawione zasady obowiązują zarówno w przypadku wykresów wykonywanych ręcznie jak i sporządzanych przy użyciu komputera. Standardowe elementy omówiono poniżej.

Układ współrzędnych

Układ współrzędnych musi posiadać podziałkę, oznaczenie wielkości i oznaczenie jednostek. Skalę wykresu należy tak dobrać, by był on przejrzysty i dobrze wykorzystywał powierzchnię papieru. Aby to spełnić, podziałka nie musi zaczynać się od zera (np. pionowe osie rysunków 1.5 i 1.9).

Rysunek 1.5: Zależność względnej zmiany okresu drgań wahadła matematycznego od amplitudy drgań. Przykład porównania punktów doświadczalnych z krzywą teoretyczną

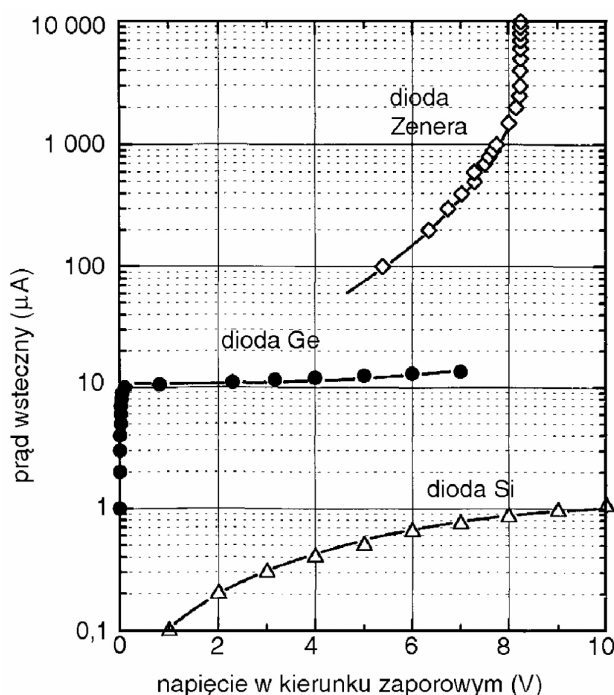


Przyzwyczajeni jesteście z matematyki do rysowania układu współrzędnych w postaci dwóch prostopadłych odcinków (rys. 1.9). Drugi sposób polega na zamknięciu pola wykresu w prostokątnej ramkę (rys. 1.5, 1.6 i 1.8). Symbole lub opis słowny umieszcza się wtedy w środku boku ramki (jednostki w nawiasach prostokątnych). Opis wykonujemy pismem technicznym, w edytorach pisma naśladuje je czcionka ARIAL. Kreski podziałki, skierowane do wewnątrz ramki, powtarzają się na pozostałych dwóch bokach. W razie potrzeby równoległe boki ramki można wykorzystać do pokazania różnych podziałek (rys. 1.8b). Zachęcamy do sporządzania wykresów w postaci „ramki”, gdyż jest to obecnie standardowy sposób przedstawienia rezultatów eksperymentalnych w dokumentacji technicznej i publikacjach naukowych.

Wykresy sporządzane ręcznie wykonujemy ołówkiem na papierze milimetrowym. Zwykły papier milimetrowy posiada siatkę liniową. Nabyć też można papier do wykresów z siatką logarytmiczną na jednej (rys. 1.6 i 1.8b) lub obydwu osiach. Skale nieliniowe różnych typów można również zrealizować przy użyciu komputera.

Wykresy ze skalą logarytmiczną stosujemy z dwu różnych powodów. Po pierwsze, dla sensownego przedstawienia wielkości, która zmienia się o wiele rzędów wielkości (rys. 1.6). Po drugie, w celu linearyzacji funkcji wykładniczych i potęgowych (o czym w podrozdziale 1.9).

Rysunek 1.6: Charakterystyki prądowo–napięciowe diod półprzewodnikowych różnych typów, spolaryzowanych w kierunku zaporowym. Przykład zależności, których nie da się opisać prostą funkcją matematyczną



Punkty doświadczalne

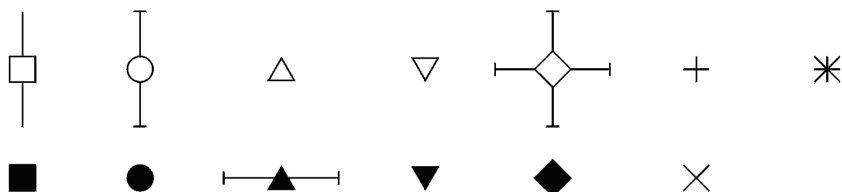
Podstawą do sporządzenia wykresu jest tabela, **punkty doświadczalne** są obrazem odpowiednich par liczb $(T - T_0)/T_0$ z tabeli. Punkty, naniesione ołówkiem na wykres są słabo widoczne. W wielu naukach (np. ekonomia) łączy się te punkty grubą linią łamaną.

W fizyce i innych naukach ścisłych z zasady postępujemy inaczej – punkty uwidaczniamy przez otoczenie symbolem w kształcie kółka, kwadracika itp. (rys. 1.7). Do estetycznego ręcznego rysowania symboli warto używać plastikowych szablonów zaopatrzonych w stosowne otwory. Różny kształt symboli wykorzystać można do przekazania dodatkowej informacji, np. odróżnienie punktów należących do różnych krzywych.

Na wykresie możemy pokazać również niepewności pomiaru. Powszechnie przyjęty sposób, to rysowanie **odcinka niepewności** o długości $\pm u(y)$ lub $\pm u(x)$, jak to pokazują rysunki 1.5 i 1.8b. Nanosimy je, gdy są du-

że w skali rysunku, tzn. rozmiar odcinka niepewności przewyższa rozmiary symbolu punktu doświadczalnego. Również dobre programy komputerowe umożliwiają nanoszenie zadanych odcinków niepewności. Zaznaczenie niepewności służy m.in. do wnioskowania o zgodności eksperymentu z teorią. Jeżeli wartości odcinków niepewności zostały ocenione prawidłowo, przeciętnie 2/3 z nich winno przecinać się z krzywą teoretyczną.

Rysunek 1.7: Zestaw symboli punktów doświadczalnych i niepewności pomiaru w jednym z programów graficznych



Krzywa interpretująca wyniki eksperymentu

Zasady rysowania krzywej zależą od „jakości” opisu teoretycznego, jaki mamy do dyspozycji.

- Dysponujemy algorytmem pozwalającym obliczyć krzywą teoretyczną w sposób niezależny od położenia punktów doświadczalnych. Wykres składa się z tychże punktów i obliczonej krzywej (rys. 1.5). Krzywa „doświadczalna” nie jest potrzebna!
- Znamy z teorii typ funkcji (np. wiemy, że jest to funkcja wykładnicza $y = Ae^{-\alpha x}$), ale nie znamy jej parametrów A i α . Wtedy należy funkcję zadanego rodzaju jak najlepiej dopasować („dofitować”) do położenia punktów doświadczalnych, parametry dopasowanej funkcji są rezultatami pomiaru (rys. 1.8). Metody dopasowania prostej $y = ax + b$ omówione są w podrozdziale 1.10.
- Nie dysponujemy określonym wzorem funkcyjnym (np. dla zależności napięcia termopary od temperatury). Wtedy przez punkty doświadczalne przeprowadzamy odręcznie (lub z pomocą krzywki) gładką krzywą „doświadczalną” (rys. 1.6). Procedura „wygładzania” wyników pomiaru oparta jest na założeniu, że nieznaną gładką funkcja $y(x)$ istnieje, zatem może być przybliżona szeregiem potęgowym. Dlatego w przypadku użycia komputera (który niczego nie potrafi „na oko”), jednym ze sposobów wygenerowania gładkiej krzywej jest dopasowanie szeregu potęgowego, czyli wielomianu, którego stopień dobieramy metodą prób i błędów.

Obok krzywej, w polu wykresu można i należy umieszczać dodatkowe napisy, linie, strzałki etc., ułatwiające jego zrozumienie. Powyższe, nieco schematyczne uwagi nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwości i form wykresu.

Przykład 1.7 Wykres zależności okresu wahadła od amplitudy

Opracowany w przykładzie 1.2 pomiar okresu wahadła wykonany został przy małej amplitudzie drgań. Przypomnijmy rezultat: $T_0 = 1,2793$ s, $u(T_0) = 0,0072$ s.

Następnie wykonano jednokrotne pomiary 50 okresów dla wahadła wykonującego drgania, w funkcji wzrastającej amplitudy drgań Θ . Poniższa tabela przedstawia zmierzone wartości okresu T oraz obliczone wartości względnej zmiany okresu $(T - T_0)/T_0$. Wielkość $(T - T_0)/T_0$ wprowadzamy dlatego, że nie zależy ona od długości wahadła i przyspieszenia ziemskiego, co więcej, zależność $(T - T_0)/T_0$ od kąta wychylenia Θ jest taka sama dla wahającego się ciała o dowolnym kształcie.

Θ [deg]	5	9,5	14	18,5	22,5	28	32,5	37	41
T [s]	1,2808	1,2780	1,2862	1,2926	1,2950	1,2986	1,3090	1,3158	1,3208
$\frac{T-T_0}{T_0}$	0,0012	-0,0010	0,0054	0,0104	0,0123	0,0151	0,0232	0,0285	0,0324

Ponieważ każdy pomiar okresu T wykonano tylko raz, za niepewność pomiaru można przyjąć estymator odchylenia standardowego *pojedynczego pomiaru*: $u(T) = 0,0020$ s (vide przykład 1.2). Zastosowaliśmy tu ocenę niepewności typu B, na podstawie wyników poprzedniego pomiaru.

Niepewność złożoną wielkości $(T - T_0)/T_0$ wyznaczony z prawa przenoszenia niepewności

$$u_c\left(\frac{T - T_0}{T_0}\right) = \sqrt{\left[\frac{1}{T_0}u(T_0)\right]^2 + \left[\frac{T}{T_0^2}u(T_0)\right]^2} = \sqrt{\left[\frac{0,020 \text{ s}}{1,2793 \text{ s}}\right]^2 + \left[\frac{1,32 \text{ s}^2}{(1,2793 \text{ s})^2}\right]^2} = 0,017$$

Obliczając u_c dla różnych wartości T stwierdzamy, że niepewność jest praktycznie taka sama dla wszystkich punktów wykresu. Została zaznaczona na wykresie (rys. 1.5). Natomiast zrezygnowano z pokazania relatywnie małej niepewności pomiaru kąta.

Teoretyczną wartość względnej zmiany okresu wahadła można obliczyć za pomocą wzoru

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{1}{16}\Theta^2 + \frac{11}{3072}\Theta^4 + \dots$$

(vide ćwiczenie 2, kąt wychylenia Θ trzeba podstawiać w radianach). Niezależnie od wyników eksperymentu! Potrzebne do wyrysowania krzywej dane, zestawione w poniższej tabeli, obliczamy w równych odstępach kąta.

Θ [deg]	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$\frac{T-T_0}{T_0}$	0,0005	0,0019	0,0043	0,0076	0,0119	0,0172	0,0234	0,0305	0,0387

Naniesionych punktów teoretycznych nie uwidaczniamy, lecz prowadzimy przez nie gładką krzywą. W przypadku użycia komputera najprościej obliczyć więcej punktów teoretycznych (np. co 0,5 stopnia) i nakazać maszynie poprowadzenie przez nie linii łamanej – wrażenie gładkiej krzywej zapewnione!

Ponieważ na wykresie zaznaczamy niepewność *standardową*, tylko część odcinków niepewności (*circa* 2/3) winna przecinać się z krzywą teoretyczną. Rysunek 1.5 demonstruje zatem zgodność teorii i eksperymentu.

1.9 Linearyzacja nieliniowych zależności funkcyjnych

Linia prosta jest krzywą najłatwiejszą do narysowania, a nasze oko łatwo odróżnia krzywą od prostej. Ponieważ tak rysowanie, jak i analiza matematyczna nieliniowych zależności jest trudniejsza niż liniowych, powszechną praktyką jest sprowadzanie nieliniowych zależności funkcyjnych do postaci liniowej.

Przykładowo, jeżeli mamy do czynienia z zależnością typu wykładniczego

$$y = A \exp(-ax) \tag{1.20}$$

to w celu jej zlinearyzowania obliczamy logarytm

$$\ln y = \ln A - ax \tag{1.21}$$

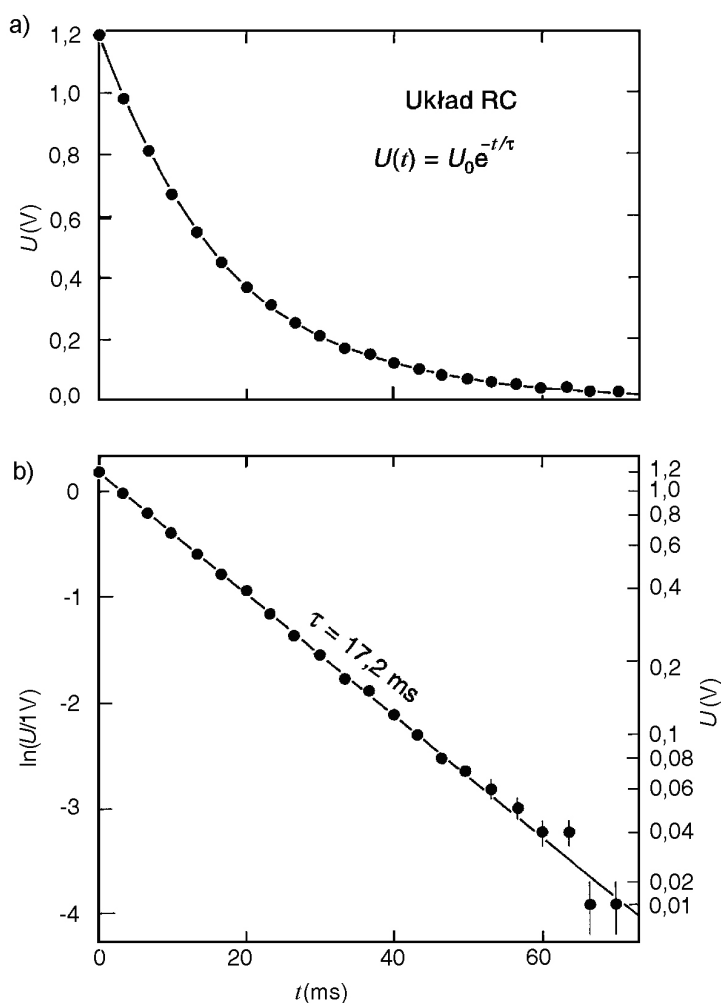
Odkładając na osi pionowej $\ln y$, a na osi poziomej x , uzyskujemy prostą o współczynniku nachylenia równym $-a$, przecinającą oś pionową w punkcie $\ln A$ 1.8.

Przy rysowaniu wykresów wykorzystujących operację logarytmowania powszechną praktyką – zamiast pokazywania na danej osi wykresu wartości logarytmu – jest równoważne tej operacji wprowadzenie nieliniowej skali logarymicznej (papier półlogarymiczny lub opcja skali logarymicznej w programie graficznym). Rysunek 1.8b posiada oś pionową opisaną z jednej strony przez wartości samego logarytmu naturalnego, z prawej zaś – przy użyciu skali logarymicznej.

W ogólności, tak sama możliwość linearyzacji, jak i rodzaj współrzędnych, jakie trzeba w tym celu zastosować, zależą od postaci funkcji. Do postaci liniowej dają się doprowadzić prawie wszystkie funkcje zawierające dwa nieznanne parametry. Natomiast nie można zlinearyzować funkcji zależnych od trzech i więcej parametrów (np: $y = ax^2 + bx + c$).

Przy linearyzacji funkcji, obok zmiany wartości współrzędnych punktów, ulegają również zmianie wartości odcinków niepewności. Nowe wartości u obliczamy za pomocą prawa przenoszenia niepewności dla funkcji jednej zmiennej (wzór 1.12). Zestawienie rysunków 1.8a i 1.8b uwidacznia, że rozmiary odcinków niepewności, jednakowe (i niewidoczne) w skali liniowej, stają się relatywnie duże w „ogonie” zależności zlogarytmowanej.

Rysunek 1.8: Zależność napięcia U od czasu t podczas rozładowania kondensatora C przez opór R , przedstawiona na wykresie zwykłym (a) i zlinearyzowanym (b). Niepewność pomiaru napięcia wynosi 0,005 V

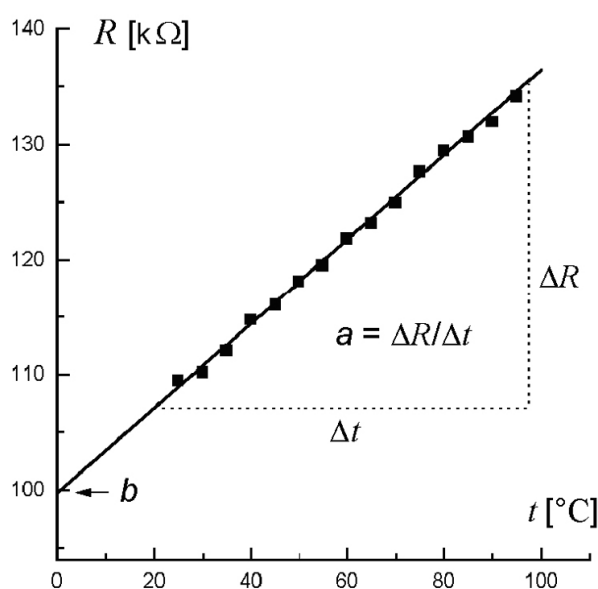


1.10 Dopasowanie prostej do zbioru punktów doświadczalnych

Tematem tego rozdziału jest zagadnienie poprowadzenia prostej $y = ax + b$ jak najlepiej dopasowanej do zbioru n punktów doświadczalnych $(x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n)$. Celem dopasowania jest nie tylko uzyskanie efektu wizualnego, ale przede wszystkim uzyskanie wartości parametrów a i b opisujących prostą, oraz ich niepewności $u(a)$ i $u(b)$.

Metoda graficzna polega na wykonaniu wykresu, a następnie na przyłożeniu linijki (najlepiej przezroczystej) i wykreśleniu na oko prostej tak, by odległości prosta – punkty eksperymentalne były średnio jak najmniejsze. Wykres do metody graficznej winien być duży (formatu A4), o tak dobranych skalach, by nachylenie linii prostej było zbliżone do 45° (rys. 1.9). Współczynnik nachylenia $a = \Delta y / \Delta x$ jest stosunkiem przyprostokątnych Δy i Δx *dużego* trójkąta, którego przeciwprostokątna jest częścią poprowadzonej graficznie prostej (rys. 1.9). Parametr b wyznacza punkt przecięcia prostej z osią y .

Rysunek 1.9: Wyznaczenie parametrów prostej metodą graficzną



Źródłem nieporozumień bywa, pochodzące z kursu matematyki, utożsamianie współczynnika nachylenia z tangensem kąta nachylenia prostej do osi x . W wykresach wielkości fizycznych kąt nachylenia α prostej może być różny dla tych samych danych pomiarowych – w zależności od tego, jakie podziałki zastosujemy na osiach wykresu. Jednoznacznie określoną wielkością pozostaje *współczynnik nachylenia* $a = \Delta y / \Delta x$ (zwany krótko *nachyleniem*). W przeciwieństwie do bezwymiarowego tangensa, nachylenie α posiada wymiar, będący stosunkiem wymiarów wielkości y i x .

Wadą metody graficznej wydawać się może subiektywność – każdy poprowadzi prostą trochę inaczej. Testy wykazują jednak, że w przypadku prawidłowo wykonanego wykresu i odrobiny wprawy wartości parametrów prostej są w granicach niepewności takie same jak uzyskane za pomocą metod analitycznych. Ponadto zaletą metody graficznej jest eliminacja punktów drastycznie odbiegających od prostej. Największą wadą metody jest brak informacji o niepewności parametrów prostej.

Metoda najmniejszych kwadratów jest najpowszechniej stosowaną metodą analityczną. Swoją nazwę zawdzięcza kryterium jakości dopasowania – takiego doboru parametrów prostej, by suma kwadratów różnic wartości eksperymentalnych y_i i obliczonych $ax_i + b$ była jak najmniejsza

$$S^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2 = \min \quad (1.22)$$

Kryterium 1.22 zapewnia najlepsze oszacowanie parametrów prostej przy założeniu, że wszystkie punkty

pomiarowe obarczone są jednakowym błędem przypadkowym o rozkładzie Gaussa.

W celu znalezienia parametrów a i b korzystamy ze zwykłego warunku na minimum funkcji dwu zmiennych:

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = 0 \quad \frac{\partial S^2}{\partial b} = 0$$

Obliczenie wyżej wymienionych pochodnych cząstkowych prowadzi do układu równań liniowych dla niewiadomych a i b :

$$\begin{aligned} a \sum x_i^2 + b \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a \sum x_i + b n &= \sum y_i \end{aligned}$$

Rozwiązanie tego układu równań zapisać można na dwa równoważne sposoby. Formuły przedstawione poniżej są najwygodniejsze do obliczeń ręcznych. Zaczynamy od obliczenia średnich arytmetycznych dla zmiennych x oraz y :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i \quad (1.23)$$

określających położenie „środka ciężkości” \bar{x} , \bar{y} punktów eksperymentalnych. Parametry prostej oblicza się z wzorów:

$$a = \frac{1}{D} \sum y_i (x_i - \bar{x}), \quad b = \bar{y} - a\bar{x} \quad (1.24)$$

gdzie

$$D = \sum (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.25)$$

Zauważmy, że wzór dla parametru b , czyli punktu przecięcia prostej z osią y , wynika z poprowadzenia prostej o nachyleniu a przez „środek ciężkości” \bar{x} , \bar{y} .

Zastosowanie praw statystyki matematycznej pozwala wyprowadzić formuły na odchylenia standardowe obydwu parametrów prostej. Najpierw obliczamy wielkość

$$s_y = \sqrt{\frac{S^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum [y_i - (ax_i + b)]^2}{n-2}} \quad (1.26)$$

będącą estymatorem odchylenia standardowego punktów od dopasowanej prostej.

Wartość s_y stanowi wynik pośredni do obliczenia błędów standardowych parametrów prostej, które obliczamy z formuł:

$$u(a) = \frac{s_y}{\sqrt{D}}, \quad u(b) = s_y \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{D}} \quad (1.27)$$

Kryterium najmniejszych kwadratów można wykorzystać do dopasowania innych zależności funkcyjnych. Potrzebne algorytmy omawiane są w podręcznikach statystyki matematycznej i zaimplementowane w komputerowych programach do analizy danych.

Metoda najmniejszych kwadratów a problem błędów systematycznych i grubych

Metoda najmniejszych kwadratów jest oceną typu A – statystyczną analizą serii n par liczb x_i , y_i . Zapewnia ocenę niepewności $u(a)$ i $u(b)$ pochodzącej tylko od błędu przypadkowego.

Jednakowy dla wszystkich punktów *błąd systematyczny* powoduje przesunięcie całego obrazu punktów eksperymentalnych i prostej. Takie przesunięcie (wzdłuż kierunku x bądź y) wpływa tylko na wartość parametru b prostej. Jest więc bez znaczenia w sytuacjach, gdy naprawdę ważnym rezultatem eksperymentu jest współczynnik nachylenia a .

Drugi, często spotykany rodzaj błędu systematycznego, polega na tym, że punkty odchylają się od prostej na początku lub na końcu zakresu pomiarowego. Przy dopasowaniu prostej, tak metodą najmniejszych kwadratów jak i graficzną, należy nie brać pod uwagę punktów systematycznie odbiegających od zależności liniowej (choć wszystkie punkty pokazujemy na wykresie).

Przejawem *błędu grubego* jest punkt wykresu drastycznie odbiegający od pozostałych. Może on być wynikiem pomyłki przy wykonywaniu eksperymentu i zapisie jego wyników oraz pomyłki przy wprowadzaniu danych do kalkulatora lub komputera. Nawet pojedynczy taki punkt zdecydowanie psuje jakość dopasowania metodą najmniejszych kwadratów.

Reasumując: wykres umożliwiający wizualną ocenę danych należy wykonać (lub obejrzeć na monitorze komputera) przed przystąpieniem do obliczeń.

Przykład 1.8 Dopasowanie prostej metodą najmniejszych kwadratów

Przedstawiony przykład liczbowy dotyczy zależności rezystancji opornika platynowego od temperatury. Zależność tą w stosowanym zakresie temperatur opisuje prosta $R = at + b$, gdzie t jest temperaturą mierzona w stopniach Celsjusza. Przez 15 punktów doświadczalnych (rys. 1.9) należy przeprowadzić prostą metodą najmniejszych kwadratów.

Przedstawiona poniżej tabela zawiera współrzędne punktów eksperymentalnych (kolumny x_i, y_i) i pośrednie rezultaty obliczeń

i	x_i	y_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})y_i$	$\delta y_i = y_i - (ax_i + b)$	δy_i^2
1	25	109,4	1225	-3829	+0,54	0,29
2	30	110,1	900	-3303	-0,57	0,33
3	35	112,0	625	-2800	-0,48	0,23
4	40	114,7	400	-2294	+0,40	0,16
5	45	116,0	225	-1740	-0,11	0,01
6	50	118,1	100	-1181	+0,18	0,03
7	55	119,5	25	-597,5	-0,23	0,05
8	60	121,8	0	0	+0,25	0,06
9	65	123,1	25	615,5	-0,26	0,07
10	70	124,9	100	1249	-0,27	0,07
11	75	127,6	225	1914	+0,62	0,28
12	80	129,4	400	2588	+0,60	0,36
13	85	130,6	625	3265	-0,01	0,00
14	90	131,9	900	3957	-0,52	0,27
15	95	134,1	1225	4693	-0,13	0,02
Suma	900	1823,2	7000	2537,5	0,01	2,33

Obliczanie parametrów prostej:

$$\bar{x} = 900/15 = 60^\circ\text{C}$$

$$\bar{y} = 1823,2/15 = 121,55 \Omega$$

$$D = 7000 \text{ deg}^2$$

$$a = 2537,5/7000 = 0,3625 \Omega/\text{deg}$$

$$b = 121,55 - 0,3625 \cdot 60 = 99,80 \Omega$$

Na podstawie obliczonych parametrów a i b możemy wykreślić prostą regresji. W tym celu obliczamy współrzędne dwóch dowolnych punktów prostej, np. $R(100^\circ\text{C}) = 0,3625 \cdot 100 + 99,8 = 136,05 \Omega$ oraz $R(0^\circ\text{C}) = b = 99,8 \Omega$ i punkty te łączymy linią prostą. Zgodność prostej i punktów doświadczalnych stanowi najlepszy sprawdzian poprawności obliczeń dokonanych do tej pory!

Na podstawie sumy kwadratów odchyłek punktów od prostej (ostatnia kolumna tabeli) obliczamy wartość

$$s_y = \sqrt{\frac{2,3}{15-2}} = 0,42 \Omega$$

i niepewności standardowe parametrów prostej:

$$u(a) = \frac{0,42}{\sqrt{7000}} = 0,0050 \frac{\Omega}{\text{deg}}, \quad u(b) = 0,42 \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{602}{7000}} = 0,24 \Omega$$

W skrócie parametry prostej regresji i ich niepewności można zapisać jako:

$$a = 0,3625(50) \frac{\Omega}{\text{deg}}, \quad b = 99,80(24) \Omega$$

Fakt, parametr b jest w granicach niepewności rozszerzonej równy 100Ω nie jest przypadkiem. Pomiar nasz wykonany został dla standardowego opornika Pt służącego do pomiaru temperatury, produkowanego tak, by w temperaturze 0°C jego rezystancja wynosiła dokładnie 100Ω .

1.11 Zastosowanie kalkulatorów i komputerów do opracowania danych

Kalkulatory

Dobry kalkulator osobisty jest obecnie dla inżyniera równie niezbędny jak przed laty suwak logarytmiczny. Najlepiej zaopatrzyć się w kalkulator „naukowy” (SCIENTIFIC) posiadający funkcje matematyczne, wykonujący obliczenia statystyczne i często wyposażony w możliwość prostego programowania. Jakość przyrządu i wygoda pracy zależą w dużym stopniu od jakości jego przycisków.

Kalkulatory niskiej klasy pokazują wszystkie ($7 \div 9$) cyfr po przecinku. (Karygodne jest raportowanie wszystkich cyfr, jako wyniku obliczeń – nawet dla wyników pośrednich zapis 4 cyfr znaczących na ogół wystarczy). Wygodne w użyciu są kalkulatory, które samoczynnie zaokrąglają do zadanej liczby cyfr po przecinku w zapisie zwykłym, względnie do określonej liczby cyfr w przypadku nastawienia na potęgowy zapis liczb.

Możliwość zaprogramowania kalkulatora pomaga usprawnić powtarzające się obliczenia. Typowym zastosowaniem jest obliczanie punktów krzywej teoretycznej za pomocą wzoru wprowadzonego do pamięci kalkulatora.

Większość kalkulatorów stosuje notację zwykłą, czyli algebraiczną. Warto wiedzieć, że niektóre kalkulatory wykorzystują „notację polską”, zaproponowaną w okresie międzywojennym przez polskiego matematyka Jana Łukasiewicza (1878–1956). W kalkulatorach takich najpierw wprowadza się liczby, a potem symbol operacji matematycznej (+, −, etc.). Uproszczenie złożonych obliczeń polega na całkowitej eliminacji potrzeby stosowania nawiasów i znaku „=”.

Kalkulatory wykorzystujące odwrotną notację polską (np. firmy Hewlett Packard) mają na obudowie symbol RPN¹⁰.

Obliczenia statystyczne przy użyciu kalkulatora

Każdy kalkulator naukowy przystosowany do obliczania średniej i odchylenia standardowego serii n liczb. Oznaczenia i sposób użycia przycisków są zrealizowane w różny sposób, ale schemat obliczeń jest taki sam.

- Wstępem do obliczeń jest wyzerowanie statystycznych rejestrów pamięci.
- Następnie wprowadzamy dowolną ilość liczb x_i . Nie są one zapamiętywane, lecz użyte do tworzenia w trzech rejestrach sum:
$$\sum 1 \quad \sum x_i \quad \sum x_i^2$$
Sumowanie kolejnych jedynek określa liczbę pomiarów ($\sum 1 = n$), dzięki czemu liczby n nie trzeba osobno wprowadzać.
- Po wprowadzeniu danych użycie odpowiednich przycisków powoduje obliczenie średniej \bar{x} i estymatora odchylenia standardowego pojedynczego pomiaru s_x .
- Z reguły nie ma przycisku dla obliczania estymatora odchylenia standardowego średniej. Trzeba wykonać dodatkowe obliczenie: $u(x) = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$ (wzór 1.7).

¹⁰skrót z języka ang. *reverse Polish notation*

Wiele kalkulatorów naukowych umożliwia dopasowanie prostej metodą najmniejszych kwadratów. Schemat obliczeń jest podobny.

- Wyzerowanie statystycznych rejestrów pamięci.
- Wprowadzanie kolejnych par liczb x_i, y_i . Posłużą do tworzenia w 6 rejestrach pamięci sum:
 $\sum 1 = n, \quad \sum x_i, \quad \sum x_i^2, \quad \sum y_i, \quad \sum y_i^2, \quad \sum x_i y_i.$
- Użycie odpowiednich przycisków umożliwia uzyskanie parametrów a, b prostej (obliczane są na podstawie zawartości ww. rejestrów pamięci).
- W większości kalkulatorów z zaimplementowanym dopasowaniem prostej nie ma automatycznego obliczania niepewności $u(a)$ i $u(b)$. Na szczęście, istnieje zwykle przycisk do obliczania współczynnika korelacji r . Wielkość ta jest bezwymiarowym parametrem statystycznym, tym bliższym wartości 1 lub -1 im punkty eksperymentalne są bliższe linii prostej. (Dla danych z przykładu 1.8 współczynnik korelacji $r = 0,9987$). Znajomość r umożliwia obliczenie niepewności parametrów prostej za pomocą wzorów¹¹:

$$u(a) = |a| \frac{\operatorname{tg}(\arccos r)}{\sqrt{n-2}}, \quad u(b) = u(a) \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \quad (1.28)$$

Zawartość rejestrów statystycznych można wydobyć z pamięci kalkulatora, wartość $\sum x_i^2$ jest potrzebna do obliczenia $u(b)$.

Komputery

Typowym zastosowaniem komputera w analizie danych są obliczenia statystyczne oraz dopasowanie prostej metodą najmniejszych kwadratów. Użycie komputera jest wręcz niezbędne przy dużej liczbie danych, gdzie jego zasadniczą zaletą jest nie tylko szybkość obliczeń, lecz również możliwość sprawdzenia, czy nie było pomyłki przy wprowadzaniu danych. Odpowiednie programy są dostępne w komputerach zainstalowanych w Pracowni Fizycznej, obejmują one również możliwość linearyzacji zależności wykładniczych i potęgowych. Dopasowanie prostej i innych zależności funkcyjnych wchodzi też w skład każdego programu do graficznej prezentacji danych.

Komputer z drukarką wyposażony w odpowiedni program można wykorzystać do sporządzania wykresów. Dobre programy graficznej prezentacji danych dają możliwość zrealizowania wszystkich omówionych w podrozdziale 1.7 zasad sporządzania wykresów. (Przy użyciu komputera sporządzone zostały rysunki 1.5, 1.6 i 1.9).

Jeżeli używany przez nas program czegoś nie potrafi – lub nie opanowaliśmy wszystkich jego możliwości – rozsądnym rozwiązaniem jest uzupełnienie rysunku komputerowego ręcznie przez dodanie odcinków niepewności, dodatkowych linii i opisów etc. Ostatecznie człowiek decyduje o poprawności uzyskanego wykresu i niedopuszczalne jest rozumowanie: wykres musi być dobry, bo został uzyskany przy użyciu komputera.

¹¹Wzory 1.28 zostały wprowadzone niedawno (*J.Higbie, Uncertainty in the linear regression slope, Am. J.Phys. 59, 184 (1991)*) i jak dotąd nie trafiły do podręczników i instrukcji kalkulatorów. Zawierają funkcje trygonometryczne, co jest ewenementem w statystyce.