1. Podstawy matematyki

1.1. Pola

Pole $f(\vec{r})$ wiąże wielkość fizyczną z położeniem punktu w przestrzeni $\vec{r} = (x, y, z)$. W przypadku, gdy pole jest zależne od czasu, możemy je zapisać jako $f(\vec{r}, t)$. Najprostszym przykładem pola jest pole skalarne, które każdemu punktowi w przestrzeni przypisuje dokładnie jedną wartość. Przykładami tego typu pól może być pole temperatur $T(\vec{r}, t)$ czy gęstości $\rho(\vec{r}, t)$.

Innym przypadkiem pola jest pole wektorowe $\vec{F}(\vec{r})$, które każdemu punktowi przestrzeni przypisuje wektor, określający kierunek i wartość danej wielkości fizycznej:

$$\vec{F}: (x, y, z) \to \vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \tag{1.1}$$

Przykładem takiego pola może być pole prędkości np. wiatru - każdemu punktowi atmosfery przypisać możemy wektor opisujący kierunek i szybkość wiatru w tym punkcie.

Każdemu (wystarczająco gładkiemu) polu skalarnemu możemy przyporządkować skojarzone z nim pole wektorowe - pole gradientów, do którego jeszcze wrócimy.

1.2. Pochodne cząstkowe

Załóżmy istnienie funkcji *f*, zależnej od *n* zmiennych, przypisującej każdemu punktowi przestrzeni wartość *z*:

$$f: (x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n) \to z = f(x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n) \tag{1.2}$$

przy czym funkcja ta jest określona w otoczeniu punktu $p_0 = (x_1^0, x_2^0 \ldots x_i^0 \ldots x_n^0)$.

Pochodną cząstkową tej funkcji względem zmiennej x_i nazywamy zwykłą pochodną w punkcie x_i^0 funkcji φ_i zdefiniowanej następująco:

$$\varphi_i: R \ni x_j \to f(x_1^0, x_2^0 \ldots x_i \ldots x_n^0) \tag{1.3}$$

innymi słowy:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2 .., x_i + \Delta x_i, . x_n) - f(x_1, x_2 .., x_i, . x_n)}{\Delta x_i} \tag{1.4}$$

czyli jest to pochodna funkcji względem x_i przy założeniu, że pozostałe zmienne traktujemy jako stałe i tak też się ją liczy, przy czym wszystkie definicje i wnioski są prawdziwe także dla pochodnych wyższego rzędu.

Przykład 1.1.

Korzystając z definicji (1.4) oblicz pochodną cząstkową funkcji:

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy + y^2$$

Rozwiązanie

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(x + \Delta x)^3 + 6(x + \Delta x)y + y^2 - (2x^3 + 6xy + y^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 6xy + 6y\Delta x + y^2 - 2x^3 - 6xy - y^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 6y\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 6y = \boldsymbol{6x^2 + 6y}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x^3 + 6x(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2 - (2x^3 + 6xy + y^2)}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{2x^3 + 6xy + 6x\Delta y + y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 - 2x^3 - 6xy - y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{6x\Delta y + 2y\Delta y + \Delta y^2}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} 6x + 2y + \Delta y = \mathbf{6x + 2y}$$

Przykład 1.2.

Oblicz pierwsze i drugie pochodne cząstkowe funkcji f:

$$f = x^2 y^3 + e^{-x} \sin y$$

Rozwiązanie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 + e^{-x} \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 + e^{-x} cosy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2 y - e^{-x} \sin y$$

Istnieje wiele własności i twierdzeń związanych z pochodnymi cząstkowymi. Jednym z najważniejszych twierdzeń jest **twierdzenie Schwarz'a**:

Tw. Jeżeli pochodne cząstkowe mieszane rzędu n≥2 są ciągłe w danym punkcie p_0 , to nie zależą od kolejności różniczkowania, czyli np. dla n=2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \tag{1.5}$$

1.3. Gradient

Gradient jest swego rodzaju odpowiednikiem zwykłych pochodnych dla funkcji wielu zmiennych. Podobnie jak pochodna, gradient opisuje tangens kąta nachylenia wykresu funkcji w danym punkcie. **Jeśli $\boldsymbol{f(x_1, x_2 \dots x_n)}$ jest różniczkowalną funkcją wielu zmiennych, gradientem nazywamy wektor n pochodnych cząstkowych tej funkcji.** Wektor ten wskazuje kierunek największego wzrostu funkcji w danym punkcie, natomiast długość tego wektora opisuje wielkość tego wzrostu:

$$grad\ f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \tag{1.6}$$

W kartezjańskim układzie współrzędnych (3D : x, y, z):

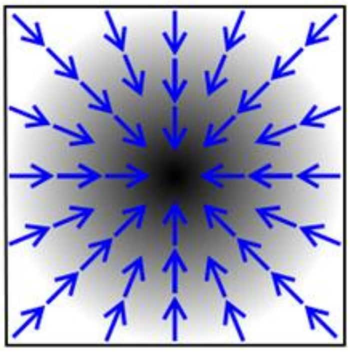
$$grad\ f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k} \tag{1.7}$$

Gdzie: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - jednostkowe wektory bazowe przestrzeni

Pojawiający się we wzorach symbol ∇, nazywamy operatorem różniczkowym nabla.

Definiuje on operacje:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.8}$$



Rys.1.1. Wizualizacja gradientu na przykładzie koloru. Im jest on ciemniejszy, tym większa wartość funkcji. Strzałki przedstawiają kierunek gradientu takiej funkcji.

Przykład 1.3.

Oblicz gradient funkcji:

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$$

Rozwiązanie

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{4y}{2\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{6z}{2\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}$$

$$\nabla r = \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}, \frac{4y}{2\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}, \frac{6z}{2\sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}}\right)$$

W przypadku gdy interesuje nas wartość gradientu w danym punkcie, wykorzystujemy twierdzenie:

Tw. Jeżeli funkcja $f: (x_1, x_2 \ldots x_i \ldots x_n)$ jest różniczkowalna w punkcie $p_0 = (x_1^0, x_2^0 \ldots x_i^0 \ldots x_n^0)$ to ma w tym punkcie pochodne cząstkowe $\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{p_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{p_0} \ldots \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{p_0} \ldots \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{p_0}$

Innymi słowy obliczamy gradient danej funkcji i wstawiamy pod nasze zmienne wartości współrzędnych punktu p_0.

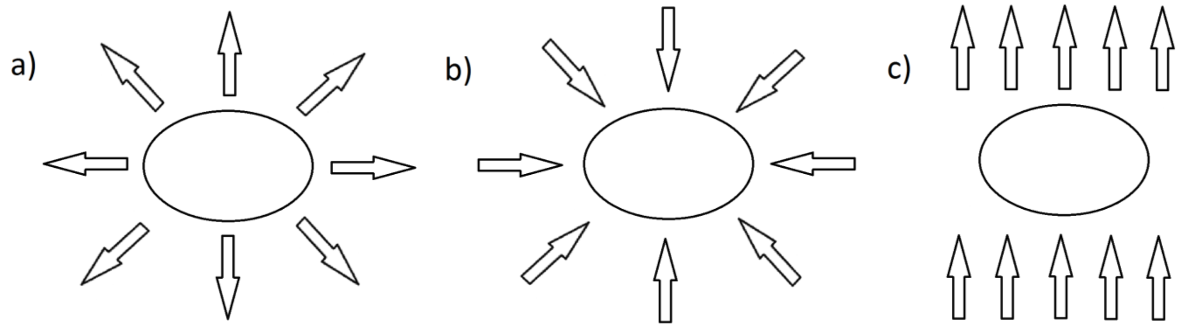
1.4. Dywergencja

Dywergencja jest to operator wektorowy, będący miarą natężenia źródła lub ujścia pola wektorowego na jednostkę objętości. Rezultat działania takiego operatora na funkcję wektorową jest skalarem. Wyobraźmy sobie nieskończenie małą objętość, przez której powierzchnię przechodzi strumień masy (będący wektorem). Jeśli masa "ucieka" z objętości, to znak dywergencji będzie dodatni, natomiast jeśli masa napływa do objętości - ujemny. Wartość dywergencji mówi nam, jak intensywny jest ten wypływ/przypływ masy. We współrzędnych kartezjańskich dywergencję możemy zdefiniować następująco:

Dla różniczkowalnego pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ dywergencja równa jest funkcji skalarnej:

$$div\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (F_x, F_y, F_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{1.9}$$

Zwróćmy uwagę na zapis dywergencji za pomocą operatora nabla, jest ona iloczynem skalarnym tego operatora z wektorem składowych pola wektorowego.



Rys.1.2. a) dywergencja jest dodatnia (masa ucieka z układu), b) dywergencja jest ujemna (masa wpływa do układu), c) dywergencja jest równa 0 (tyle samo masy wpływa i wypływa z układu)

Przykład 1.4.

Oblicz dywergencję pola wektorowego:

$$\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz^2, x^2yz)$$

Rozwiązanie

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz) = y + z^2 + x^2y$$

1.5. Rotacja

Rotacja jest operatorem wektorowym opisującym nieskończenie małą rotację trójwymiarowego pola wektorowego. W każdym punkcie przestrzeni pole rotacji opisywane jest przez wektor, którego kierunek i długość opisują wirowość pola w danym punkcie. We współrzędnych kartezjańskich rotację różniczkowalnego pola wektorowego $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ definiujemy jako pole wektorowe o postaci:

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} \tag{1.10}$$

Można zauważyć, że rotacja jest de facto iloczynem wektorowym operatora nabla i pola wektorowego. **Jeśli rotacja pola jest zerowa, mówimy o polu bezwirowym. Bezwirowość pola jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym jego potencjalności (pole potencjalne to takie, w którym praca nie zależy od drogi tylko od położenia punktów przed i po przesunięciu, np. pole grawitacyjne).**

Przykład 1.5.

Oblicz rotację pola:

$$\vec{F}(x, y, z) = xyz\vec{i} + yz^2\vec{j} + x^2y^2z\vec{k}$$

Rozwiązanie

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & yz^2 & x^2y^2z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial x^2y^2z}{\partial y} - \frac{\partial yz^2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial xyz}{\partial z} - \frac{\partial x^2y^2z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial yz^2}{\partial x} - \frac{\partial xyz}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= (2yx^2z - 2yz)\vec{i} + (xy - 2xy^2z)\vec{j} + (0 - xz)\vec{k}$$

1.6. Laplasjan

Operator Laplace'a jest operatorem różniczkowym opisującym dywergencję z gradientu pola. Laplasjan pola skalarnego $f(p_0)$ gdzie $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$, możemy interpretować jako miarę różnicy średniej wartości pola w nieskończenie małym otoczeniu tego punktu i wartości pola w tym punkcie. Laplasjan definiujemy w postaci:

$$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = div\ grad\ f \tag{1.11}$$

We współrzędnych kartezjańskich:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.12}$$

Przekształćmy teraz równanie (1.11) do postaci (1.12):

$$\begin{aligned} \Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \\ = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Przykład 1.6.

Oblicz Laplasjan pola skalarnego:

$$f(x, y, z) = x^2yz + xy^3z^2$$

Rozwiązanie

$$\Delta f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2yz + xy^3z^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2yz + xy^3z^2) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(x^2yz + xy^3z^2) =$$

$$= 2yz + 6xyz^3 + 2xy^3$$

1.7. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego jest jednym z bardziej przydatnych twierdzeń dla transportu masy. **Pozwala ono przejść z całki powierzchniowej (podwójnej) na całkę objętościową (potrójną) i vice versa.** Formułujemy je następująco:

Niech $V \in \mathbb{R}^3$ będzie obszarem ograniczonym powierzchnią zamkniętą *S,* a funkcje *P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)* będą funkcjami klasy C^1 w tym obszarze (czyli posiadają w nim ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu). Wtedy:

$$\iint\limits_S (P\ dydz + Q\ dxdz + R\ dxdy) = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz \tag{1.14}$$

Oznacza to, że jeśli mamy jakąś objętość V ograniczoną powierzchnią S (gdzie $\vec{S}$ jest wektorem tej powierzchni), wewnątrz której możemy opisać pole wektorowe $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ to:

$$\int\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int\limits_V div\vec{F}\ dV \tag{1.15}$$

Przyczyna przydatności tego twierdzenia dla nas jest prosta: przepływ masy do jakiejś objętości powoduje zmianę jej gęstości (wielkości związanej z objętością) i musi zachodzić przez powierzchnię ograniczającą tę objętość. Dzięki temu twierdzeniu będziemy mogli bezpośrednio powiązać ze sobą przyczynę i skutek.

1.8. Rozwinięcie funkcji w szereg Maclaurina

Jeżeli funkcja $f(x)$ ma *n*-tą pochodną $f^{(n)}(x)$ w pewnym przedziale domkniętym zawierającym punkt *a*, wówczas dla każdego *x* z tego przedziału ma miejsce następujący wzór Taylora:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n \tag{1.16}$$

Wzór ten jest niezwykle przydatny, bowiem umożliwia rozwinięcie dowolnej funkcji (spełniającej założenia) w szereg potęgowy.

Szeregiem Taylora będziemy nazywać szereg:

$$f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.17}$$

Szczególnym przypadkiem jest sytuacja w której $a = 0$. Mówimy wtedy o rozwinięciu funkcji w szereg Maclaurina:

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{1.18}$$

Przykład 1.7.

Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = e^x$

Rozwiązanie

Pochodna dowolnego rzędu z funkcji $f(x) = e^x$:

$$f^{(n)}(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

Podstawiając do wzoru (1.18) otrzymujemy:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots$$

Łatwo możemy zauważyć, iż wzór ogólny będzie miał postać:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

1.9. Podsumowanie

operator	symbol	działanie	działa na:	daje w rezultacie:
gradient	∇	$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$	pole skalarne	pole wektorowe
dywergencja	$\nabla \cdot$	$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$	pole wektorowe	pole skalarne
rotacja	$\nabla \times$	$\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$	pole wektorowe	pole wektorowe
laplasjan	Δ	$\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$	pole skalarne	pole skalarne

Tab.1.1. Podsumowanie wiadomości o operatorach różniczkowych

Tutaj mała uwaga: powyższa tabela dotyczy tylko interesujących nas działań operatorowych. Jest możliwe np. obliczenie laplasjanu z pola wektorowego (dającego w rezultacie pole wektorowe), ale nie będziemy takiej sytuacji rozważać.

Proponowana literatura:

en.wikipedia.com...

http://nz11-agh1.ifj.edu.pl/public_users/tlesiak/mmf_02_operatory_rozniczkowe.pdf

W.Krysicki, L. Włodarski: "**Analiza matematyczna w zadaniach - tom II**", strony: 36-42, 176-184, 193-195

D.McQuarrie: "**Matematyka dla przyrodników i inżynierów - tom I**", strony 248-257, 270-276, 307-317, 339-347 - bardzo przystępnie napisane z dużą ilością przykładowych zastosowań fizycznych